

Dissertation

Schwingungsdämpfung von Baukonstruktionen, insbesondere von Brücken

ausgeführt zum Zwecke der Erlangung des akademischen Grades eines Doktors der
technischen Wissenschaften unter der Leitung von

o.Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Dr.h.c. Franz Ziegler
E201
Institut für Allgemeine Mechanik

eingereicht an der Technischen Universität Wien
Fakultät für Bauingenieurwesen

von

Dipl.-Ing. Michael Reiterer
1160 Wien, Kulmgasse 5/4/7
Matr.Nr. 97 25 364

Wien, im Juni 2004

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als Wissenschaftlicher Mitarbeiter in Ausbildung (WMA) am Institut für Allgemeine Mechanik der Technischen Universität Wien. Meinem Doktorvater Herrn o.Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Dr.h.c. Franz Ziegler, Vorstand des Instituts für Allgemeine Mechanik der Technischen Universität Wien, möchte ich an dieser Stelle meinen herzlichsten Dank für die Anregung auf dem interessanten Gebiet der Schwingungstilgung zu dissertieren und für wertvolle Hinweise und Diskussionen im Laufe der Entstehung dieser Arbeit aussprechen. Ohne die hervorragende, äußerst zeitintensive, Betreuung durch Prof. Franz Ziegler und dessen einzigartige Weise der Führung zu einzelnen Teilzielen der Dissertation, hätte das vorliegende Werk niemals in dieser relativ kurzen Zeit und gleichzeitig auf diesem hohen Niveau, fertig gestellt werden können.

Herrn o.Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Hans Irschik, Vorstand des Instituts für Technische Mechanik der Johannes Kepler Universität in Linz, möchte ich für die Zweitbegutachtung dieser Dissertation recht herzlich danken.

Ein besonderer Dank gebührt auch meinen Kollegen Herrn ao.Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Christoph Adam, Herrn ao.Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Rudolf Heuer, Herrn Univ.Do. Dipl.-Ing. Dr.techn. Piotr Borejko und Herrn Univ.Ass. PhD. Peter Rosko, vom Institut für Allgemeine Mechanik der Technischen Universität Wien für die Unterstützung beim Anfertigen dieser Arbeit. Insbesondere möchte ich Herrn Prof. Rudolf Heuer für die vielen fruchtbaren Diskussionen und für die Einschulung in die Bedienung der gesamten Laborgeräte sowie der Messdatenerfassung recht herzlich danken. Auch Herrn Prof. Christoph Adam möchte ich hervorheben und ihm für die zahlreichen fruchtbaren Diskussionen im Laufe der Entstehung dieses Werkes danken. Besonders Danken möchte ich auch meinem Vorgänger Herrn Dipl.-Ing. Dr.techn. Markus Hochrainer für die unterstützende Arbeit im Labor für Modelldynamik und für zahlreiche Diskussionen während des Anfertigens dieser Arbeit.

Abschließend spreche ich noch der Hochschuljubiläumsstiftung der Stadt Wien meinen Dank aus, die mit ihrer finanziellen Unterstützung den Ankauf zahlreicher für die durchgeführten Experimente unbedingt notwendiger Geräte ermöglicht hat.

Kurzfassung

Die vorliegende Dissertation behandelt die Schwingungsdämpfung von Baukonstruktionen, insbesondere von Brücken, durch den Einsatz von optimal abgestimmten Flüssigkeitstilgern. Diese bestehen aus einem teilweise mit Flüssigkeit gefüllten U-förmigen Rohrsystem. Die zufolge einer äußeren Anregung induzierten Struktur-schwingungen rufen eine phasenverschobene Bewegung der Flüssigkeitssäule hervor. Die Schwingungsenergie wird dann über eine viskose und turbulente Rohrströmung dissipiert. Zur Erzielung des gewünschten Dämpfungsverhaltens wird eine mechanische Blende in den Flüssigkeitsstrom eingebaut. Der Anwendungsbereich der Tilger beschränkt sich dabei auf Frequenzen bis ca. 3.5–4.0 Hz, wobei ab ca. 0.5 Hz unbedingt eine Luftfeder durch Verschließen der Rohrenden auszuführen ist.

Im ersten Teil wird in Verallgemeinerung der bisherigen wissenschaftlichen Betrachtungen, die kombinierte horizontale und vertikale Erregung von Baukonstruktionen mit Flüssigkeitstilgern, untersucht. Aufgrund des Einsatzes von Flüssigkeitstilgern bei Gebäuden unter allgemeiner Erdbebeneinwirkung und insbesondere im Hinblick auf die Anwendung des Tilgers zur Reduzierung von Brückenschwingungen, wird die Empfindlichkeit des Flüssigkeitstilgers auf vertikale Anregungen untersucht. Es wird gezeigt, dass die vertikale Erregung schädliche Auswirkungen auf das optimale Dämpfungsverhalten von ungenügend gedämpften Flüssigkeitstilgern haben kann. Zur sicheren Vermeidung dieser schädlichen Auswirkungen wird eine hinreichende Stabilitätsbedingung in der Form einer erforderlichen Flüssigkeitsdämpfung angegeben. Insbesondere kann gezeigt werden, dass in allen praktischen Fällen, wo ein geschlossener Flüssigkeitstilger mit Luftfeder ausgeführt wird, die optimale Dämpfung des Tilgers weit über dem erforderlichen Wert liegt. Eine detaillierte Untersuchung der vertikalen Anregung und deren Auswirkung kann dann unterbleiben.

Im zweiten umfangreichen Teil der Dissertation wird der Einsatz von Flüssigkeitstilgern zur Reduzierung von Brückenschwingungen numerisch und experimentell untersucht. Die gekoppelte schiefe Biegedrillschwingung des kontinuierlichen Brückenträgers mit Flüssigkeitstilger wird in allgemeiner Form

beschrieben. Insbesondere werden personeninduzierte Schwingungen von Fußgängerbrücken betrachtet, und die dynamischen Kontaktkräfte des komplexen Systems „Mensch“ während des Bewegungsvorganges werden analysiert. In weiterer Folge wird auf das für Fußgängerbrücken äußerst gefährliche Rückkoppelungs- bzw. Synchronisationsphänomen näher eingegangen, bei dem eine anfangs regellos fortbewegende Fußgängergruppe die Schrittfrequenz an eine benachbarte Eigenfrequenz der Brücke in natürlicher Reaktion auf die Bewegung der Unterlage anpasst. Zu dessen sicherer Vermeidung wird eine Grenzbedingung in der Form einer erforderlichen Systemdämpfung präsentiert. Außerdem wird gezeigt, dass Brücken zufolge Fußgängeranregung parametererregte Schwingungen ausführen, die unter bestimmten Bedingungen zu Parameterresonanz und damit zu einer unerwünschten Aufschaukelung der schiefen Biegeschwingung der Brücke führen. Aufgrund dieser Tatsache wird eine weitere hinreichende Grenzbedingung vorgelegt, die eine Parameterresonanzgefahr von Fußgängerbrücken verhindert. In Anlehnung an diese theoretischen Untersuchungen wird die Tilgung von personeninduzierten Schwingungen anhand ausgewählter schwingungsanfälliger Fußgängerbrücken, nämlich der Millennium Bridge in London, der Toda Park Bridge in Japan und einer selbst entworfenen fiktiven Fußgängerbrücke, dargelegt. Simulationen zeigen, dass die unzulässigen Schwingungsantworten aller Fußgängerbrücken durch die Installation von optimal abgestimmten geschlossenen Flüssigkeitstilgern mit Luftfeder erfolgreich und wirtschaftlich reduziert werden können. Im Falle der Millennium Bridge wären insgesamt fünf optimierte Flüssigkeitstilger mit Luftfeder zu installieren gewesen. Diese hätten zur Gebrauchstauglichkeit geführt, mit einem Bruchteil der tatsächlich aufgewendeten Sanierungskosten. Gleichermäßen könnte auch die Auckland Harbour Bridge in Neuseeland für den Marathonlauf gebrauchstauglich gemacht werden.

Aufgrund der zunehmenden Bedeutung von dynamischen Windbelastungen für weitgespannte Brücken wird abschließend eine Methode zur optimalen Abstimmung von Flüssigkeitstilgern speziell für winderregte Schwingungen vorgestellt. Es wird eine Brücke betrachtet, die sich zufolge Windanregung (z.B. zufolge einer Windböe) in einem beliebig ausgelenkten Momentanzustand befindet. Die optimale Abstimmung der geschlossenen Flüssigkeitstilger mit Luftfeder soll zu einem

möglichst raschen Abklingen der freien Schwingungsantwort der Brücke führen. Anhand numerischer Simulationen wird gezeigt, dass durch die Installation von drei optimal abgestimmten Flüssigkeitstilgern im Brückenfeld das Ausschwingverhalten zufolge Windanregung erfolgreich und wirtschaftlich verbessert werden kann. Damit lässt sich insbesondere die Scruton-Zahl über ihren kritischen Wert anheben. Auf die Komplexität der Windanregung braucht dann nicht näher eingegangen zu werden. Auf die Anwendung von Flüssigkeitstilgern im kritischen Zustand des Vorbauverfahrens bei der Brückenherstellung wird besonders hingewiesen.

Abstract

The damping of vibration-prone civil engineering structures, with emphasis on bridges, by means of optimally tuned liquid column dampers (TLCD) is discussed in detail. A TLCD is an innovative vibration-absorbing device in the low frequency range (< 3.5 to 4.0 Hz), which relies on the motion of a liquid mass in a sealed tube to counteract the external motion while a built-in orifice plate induces turbulent damping forces that dissipate kinetic energy. The air-spring effectively increases the frequency range of applicability above 0.5 Hz .

Generalizing the current state-of-the-art, the first part of the dissertation explores the combined action of both, the horizontal and the vertical excitation of civil engineering-structures with TLCD attached. The sensitivity analysis of the TLCD with respect to vertical excitation is required for earthquake excitations of tall buildings and proves the applicability to counteract bridge vibrations. A sufficient condition for the linear damping coefficient is derived to avoid parametric resonance even under the most critical conditions. It turns out that in case of sealed TLCD the optimal damping ratio is much larger than the critical one and thus, no undesired worsening effects are observed.

In the second and main part of this dissertation, the application of TLCD to long span bridges, especially to footbridges, is studied numerically and experimentally. Oblique bending and torsional vibrations of continuous bridges with TLCD attached are described mathematically and analyzed numerically by means of truncated modal expansion. Recent problems in footbridge constructions, encountered at the Millennium Bridge in London and the Toda Park Bridge in Japan, give reason to a detailed analysis of the dynamic interaction forces caused by human body motions. Especially the phenomenon of “synchronization”, by which people respond naturally to a vibrating bridge when one of its natural frequencies is close to the walking or running frequency, is discussed in detail. A suitable limiting condition for stable time-harmonic motion in terms of the structural modal damping ratio of the bridge is presented. In addition, it is shown that pedestrian-induced vibrations may lead to parametric resonance in the lightly damped bridge and hence, to a non-admissible gain of the vibration amplitude. In order to prevent this instability

phenomenon a second limiting condition in terms of the structural modal damping ratio is presented that may override the first one. After these more theoretical considerations the application of TLCD to long span footbridges is investigated. The dynamics of the following three footbridges is considered: the Millennium Bridge, the Toda Park Bridge and a fictitiously designed footbridge. All numerical simulations indicate that the installation of a suitable number of sealed TLCD increases the effective structural damping above the required cut-off values. For retrofitting the Millennium Bridge, five sealed TLCD would have been necessary to secure its serviceability, requiring just a fraction of the actual installation costs. Similarly, the Auckland Harbour Bridge in New Zealand could be stabilized to allow the unlimited crossing in the course of marathon-race.

Due to the increasing importance of dynamic wind loads for long span bridges in the third part of this dissertation an optimization method for sealed TLCD, specifically applied to suppress wind-induced vibrations, is presented. Thereby, the bridge is assumed to be in an initial state (initial deformation and initial velocity) and the attached TLCD are supposed to minimize the decay-time of the free vibration. Numerical simulations indicate that installation of three TLCD to the bridge span suffices to reach this goal. Since the Scruton-number raises over its critical value, the complex analysis of the wind load is saved. In course of the construction process of bridges, critical vibrational states are avoidable by properly moving a variably TLCD along.

Inhaltsverzeichnis

1. EINFÜHRUNG IN DIE THEORIE DES LINEAREN MEHRMASSENSCHWINGERS – DÄMPFUNG, TILGUNG UND ZUSTANDSRAUM	1
1.1 DER LINEARE MEHRMASSENSCHWINGER, BEWEGUNGSGLEICHUNGEN	2
1.1.1 FREIE UNGEDÄMPFTE SCHWINGUNG DES MDOF-SYSTEMS	4
1.1.2 ORTHOGONALITÄT DER EIGENVEKTOREN \hat{w}_i BZW. EIGENSCHWINGUNGSFORMEN	6
1.1.3 ORTHONORMIERTE EIGENVEKTOREN	7
1.1.4 KORREKTUR DER EIGENVEKTOREN	8
1.1.5 ERZWUNGENE UNGEDÄMPFTE SCHWINGUNG DES MDOF-SYSTEMS – LÖSUNG MIT HILFE DER MODALEN ANALYSE	10
1.1.6 BERÜCKSICHTIGUNG EINER SCHWACHEN VISKOSEN DÄMPFUNG	12
1.2 DYNAMISCHE SCHWINGUNGSTILGUNG NACH DEN HARTOG	14
1.3 ZUSTANDSRAUMDARSTELLUNG DES MDOF-SYSTEMS MIT DYNAMISCHEN SCHWINGUNGSTILGERN	20
LITERATUR	24
2. GESCHICHTLICHE ENTWICKLUNG - PASSIVE SCHWINGUNGS- TILGUNGSSYSTEME BEI BRÜCKENBAUWERKEN	25
2.1 GESCHICHTLICHE ENTWICKLUNG DES FLÜSSIGKEITSTILGERS – ANWENDUNG IM SCHIFFBAU UND IN DER SATELLITENTECHNIK	26
2.2 ANWENDUNG VON FLÜSSIGKEITSTILGERN IN HOCHBAUKONSTRUKTIONEN	28
2.3 ÜBERBLICK PASSIVER DÄMPFUNGS- UND TILGUNGSSYSTEME BEI BRÜCKEN	37
2.3.1 EINSATZ VON METALLISCHEN DÄMPFERN	38
2.3.2 EINSATZ VON VISKOELASTISCHEN DÄMPFERN	39
2.3.3 EINSATZ VON KONVENTIONELLEN SCHWINGUNGSTILGERN MIT REIBELEMENTEN	41
2.3.4 EINSATZ VON KONVENTIONELLEN DYNAMISCHEN SCHWINGUNGSTILGERN MIT VISKOSEMER DÄMPFUNGSSCHARAKTERISTIK (DEN HARTOG TILGER)	42
2.3.5 EINSATZ VON FLÜSSIGKEITSTILGERN FÜR BRÜCKEN	47
LITERATUR	50
3. FLÜSSIGKEITSTILGER UNTER HORIZONTALER UND VERTIKALER ERREGUNG MIT ANWENDUNG IM HOCHBAU	53
3.1 EINFÜHRUNG	54
3.2 MECHANISCHES MODELL	56
3.2.1 SUBSTRUKTUR METHODE – FLÜSSIGKEITSTILGER FREIGESCHNITTEN	56
3.2.2 INSTATIONÄRE BERNOULLI-GLEICHUNG IN EINEM TRANSLATORISCH BEWEGTEN BEZUGSSYSTEM	58
3.2.3 GESCHLOSSENE ROHRENDEN – EFFEKT DER LUFTFEDER	68
3.2.4 ERMITTLUNG DER RESULTIERENDEN KRÄFTE UND MOMENTE	72
3.2.5 VERTIKALE ANREGUNG	77

3.2.6	FLÜSSIGKEITSTILGER – SDOF-STOCKWERKSRAHMEN, GEKOPPELTES SYSTEM	83
3.3	NUMERISCHE ANALYSE – EINFLUSS EINER VERTIKALEN ANREGUNG AUF DAS DÄMPFungsverhalten des Flüssigkeitstilgers	86
3.3.1	TEILWEISE OPTIMIERTER FLÜSSIGKEITSTILGER, OPTIMALES FREQUENZVERHÄLTNIS	87
3.3.2	NUMERISCHE ANALYSE DES HAUPTSYSTEMS MIT TEILWEISE OPTIMIERTEM FLÜSSIGKEITSTILGER	93
3.3.3	NUMERISCHE ANALYSE DES HAUPTSYSTEMS MIT NICHT OPTIMIERTEM FLÜSSIGKEITSTILGER	98
3.4	EXPERIMENTELLE UNTERSUCHUNG	101
3.5	VERGLEICH DER EXPERIMENTELLEN UND NUMERISCHEN ERGEBNISSE	108
3.5.1	ERGEBNISSE DES HAUPTSYSTEMS MIT TEILWEISE OPTIMIERTEM FLÜSSIGKEITSTILGER	108
3.5.2	ERGEBNISSE DES HAUPTSYSTEMS MIT NICHT OPTIMIERTEM FLÜSSIGKEITSTILGER	109
3.6	ANWENDUNG VON FLÜSSIGKEITSTILGERN IM HOCHBAU - NUMERISCHE SIMULATION EINES DREIGESCHOSSIGEN GEBÄUDES UNTER ERDBEBENANREGUNG	111
3.6.1	ALLGEMEINES	111
3.6.2	OPTIMALE ABSTIMMUNG DES GESCHLOSSENEN FLÜSSIGKEITSTILGERS MIT LUFTFEDER	113
3.6.2.1	Optimierung mit Hilfe der Analogie zu Den Hartog	114
3.6.2.2	Optimierung mit Hilfe des Gütekriteriums im Zustandsraum	114
3.6.3	NUMERISCHE STUDIE DES DREIGESCHOSSIGEN GEBÄUDEMODells - ERDBEBENEINWIRKUNG	120
3.6.4	NUMERISCHE STUDIE DES DREIGESCHOSSIGEN GEBÄUDEMODells - HARMONISCHE ANREGUNG	125
3.7	SCHLUSSBEMERKUNG	127
	LITERATUR	128

4. EINSATZ VON FLÜSSIGKEITSTILGERN ZUR REDUZIERUNG VON BRÜCKENSCHWINGUNGEN 131

4.1	EINFÜHRUNG	132
4.2	MECHANISCHES MODELL	137
4.2.1	FLÜSSIGKEITSTILGER FREIGESCHNITTEN	137
4.2.2	INSTATIONÄRE BERNOULLI-GLEICHUNG IN EINEM ALLGEMEIN IN DER EBENE BEWEGTEN BEZUGSSYSTEM (FÜHRUNGSSYSTEM)	139
4.2.3	ERMITTLUNG DER RESULTIERENDEN KRÄFTE UND MOMENTE	149
4.2.4	FLÜSSIGKEITSTILGER – HAUPTSYSTEM BRÜCKE, GEKOPPELTES SYSTEM	157
4.3	BIEGEDRILLSCHWINGUNGEN DES KONTINUIERLICHEN SCHLANKEN BRÜCKENTRÄGERS	162
4.3.1	HERLEITUNG DER GEKOPPELTEN BEWEGUNGSGLEICHUNGEN MIT WIRKUNG DES FLÜSSIGKEITSTILGER	162
4.3.2	LÖSUNG DER FREIEN UNGEDÄMPFTEN SCHWINGUNG DES SCHLANKEN BRÜCKENTRÄGERS OHNE FLÜSSIGKEITSTILGER	165
4.3.3	NUMERISCHE BESTIMMUNG DER EIGENKREISFREQUENZ DES UNGEDÄMPFTEN, BEIDSEITIG GABELGELAGERTEN BRÜCKENTRÄGERS OHNE FLÜSSIGKEITSTILGER	170
4.3.4	ORTHOGONALITÄTSBEZIEHUNGEN DER EIGENFUNKTIONEN	172
4.3.5	MODALE ANALYSE DER ERZWUNGENEN SCHWINGUNG DES SCHLANKEN BRÜCKENTRÄGERS MIT FLÜSSIGKEITSTILGER	174
4.3.6	BERÜCKSICHTIGUNG SCHWACHER VISKOSE DÄMPFUNG (MATERIALDÄMPFUNG) DES SCHLANKEN BRÜCKENTRÄGERS MIT FLÜSSIGKEITSTILGER	181

4.3.7	NUMERISCHE LÖSUNG DER ERZWUNGENEN SCHWINGUNG DES BRÜCKENTRÄGERS MITTELS DES RAYLEIGH-RITZ-GALERKIN'SCHEN NÄHERUNGSVERFAHRENS	182
4.4	NUMERISCHE SIMULATION DES GEKOPPELTEN SYSTEMS BRÜCKE/FLÜSSIGKEITSTILGER	187
4.4.1	HORIZONTALE UND VERTIKALE HARMONISCHE KRAFTERREGUNG	195
4.4.1.1	Horizontale Anregung durch eine zeitlich harmonische Funktion	195
4.4.1.2	Vertikale Anregung durch eine zeitlich harmonische Funktion	197
4.4.1.3	Kombinierte horizontale und vertikale Anregung durch eine harmonische Funktion	199
4.4.2	HORIZONTALE UND VERTIKALE PERIODISCHE KRAFTERREGUNG	201
4.4.2.1	Horizontale Anregung durch eine zeitlich periodische Funktion	202
4.4.2.2	Vertikale Anregung durch eine zeitlich periodische Funktion	204
4.4.2.3	Kombinierte horizontale und vertikale Anregung durch eine periodische Funktion	205
4.5	EXPERIMENTELLE UNTERSUCHUNG	209
4.5.1	MODELLVERSUCHSSTAND – BRÜCKENMODELL AM ELASTISCHEN KRAGTRÄGER	209
4.5.2	HORIZONTALE UND VERTIKALE ANREGUNG DES BRÜCKENMODELLS	212
4.5.3	MODELLAUFBAU MIT ERREGERKETTE	215
4.6	VERGLEICH DER EXPERIMENTELLEN UND NUMERISCHEN ERGEBNISSE	217
4.6.1	ERGEBNISSE ZUFOLGE HORIZONTALER ANREGUNG DURCH EINE ZEITLICH HARMONISCHE FUNKTION	217
4.6.2	ERGEBNISSE ZUFOLGE VERTIKALER ANREGUNG DURCH EINE ZEITLICH HARMONISCHE FUNKTION	219
4.6.3	ERGEBNISSE ZUFOLGE KOMBINIRTER HORIZONTALER UND VERTIKALER ANREGUNG DURCH EINE HARMONISCHE FUNKTION	220
4.6.4	ERGEBNISSE ZUFOLGE HORIZONTALER ANREGUNG DURCH EINE ZEITLICH PERIODISCHE FUNKTION	223
4.6.5	ERGEBNISSE ZUFOLGE VERTIKALER ANREGUNG DURCH EINE ZEITLICH PERIODISCHE FUNKTION	224
4.6.6	ERGEBNISSE ZUFOLGE KOMBINIRTER HORIZONTALER UND VERTIKALER ANREGUNG DURCH EINE PERIODISCHE FUNKTION	226
4.7	SCHLUSSBEMERKUNG	228
	LITERATUR	230
5.	PERSONENINDUZIERTE SCHWINGUNGEN	231

5.1	DYNAMISCHE KONTAKTKRÄFTE AUS MENSCHLICHEN BEWEGUNGSVORGÄNGEN	232
5.2	KONTAKTKRAFTWIRKUNG IN VERTIKALER RICHTUNG	233
5.3	KONTAKTKRAFTWIRKUNG IN HORIZONTALER RICHTUNG (LÄNGS UND QUER ZUR FORTBEWEGUNGSRICHTUNG)	239
5.4	EINWIRKUNG VON MEHREREN PERSONEN	243
5.4.1	REGELLOSE EINWIRKUNG AUF STARRER UND UNBEWEGLICHER UNTERLAGE	244
5.4.2	SYNCHRONE EINWIRKUNG AUF SCHWINGUNGSFÄHIGER UNTERLAGE – RÜCKKOPPLUNGSEFFEKT	245
5.5	UNTERSUCHUNG DES SYSTEMS BRÜCKE – SYNCHRONISIERENDE FÜßGÄNGER	249
5.6	ANALOGIE ZUR WINDANREGUNG VON ELASTISCHEN STRUKTUREN	252
5.7	PARAMETERRESONANZGEFAHR ZUFOLGE FÜßGÄNGERANREGUNG	256
	LITERATUR	264

6.	TILGUNG PERSONENINDUZIERTER SCHWINGUNGEN VON BRÜCKEN – NUMERISCHE SIMULATIONEN	265
6.1	MILLENNIUM BRIDGE IN LONDON	266
6.1.1	ALLGEMEINES	266
6.1.2	HAUPTFELD – INSTALLATION VON DREI FLÜSSIGKEITSTILGERN	268
6.1.3	HAUPTFELD: OPTIMALE ABSTIMMUNG DER GESCHLOSSENEN FLÜSSIGKEITSTILGER MIT LUFTFEDER	272
6.1.3.1	Optimierung mit Hilfe der Analogie zu Den Hartog	273
6.1.3.2	Optimierung mit Hilfe des Gütekriteriums im Zustandsraum	274
6.1.4	NUMERISCHE SIMULATION DER HAUPTFELDSCHWINGUNGEN	280
6.1.4.1	Anregungszustand 1 – symmetrische Anregung in horizontaler und vertikaler Richtung	281
6.1.4.2	Anregungszustand 2 – unsymmetrische horizontale und symmetrische vertikale Anregung	284
6.1.5	NÖRDLICHES SEITENFELD – INSTALLATION VON EINEM FLÜSSIGKEITSTILGER	287
6.1.6	SÜDLICHES SEITENFELD – INSTALLATION VON EINEM FLÜSSIGKEITSTILGER	293
6.2	TODA PARK BRIDGE IN JAPAN	298
6.2.1	ALLGEMEINES	298
6.2.2	OPTIMALE ABSTIMMUNG DES GESCHLOSSENEN FLÜSSIGKEITSTILGERS MIT LUFTFEDER	302
6.2.2.1	Optimierung mit Hilfe der Analogie zu Den Hartog	302
6.2.2.2	Optimierung mit Hilfe des Gütekriteriums im Zustandsraum	303
6.2.3	NUMERISCHE STUDIE DER TODA PARK BRIDGE	305
6.3	EINFELDRIGER BRÜCKENTRÄGER UNTER BERÜCKSICHTIGUNG DER VERDREHUNG $\vartheta(t)$	308
6.3.1	ALLGEMEINES	308
6.3.2	OPTIMALE ABSTIMMUNG DES GESCHLOSSENEN FLÜSSIGKEITSTILGERS MIT LUFTFEDER	311
6.3.2.1	Optimierung mit Hilfe der Analogie zu Den Hartog	312
6.3.2.2	Optimierung mit Hilfe des Gütekriteriums im Zustandsraum	312
6.3.3	NUMERISCHE STUDIE DES EINFELDRIGEN BRÜCKENTRÄGERS	317
	LITERATUR	322
7.	TILGUNG WINDERREGTER SCHWINGUNGEN VON BRÜCKEN	323
7.1	ALLGEMEINES	324
7.2	OPTIMALE ABSTIMMUNG DER FLÜSSIGKEITSTILGER AUF DIE FREIE SCHWINGUNGSANTWORT DER BRÜCKE	326
7.3	NUMERISCHE STUDIE EINES EINFELDRIGEN BRÜCKENTRÄGERS MIT HOHER TORSIONSSTEIFIGKEIT, FREIE SCHWINGUNG	328
7.3.1	ERGEBNISSE DER NUMERISCHEN SIMULATION DES EINFELDRIGEN BRÜCKENTRÄGERS MIT HOHER TORSIONSSTEIFIGKEIT	332
7.4	NUMERISCHE STUDIE EINES EINFELDRIGEN BRÜCKENTRÄGERS MIT GERINGER TORSIONSSTEIFIGKEIT, FREIE SCHWINGUNG	336
7.4.1	ERGEBNISSE DER NUMERISCHEN SIMULATION DES EINFELDRIGEN BRÜCKENTRÄGERS MIT GERINGER TORSIONSSTEIFIGKEIT	342
	LITERATUR	345

1. EINFÜHRUNG IN DIE THEORIE DES LINEAREN MEHRMASSENSCHWINGERS – DÄMPFUNG, TILGUNG UND ZUSTANDSRAUM

In diesem Kapitel werden die theoretischen Grundlagen zusammengestellt, die für das Verständnis und die Lösung der in der Dissertation behandelten Problemstellungen notwendig sind. Da mechanische Systeme welche mit einem Schwingungstilger ausgestattet sind mindestens zwei Freiheitsgrade (degrees-of-freedom, DOF) aufweisen, wird einleitend die Theorie des linearen Mehrmassenschwingers behandelt. Unter Berücksichtigung einer allgemeinen Anregung wird insbesondere die Lösung der freien und erzwungenen Schwingung mittels Modaler Analyse vorgelegt. Die dynamische Schwingungstilgung nach Den Hartog¹ wird dann näher erläutert und optimale Entwurfparameter eines konventionellen dynamischen Schwingungstilgers zufolge verschiedener Anregungsarten werden angegeben.

Wegen der Bedeutung des Phasenraumes im Hinblick auf die Optimierung von Flüssigkeitstilgern für Hauptsysteme mit mehr als einem Freiheitsgrad, wird der Übergang von den Bewegungsgleichungen 2. Ordnung auf ein Differentialgleichungssystem 1. Ordnung beschrieben. Dies führt auf die Zustandsraumdarstellung des mechanischen Systems.

1.1 Der lineare Mehrmassenschwinger, Bewegungsgleichungen

Grundsätzlich ist ein mechanischer Mehrfreiheitsgrad (Multi-Degree-of-Freedom, MDOF) Schwinger dadurch gekennzeichnet, dass zur Beschreibung der momentanen Lage des Systems mehrere Lagekoordinaten notwendig sind, wie z.B. in Abb. 1.1 dargestellt.

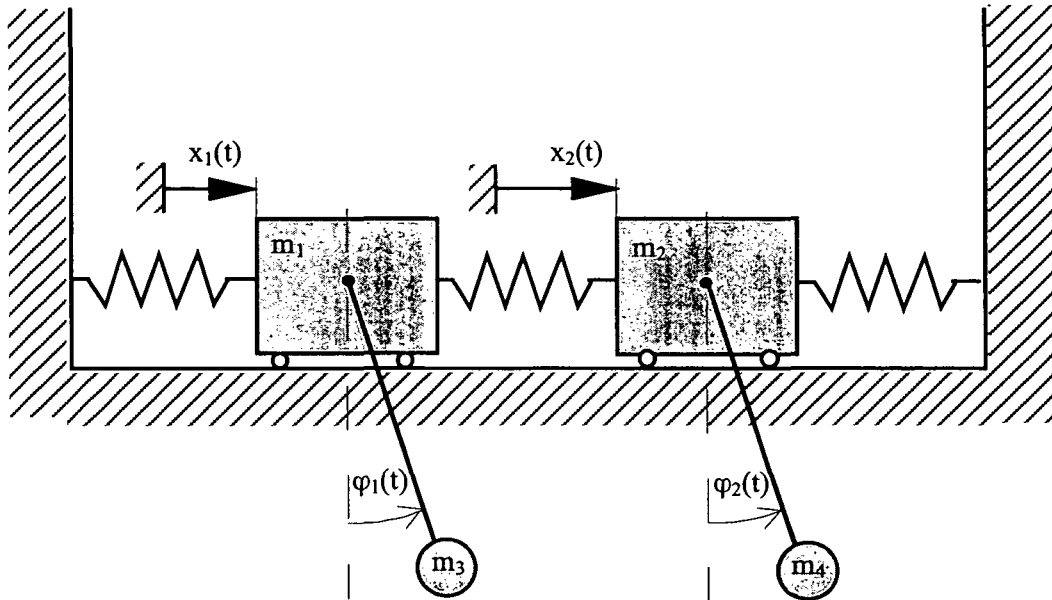


Abb. 1.1: Ungedämpftes MDOF-System

Der in Abb. 1.1 exemplarisch dargestellte MDOF-Schwinger besitzt insgesamt vier Freiheitsgrade, entsprechend den vier Lagekoordinaten, horizontale Verschiebungen $x_1(t)$ und $x_2(t)$ der Massen m_1 und m_2 und den Drehwinkeln $\varphi_1(t)$ und $\varphi_2(t)$ der angehängten (starren) mathematischen Pendeln, Punktmassen m_3 und m_4 . Das System kann für kleine Auslenkungen linearisiert werden.

Als Beispiel eines gedämpften linearen Systems mit mehreren schwingungsfähigen Freiheitsgraden wird nun ein ebener mehrstöckiger Rahmen mit linear elastischen Stielen (Feldsteifigkeiten k_1, \dots, k_N und linearen Dämpfungskoeffizienten c_1, \dots, c_N), wie in Abb. 1.2 dargestellt, analysiert.

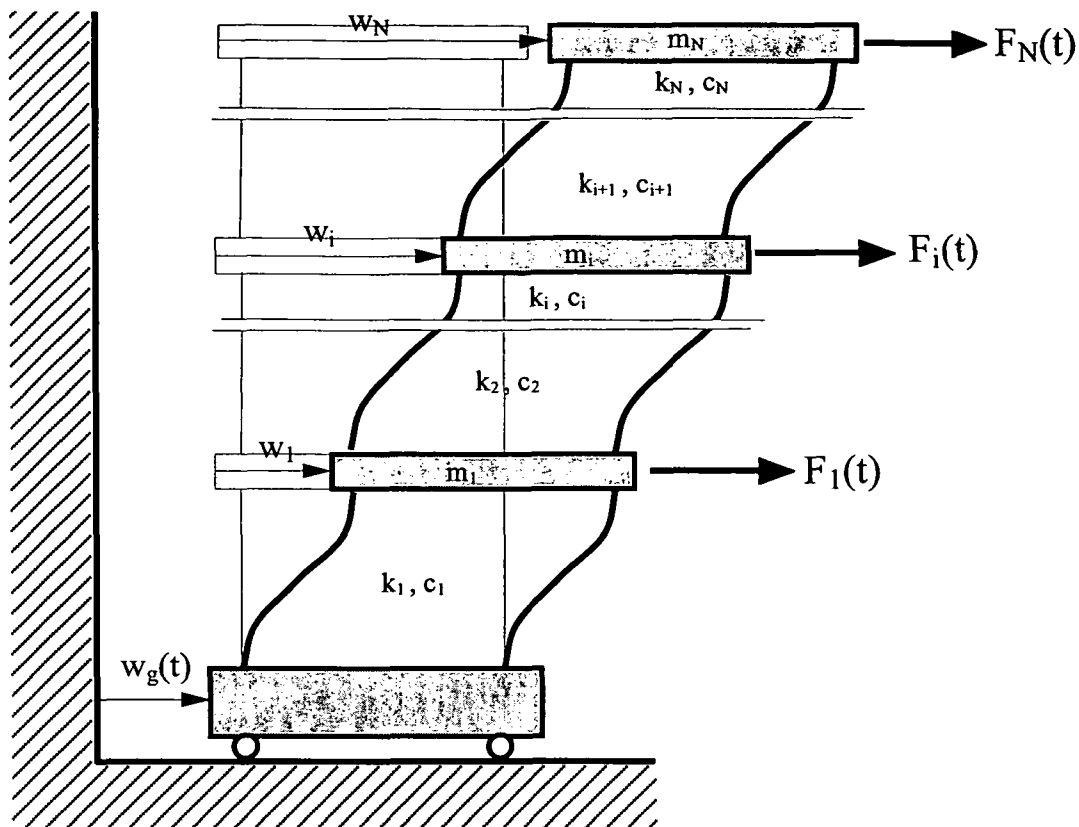


Abb. 1.2: Ebener mehrstöckiger Rahmen mit linear elastischen Stielen (Schubbalken); Rieгельmassen m_1, \dots, m_N ; Feldsteifigkeiten k_1, \dots, k_N ; lineare Dämpfungskoeffizienten c_1, \dots, c_N ; Einpunkt-Wegerregung des Fundamentes $w_g(t)$; Krafteerregung (Windkräfte) $F_i(t)$

Der in Abb. 1.2 dargestellte ebene mehrstöckige Rahmen besitzt N Freiheitsgrade mit den Lagekoordinaten w_1, w_2, \dots, w_N bzw. in Form der Spaltenmatrix, das hochgestellte T bedeutet transponiert,

$$\bar{w} = [w_1 \ w_2 \ \dots \ w_N]^T. \quad (1-1)$$

Weiters sei der Vektor der allgemeinen Erregerkräfte (Windkräfte) $\bar{F}(t)$ welche auf die Massen m_1, m_2, \dots, m_N einwirken gegeben,

$$\bar{F} = [F_1 \ F_2 \ \dots \ F_N]^T, \quad (1-2)$$

und $w_g(t)$ bezeichnet die vorgegebene Einpunkt-Wegerregung des Fundamentes zufolge eines Freifeld Seismogramms, d.h. ohne Boden-Bauwerksinteraktion. Die

Bewegungsgleichung lässt sich in Matrizenschreibweise in klassischer Form darstellen, wie z.B. von Clough und Penzien² [Seite 556]* angegeben,

$$\mathbf{M} \ddot{\vec{w}} + \mathbf{C} \dot{\vec{w}} + \mathbf{K} \vec{w} = \vec{F}(t) - \mathbf{M} \vec{r}_s \ddot{w}_g(t), \quad \vec{r}_s = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (1-3)$$

wo \mathbf{M} die Massenmatrix und \mathbf{K} die Steifigkeitsmatrix definieren. Schwache viskose Dämpfung (vorwiegend als Materialdämpfung) wird über die Dämpfungsmatrix \mathbf{C} eingeführt. \vec{r}_s bezeichnet den quasistatischen Einflussvektor wobei im Fall der Abb. 1.2 $\vec{r}_s = \vec{1}$ gilt. Die Massenmatrix \mathbf{M} ist eine Diagonalmatrix, d.h. es existiert keine Trägheitskopplung. Hingegen ist die Dämpfungsmatrix \mathbf{C} und Steifigkeitsmatrix \mathbf{K} im allgemeinen nicht diagonal. Letztere kann mit Hilfe des linearen Zusammenhanges zwischen Kräften und Verschiebungen (der Statik) ermittelt werden, wie z.B. von Clough und Penzien [2, Seite 178] dargelegt.

1.1.1 Freie ungedämpfte Schwingung des MDOF-Systems

Die homogenen Bewegungsgleichungen der freien ungedämpften Schwingung des mehrstöckigen Rahmens folgen aus Gl. (1-3) mit $\mathbf{C} = 0$,

$$\mathbf{M} \ddot{\vec{w}} + \mathbf{K} \vec{w} = \vec{0}. \quad (1-4)$$

Ihre Lösung ist eine zeitlich harmonische Schwingung

* Anmerkung: Als Folge des verwendeten Textverarbeitungsprogramms (Word 2000) wird in der gesamten Dissertation (innerhalb der einzelnen Kapitel), das Erstzitat eines Autors mit einer hochgestellten Zahl und jedes weitere (desselben Autors) in eckigen Klammern geschrieben.

$$\bar{w} = \hat{w} \cos(\omega t + \varepsilon) , \quad (1-5)$$

wo \hat{w} einen Eigenvektor, ω die zugehörige Eigenkreisfrequenz und ε einen Phasenwinkel bezeichnen. Nach Einsetzen von Gl. (1-5) in Gl. (1-4) erhält man das folgende allgemeine Eigenwertproblem

$$[\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}] \hat{w} = \bar{0} . \quad (1-6)$$

Eine nichttriviale Lösung der Gl. (1-6) existiert nur dann, wenn die Koeffizientendeterminante verschwindet, d.h. $|\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}| = \bar{0}$. Aus dieser algebraisch nichtlinearen Frequenzgleichung können die Eigenwerte $\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_N^2$ numerisch berechnet werden. Im Falle einer positiv definiten Massenmatrix \mathbf{M} und positiv definiten oder semidefiniten Steifigkeitsmatrix \mathbf{K} erhält man reelle positive Eigenwerte. Die Wurzeln aus diesen Eigenwerten, $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N$, sind die Eigenkreisfrequenzen des ungedämpften MDOF-Systems, wobei generell die Anordnung $\omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_N$ gilt.

Zu jeder Eigenkreisfrequenz $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N$ existiert dann ein korrespondierender N -dimensionaler Eigenvektor \hat{w}_i (die Eigenschwingungsform) der aus Gl. (1-6) berechnet werden kann,

$$[\mathbf{K} - \omega_i^2 \mathbf{M}] \hat{w}_i = \bar{0} , \quad i=1, 2, \dots, N . \quad (1-7)$$

Dieses N -dimensionale lineare Gleichungssystem mit singulärer Koeffizientenmatrix hat eine nichttriviale Lösung welche die Eigenvektoren \hat{w}_i liefert. Dabei ist zu beachten dass die Eigenvektoren \hat{w}_i die Orthogonalitätsbedingung zu erfüllen haben.

1.1.2 Orthogonalität der Eigenvektoren $\hat{\mathbf{w}}_i$ bzw. Eigenschwingungsformen

Eine äußerst wichtige Eigenschaft der Eigenvektoren ist ihre Orthogonalität. Mit Hilfe dieser Eigenschaft lässt sich die gekoppelte Bewegungsgleichung des linearen MDOF-Systems, Gl. (1-3), in einen Satz von N entkoppelten Bewegungsgleichungen des Einmassenschwingers transformieren. Für den Beweis der Orthogonalität wird Gl. (1-6) für die Eigenkreisfrequenzen ω_i und ω_j und für die Eigenvektoren $\hat{\mathbf{w}}_i$ und $\hat{\mathbf{w}}_j$ wie folgt angeschrieben,

$$\mathbf{K} \hat{\mathbf{w}}_i = \omega_i^2 \mathbf{M} \hat{\mathbf{w}}_i , \quad (1-8)$$

$$\mathbf{K} \hat{\mathbf{w}}_j = \omega_j^2 \mathbf{M} \hat{\mathbf{w}}_j . \quad (1-9)$$

Multiplikation der Gln. (1-8) mit dem transponierten Eigenvektor $\hat{\mathbf{w}}_j^T$ von links führt auf

$$\hat{\mathbf{w}}_j^T \mathbf{K} \hat{\mathbf{w}}_i = \omega_i^2 \hat{\mathbf{w}}_j^T \mathbf{M} \hat{\mathbf{w}}_i . \quad (1-10)$$

Die Gl. (1-9) wird nun transponiert und mit $\hat{\mathbf{w}}_i$ von rechts multipliziert

$$\hat{\mathbf{w}}_j^T \mathbf{K}^T \hat{\mathbf{w}}_i = \omega_j^2 \hat{\mathbf{w}}_j^T \mathbf{M}^T \hat{\mathbf{w}}_i . \quad (1-11)$$

Unter Berücksichtigung der Symmetrie von Massenmatrix $\mathbf{M} = \mathbf{M}^T$ und Steifigkeitsmatrix $\mathbf{K} = \mathbf{K}^T$ liefert die Subtraktion der Gl. (1-10) von Gl. (1-11) das folgende Resultat

$$0 = (\omega_i^2 - \omega_j^2) \hat{\mathbf{w}}_j^T \mathbf{M} \hat{\mathbf{w}}_i . \quad (1-12)$$

Unter der Voraussetzung, dass $\omega_i^2 \neq \omega_j^2$ und die Massenmatrix \mathbf{M} positiv definit ist, wird die Gl. (1-12) als Orthogonalitätsbeziehung der Eigenvektoren bezeichnet und man erhält die folgende wichtige Eigenschaft,

$$\hat{\mathbf{w}}_j^T \mathbf{M} \hat{\mathbf{w}}_i = m_i \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq j \\ m_i & \text{für } i = j \end{cases}, \quad (1-13)$$

wo m_i eine modale generalisierte Masse und δ_{ij} das Kroneckersymbol bezeichnen. In ähnlicher Weise lässt sich die Orthogonalitätsbeziehung auch in Bezug auf die Steifigkeitsmatrix \mathbf{K} zeigen, wie z.B. in Clough und Penzien [2] angegeben,

$$\hat{\mathbf{w}}_j^T \mathbf{K} \hat{\mathbf{w}}_i = k_i \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq j \\ k_i & \text{für } i = j \end{cases}, \quad (1-14)$$

wo k_i eine modale generalisierte Steifigkeit definiert.

1.1.3 Orthonormierte Eigenvektoren

In vielen Fällen einer Modalen Analyse ist es nützlich die Eigenvektoren $\hat{\mathbf{w}}_i$ in Bezug auf die Massenmatrix \mathbf{M} oder Steifigkeitsmatrix \mathbf{K} zu orthonormieren, wie auch von Shabana³ [Seite 121] dargelegt wird. Der bezüglich der Massenmatrix \mathbf{M} orthonormierte Eigenvektor ist definiert als

$$\bar{\boldsymbol{\phi}}_i = \frac{1}{\sqrt{m_i}} \hat{\mathbf{w}}_i = \frac{1}{\sqrt{\hat{\mathbf{w}}_i^T \mathbf{M} \hat{\mathbf{w}}_i}} \hat{\mathbf{w}}_i, \quad i=1, 2, \dots, N, \quad (1-15)$$

wodurch sich die generalisierte Masse m_i durch Pre- und Postmultiplikation der Massenmatrix \mathbf{M} mit dem orthonormierten Eigenvektor $\bar{\boldsymbol{\phi}}_i^T$ bzw. $\bar{\boldsymbol{\phi}}_i$ zu $m_i=1$ und die generalisierte Steifigkeit zu $k_i=\omega_i^2$ ergibt. Die Matrix welche sich aus den N orthonormierten Eigenvektoren $\bar{\boldsymbol{\phi}}_i$ bilden lässt

$$\Phi = [\bar{\phi}_1, \bar{\phi}_2, \dots, \bar{\phi}_n], \quad (1-16)$$

wird dann als Modalmatrix bezeichnet. Mit der Modalmatrix ergeben sich für die Massenmatrix \mathbf{M} und Steifigkeitsmatrix \mathbf{K} folgende Eigenschaften,

$$\Phi^T \mathbf{M} \Phi = \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & \ddots \\ & & & 1 \end{bmatrix}, \quad \Phi^T \mathbf{K} \Phi = \text{diag}[\omega_i^2] = \mathbf{\Omega}^2 = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & & \\ & \omega_2^2 & \\ & & \ddots \\ & & & \omega_n^2 \end{bmatrix}. \quad (1-17)$$

1.1.4 Korrektur der Eigenvektoren

Im Zuge von dynamischen Analysen einer Baukonstruktion werden die Eigenkreisfrequenzen ω_i und zugehörigen Eigenvektoren $\bar{\phi}_i$ sehr oft aus einer dynamischen Finite Elemente Vorstudie numerisch ermittelt. Die Massenmatrix \mathbf{M} ist aus der Finite Elemente Analyse meist nicht genau verifizierbar und muss daher in passender Weise - nicht konsistent, angenommen werden. Aufgrund der nicht exakten Ausdrücke für die Eigenvektoren $\bar{\phi}_i$ und Massenmatrix \mathbf{M} ist die Orthogonalitätsbedingung der normierten Eigenvektoren,

$$\bar{\phi}_i^T \mathbf{M} \bar{\phi}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq j \\ 1 & \text{für } i = j \end{cases}, \quad (1-18)$$

nicht mehr erfüllt. Die gängige Praxis, eine Komponente von ϕ_2 aus der Orthogonalitätsbeziehung $\bar{\phi}_2^T \mathbf{M} \bar{\phi}_1 = 0$ zu bestimmen, die Grundschwingungsform $\bar{\phi}_1$ wird als genau vorgegeben betrachtet, bzw. zwei Komponenten von ϕ_3 aus $\bar{\phi}_3^T \mathbf{M} \bar{\phi}_1 = 0$ und $\bar{\phi}_3^T \mathbf{M} \bar{\phi}_2 = 0$, führt oftmals zu unzulässigen „Deformationssprüngen“. Eine Verbesserung der Korrektur kann nun mit Hilfe der Matrixiteration nach Stodola, wie z.B. in Clough und Penzien [2, Seite 209] dargelegt, erreicht werden. Dabei erfährt die, in den meisten Fällen relativ genau vorliegende Grundschwingungsform $\bar{\phi}_1$, mit zugehöriger modaler Masse $m_1 = 1$, keine Korrektur. Die erste, weniger genau

vorliegende Oberschwingungsform $\bar{\phi}_2$ ist nun von Anteilen der Grundschwingungsform $\bar{\phi}_1$ „zu reinigen“,

$$\bar{\phi}_2^* = S_1 \bar{\phi}_2, \quad S_1 = I - \bar{\phi}_1 \bar{\phi}_1^T M, \quad (1-19)$$

wo S_1 eine sogenannte Reinigungsmatrix bezeichnet. Man erhält einen korrigierten Eigenvektor $\bar{\phi}_2^*$ dessen zugehörige modale Masse $m_2^* \neq 1$ ist. Eine entsprechende Orthonormierung erhält man mit,

$$\bar{\phi}_2^{**} = \frac{1}{\sqrt{m_2^*}} \bar{\phi}_2^*, \quad m_2^* = \bar{\phi}_2^{*T} M \bar{\phi}_2^*. \quad (1-20)$$

Der Eigenvektor $\bar{\phi}_2^{**}$ wird in weiterer Folge zur Korrektur der zweiten Oberschwingungsform $\bar{\phi}_3$ mitbenützt,

$$\bar{\phi}_3^* = S_2 \bar{\phi}_3, \quad S_2 = I - \bar{\phi}_1 \bar{\phi}_1^T M - \bar{\phi}_2^{**} \bar{\phi}_2^{**T} M. \quad (1-21)$$

Man erhält einen sowohl von der Grundschwingungsform $\bar{\phi}_1$ als auch von der ersten Oberschwingungsform $\bar{\phi}_2^{**}$ gereinigten Eigenvektor $\bar{\phi}_3^*$. Der entsprechende orthonormierte Eigenvektor $\bar{\phi}_3^{**}$ ergibt sich, analog zu Gl. (1-20),

$$\bar{\phi}_3^{**} = \frac{1}{\sqrt{m_3^*}} \bar{\phi}_3^*, \quad m_3^* = \bar{\phi}_3^{*T} M \bar{\phi}_3^*. \quad (1-22)$$

Die beschriebene Vorgehensweise wird für alle betrachteten Schwingungsformen $\bar{\phi}_1, \bar{\phi}_2, \dots, \bar{\phi}_N$ durchgeführt und man erhält $N-1$ korrigierte Eigenvektoren $\bar{\phi}_2^{**}, \bar{\phi}_3^{**}, \dots, \bar{\phi}_N^{**}$. Unter Umständen sollte die Orthogonalitätsprüfung der Eigenvektoren, Gl. (1-18), mit der Steifigkeitsmatrix K durchgeführt werden. Diese kann nämlich in relativ genauer Form, direkt aus der statischen Analyse einer Baukonstruktion entnommen werden. Hingegen erweist sich die Wahl einer passenden Massenmatrix M , insbesondere der Massenträgheitsmomente von Hochbauten, sehr oft als schwierig.

1.1.5 Erzwungene ungedämpfte Schwingung des MDOF-Systems – Lösung mit Hilfe der Modalen Analyse

Die inhomogenen Bewegungsgleichungen der erzwungenen Schwingung des mehrstöckigen Rahmens folgen wieder aus Gl. (1-3) mit $C = 0$,

$$\mathbf{M} \ddot{\bar{\mathbf{w}}} + \mathbf{K} \bar{\mathbf{w}} = \bar{\mathbf{F}}(t) - \mathbf{M} \bar{\mathbf{r}}_s \ddot{\mathbf{w}}_g(t) . \quad (1-23)$$

Die Gl. (1-23) ist ein System von N gekoppelten linearen Gleichungen (mit sogenannter Federkopplung) und wird durch die Störglieder $\bar{\mathbf{F}}(t)$ und $-\mathbf{M} \bar{\mathbf{r}}_s \ddot{\mathbf{w}}_g(t)$ zu erzwungenen Schwingungen angeregt. Um eine Entkoppelung der Gleichung zu erreichen wird der Lösungsvektor $\bar{\mathbf{w}}$ im Raum der orthonormierten Eigenvektoren $\bar{\phi}_i$ dargestellt,

$$\bar{\mathbf{w}} = \sum_{i=1}^n \bar{\phi}_i q_i(t) = \Phi \bar{\mathbf{q}} , \quad (1-24)$$

wo Φ die Modalmatrix, Gl. (1-16), und $q_i(t)$ die modale Koordinate bezeichnen. Multiplikation der Bewegungsgleichung, Gl. (1-23), mit der transponierten Modalmatrix Φ^T von links und Einsetzen der obenstehenden Eigenvektorentwicklung liefert

$$\Phi^T \mathbf{M} \Phi \ddot{\bar{\mathbf{q}}} + \Phi^T \mathbf{K} \Phi \bar{\mathbf{q}} = \Phi^T \bar{\mathbf{F}}(t) - \Phi^T \mathbf{M} \bar{\mathbf{r}}_s \ddot{\mathbf{w}}_g(t) . \quad (1-25)$$

Wegen der Orthogonalität der orthonormierten Eigenvektoren $\bar{\phi}_i$ folgt

$$\mathbf{I} \ddot{\bar{\mathbf{q}}} + \mathbf{\Omega}^2 \bar{\mathbf{q}} = \Phi^T \bar{\mathbf{F}}(t) - \Phi^T \mathbf{M} \bar{\mathbf{r}}_s \ddot{\mathbf{w}}_g(t) , \quad (1-26)$$

und man erhält somit das System von N entkoppelten Schwingungsgleichungen, entsprechend von zugeordneten Einmassenschwingern,

$$\ddot{q}_i + \omega_i^2 q_i = f_i(t) - L_i^* \ddot{\mathbf{w}}_g(t) , \quad i = 1, 2, \dots, N . \quad (1-27)$$

Dabei definiert $f_i(t) = \bar{\phi}_i^T \bar{F}(t)$ und $L_i^* = \bar{\phi}_i^T \mathbf{M} \bar{r}_s$ die Kraftkomponente der Erregung der i -ten Schwingungsform und den Partizipationsfaktor der Wegerregung. Die Lösung der Gl. (1-27) zufolge einer allgemeinen Anregung $f_i(t)$ und $L_i^* \ddot{w}_g(t)$ kann im Zeitbereich mit Hilfe des Duhamel'schen Faltungsintegrals gefunden werden, wie z.B. auch in Ziegler⁴ ausgeführt,

$$q_i(t) = \int_0^t [f_i(\tau) - L_i^* \ddot{w}_g(\tau)] h_i(t - \tau) d\tau, \quad h_i(t) = \frac{1}{\omega_i} \sin \omega_i t, \quad (1-28)$$

wobei $h_i(t)$ die ungedämpfte Einheitsimpulsantwort der i -ten Schwingungsgleichung definiert. Im Duhamel'schen Faltungsintegral ist bereits die Lösung zufolge von homogenen Anfangsbedingungen $q_i(0) = 0, \dot{q}_i(0) = 0$ enthalten, (entspricht dem Einschwingen aus der Ruhelage). Für Anfangsbedingungen $q_i(0) \neq 0, \dot{q}_i(0) \neq 0$ ist die freie Schwingung zu überlagern,

$$q_i(t) = q_i(0) \cos \omega_i t + \frac{\dot{q}_i(0)}{\omega_i} \sin \omega_i t + \int_0^t [f_i(\tau) - L_i^* \ddot{w}_g(\tau)] h_i(t - \tau) d\tau. \quad (1-29)$$

Substitution der Lösungen für $q_i(t)$ in Gl. (1-24) liefert schließlich die gesamte Antwort des MDOF-Systems $\bar{w}(t)$ in physikalischen Koordinaten. An dieser Stelle ist noch anzumerken, dass eine Verbesserung der numerischen Ergebnisse von den zu berechnenden Schnittgrößen, durch Berücksichtigung des exakten quasistatischen Anteiles $\bar{w}_s(t) = \mathbf{K}^{-1} \bar{F}_{res}$ erfolgt, wie z.B. Clough und Penzien [2] darlegen. Die Steifigkeitsmatrix \mathbf{K} hat dabei die Dimension $[N \times N]$, wo N die gesamte Anzahl der Freiheitsgrade definiert. Hingegen werden für die dynamische Berechnung nur eine ausgewählte Anzahl, $n \ll N$, von Schwingungsformen $\bar{\phi}_i$ betrachtet, d.h. die Anzahl der Freiheitsgrade wird enorm reduziert. Von den letztlich betrachteten n dynamischen modalen Koordinaten $q_i(t)$, in Gl. (1-24), werden dann die quasistatischen modalen Anteile $q_i^s(t)$, aus Gl. (1-27) abgezogen, und für die gesamte Antwort des MDOF-Systems $\bar{w}(t)$ wird der exakte analytische Ausdruck der quasistatischen Lösung hinzugezählt,

$$\begin{aligned}\bar{w}(t) &= \bar{w}_S(t) + \sum_{i=1}^{n \ll N} [q_i(t) - q_i^S(t)] \bar{\phi}_i, \quad \bar{w}_S = \mathbf{K}^{-1} \left(\bar{F} - \mathbf{M} \bar{r}_S \ddot{w}_g(t) \right), \\ q_i^S &= \omega_i^{-2} \left(f_i(t) - L_i^* \ddot{w}_g(t) \right).\end{aligned}\tag{1-30}$$

Mit Gl. (1-30) sind dann auch Schnittgrößen relativ genau bestimmbar.

1.1.6 Berücksichtigung einer schwachen viskosen Dämpfung

Die Bewegungsgleichung des mehrstöckigen Rahmens, wie in Abb. 1.2 illustriert, ist unter Berücksichtigung schwacher viskoser Dämpfung (ein Modell der Materialdämpfung) durch Gl. (1-3) gegeben,

$$\mathbf{M} \ddot{\bar{w}} + \mathbf{C} \dot{\bar{w}} + \mathbf{K} \bar{w} = \bar{F}(t) - \mathbf{M} \bar{r}_S \ddot{w}_g(t). \tag{1-31}$$

Die modale Projektion der Gl. (1-31) und anschließende Multiplikation mit der transponierten Modalmatrix ϕ^T von links diagonalisiert die Matrizen \mathbf{M} und \mathbf{K} . Im Falle der Dämpfungsmatrix erhält man den folgenden Ausdruck

$$\mathbf{C}^* = \phi^T \mathbf{C} \phi, \quad \mathbf{C}^* = 2 \zeta \mathbf{\Omega}, \quad \mathbf{\Omega} = \begin{pmatrix} \omega_1 & & & \\ & \omega_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \omega_N \end{pmatrix}, \tag{1-32}$$

wo ζ die Matrix der Lehr'schen modalen Dämpfungen definiert und im allgemeinen nicht diagonal ist. Eine nicht diagonale modale Matrix \mathbf{C}^* deutet darauf hin, dass die Schwingungsformen im ungedämpften und gedämpften Fall nicht mehr übereinstimmen. Um die Matrix \mathbf{C}^* trotzdem in Diagonalform zu erhalten erfolgt eine spezielle Annahme der modalen Lehr'schen Dämpfungen, nämlich

$$\zeta = \begin{bmatrix} \zeta_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \zeta_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \zeta_N \end{bmatrix}, \quad \zeta_1 \leq \zeta_2 \leq \cdots \leq \zeta_N < 1, \tag{1-33}$$

wobei der Wert für ζ_i im Verhältnis zur kritischen Dämpfung $\zeta_{kr}=1.00$ mittels Ausschwingversuchen über das logarithmische Dekrement, wie z.B. in Ziegler [4] dargelegt, bestimmt werden kann. Die Orthogonalität der Eigenvektoren bleibt dann auch bezüglich der Matrix C erhalten, d.h. $\bar{\phi}_j^T C \bar{\phi}_i = 2\zeta_i \omega_i \delta_{ij}$ und das System von N entkoppelten Gleichungen entspricht N modal gedämpften Einmassenschwingern,

$$\ddot{q}_i + 2\zeta_i \omega_i \dot{q}_i + \omega_i^2 q_i = f_i(t) - L_i^* \ddot{w}_g(t), \quad i=1, 2, \dots, N. \quad (1-34)$$

Die Lösung für $q_i(t)$ erfolgt wieder mit Hilfe des Duhamel'schen Faltungsintegrals wobei im gedämpften Fall gilt,

$$q_i(t) = \int_0^t [f_i(\tau) - L_i^* \ddot{w}_g(\tau)] h_i(t-\tau) d\tau, \quad h_i(t) = \frac{1}{\omega_{di}} \left(\exp[-\zeta_i \omega_i t] \sin \omega_{di} t \right). \quad (1-35)$$

Dabei definiert $\omega_{di} = \omega_i \sqrt{1-\zeta_i^2}$, $\zeta_i < 1$, die gedämpfte Eigenkreisfrequenz des MDOF-Systems. Für schwache Dämpfungen, $\zeta_i < 0.20$, kann sie näherungsweise gleich der ungedämpften Eigenkreisfrequenz ω_i gesetzt werden. Für die Anfangsbedingungen $q_i(0) \neq 0$, $\dot{q}_i(0) \neq 0$ ist wiederum die Antwort der freien Schwingung zu überlagern,

$$q_i(t) = \exp[-\zeta_i \omega_i t] \left[q_i(0) \cos \omega_{di} t + \frac{\dot{q}_i(0)}{\omega_{di}} \sin \omega_{di} t \right] + \int_0^t [f_i(\tau) - L_i^* \ddot{w}_g(\tau)] h_i(t-\tau) d\tau. \quad (1-36)$$

Substitution der Lösungen der modalen Koordinaten $q_i(t)$ in Gl. (1-24) liefert schließlich die gesamte Antwort $\bar{w}(t)$ der erzwungenen gedämpften Schwingung des MDOF-Systems. Für die numerische Integration der Gl. (1-35) ist

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta, \quad \alpha = \omega_{di} t, \quad \beta = \omega_{di} \tau, \quad (1-37)$$

zu substituieren.

1.2 Dynamische Schwingungstilgung nach Den Hartog

Der in Abb. 1.2 dargestellte mehrstöckige Rahmen wird nun auf einen einzigen Freiheitsgrad reduziert, wie in Abb. 1.3 dargestellt. An das SDOF-Hauptsystem wird ein Sekundärsystem mit Masse m^* , Federsteifigkeit k^* , Dämpfung c^* und zugehöriger Lagekoordinate $u^*(t)$ angekoppelt.

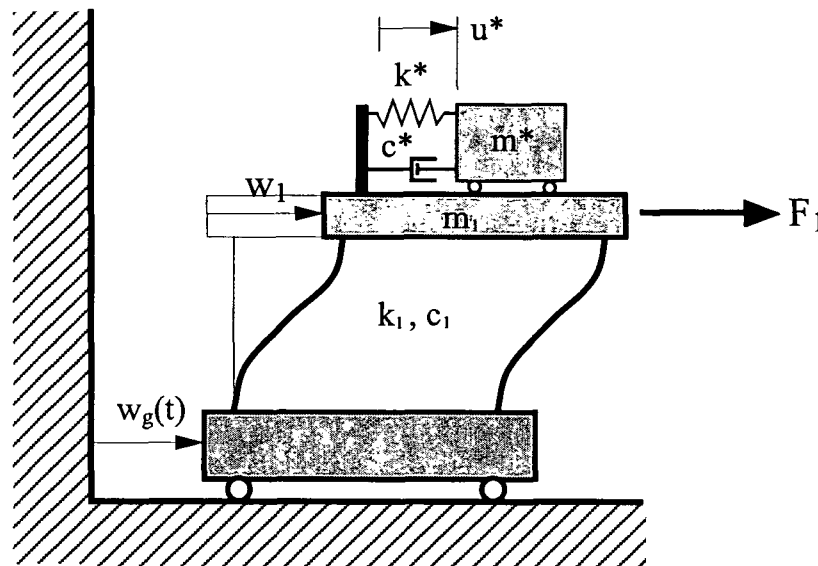


Abb. 1.3: Hauptsystem: Riegelmasse m_1 , lineare Feldsteifigkeit k_1 , viskose Dämpfung c_1 ; dynamischer Schwingungstilger (Sekundärsystem): Masse m^* ; lineare Federsteifigkeit k^* ; viskose Dämpfung c^* ; Einpunkt-Wegerregung des Fundamentes $w_g(t)$; Krafterregung (Windkraft) $F_1(t)$

Die Masse des Sekundärsystems m^* soll dann als dynamischer Schwingungstilger fungieren, d.h. in seiner Federsteifigkeit k^* und Dämpfung c^* so abgestimmt werden, dass die Schwingungsamplituden des Hauptsystems zu einem verbleibenden Minimum reduziert werden. Für die klassische Schwingungstilgung nach Den Hartog [1, Seite 91] wird nun die Einpunkt-Wegerregung $w_g(t)=0$ und die Krafterregung (Windkraft) zeitlich harmonisch mit $F_1(t)=F_0 \sin \nu t$ angenommen. Die Dämpfung des Hauptsystems $\zeta_s = c_1 / 2m_1 \omega_1 \ll 1$ wird als sehr schwach vorausgesetzt und in der folgenden Studie vernachlässigt. Die Bewegungsgleichungen dieses gekoppelten 2-DOF-Systems ergeben sich nach dem Freischneiden der Riegel- und Tilgermasse m_1 und m^* mit Hilfe des Impulssatzes unter Berücksichtigung von $c_1 \approx 0$ zu,

$$\begin{aligned} (m_1 + m^*) \ddot{w}_1 + k_1 w_1 &= F_0 \sin \nu t - m^* \ddot{u}^*, \\ m^* \ddot{u}^* + c^* \dot{u}^* + k^* u^* &= -m^* \ddot{w}_1. \end{aligned} \quad (1-38)$$

Nach Division durch m_1 bzw. m^* und zweckmäßiger Umordnung ergibt sich weiters das nun trägheitsgekoppelte Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} (1 + \mu^*) \ddot{w}_1 + \mu^* \ddot{u}^* + \omega_1^2 w_1 &= \frac{F_0}{m_1} \sin \nu t, \\ \ddot{u}^* + \ddot{w}_1 + 2\zeta^* \omega^* \dot{u}^* + \omega^{*2} u^* &= 0, \end{aligned} \quad (1-39)$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}}, \quad \omega^* = \sqrt{\frac{k^*}{m^*}}, \quad \zeta^* = \frac{c^*}{2\omega^* m^*},$$

wo $\mu^* = m^* / m_1$ das Massenverhältnis von Tilgermasse zu Riegelmasse definiert. Für die erzwungene Schwingung erhält man mit den harmonischen Ansätzen $w_1 = \hat{w}_1 e^{i\nu t}$ und $u^* = \hat{u}^* e^{i\nu t}$, die folgende komplexe partikuläre Lösung der Schwingungsantwort \hat{w}_1 des Hauptsystems im Frequenzbereich

$$\hat{w}_1 = w_{st} \frac{(\alpha^2 - \delta^{*2}) - i2\zeta^* \delta^* \alpha}{[-(\alpha^2 - 1)(\alpha^2 - \delta^{*2}) + \mu^* \alpha^2 \delta^{*2}] + i2\zeta^* \delta^* \alpha [\alpha^2 - 1 + \mu^* \alpha^2]}, \quad (1-40)$$

wo $\alpha = \nu / \omega_1$ das Frequenzverhältnis von Erregerkreisfrequenz zu Eigenkreisfrequenz des Hauptsystems, $\delta^* = \omega^* / \omega_1$ das Verhältnis der Eigenkreisfrequenz des Tilgers zu Eigenkreisfrequenz des Hauptsystems, $w_{st} = F_0 / k_1$ die statische Auslenkung des Hauptsystems und $\zeta^* = c^* / 2m^* \omega^*$ das Lehr'sche Dämpfungsmaß des Tilgers definieren. Die komplexe Amplitude \hat{w}_1 , Gl. (1-40), lässt sich nach Transformation auf die übliche komplexe Form $\hat{w}_1 = w_{st}(a + ib)$, wie in Den Hartog [1, Seite 93] ausgeführt, mit anschließender Berechnung des Betrages $\hat{w}_1 = w_{st} \sqrt{a^2 + b^2}$ in einen reellen Ausdruck überführen. Nach Division durch w_{st} ergibt sich der dimensionslose reelle dynamische Vergrößerungsfaktor zu

$$\chi_d = \frac{\hat{w}_1}{w_{st}} = \sqrt{\frac{(\alpha^2 - \delta^{*2})^2 + (2\zeta^* \delta^* \alpha)^2}{[-(\alpha^2 - 1)(\alpha^2 - \delta^{*2}) + \mu^* \alpha^2 \delta^{*2}]^2 + (2\zeta^* \delta^* \alpha)^2 [\alpha^2 - 1 + \mu^* \alpha^2]^2}} \quad (1-41)$$

In der Abb. 1.4 ist der dynamische Vergrößerungsfaktor χ_d exemplarisch für ein System mit $\mu^* = 5\%$, $\delta^* = \omega^* / \omega_1 = 1.00$ und für verschiedene Werte des Lehr'schen Dämpfungsmaßes ζ^* , in Abhängigkeit von der bezogenen Erregerkreisfrequenz $\alpha = \nu / \omega_1$ dargestellt.

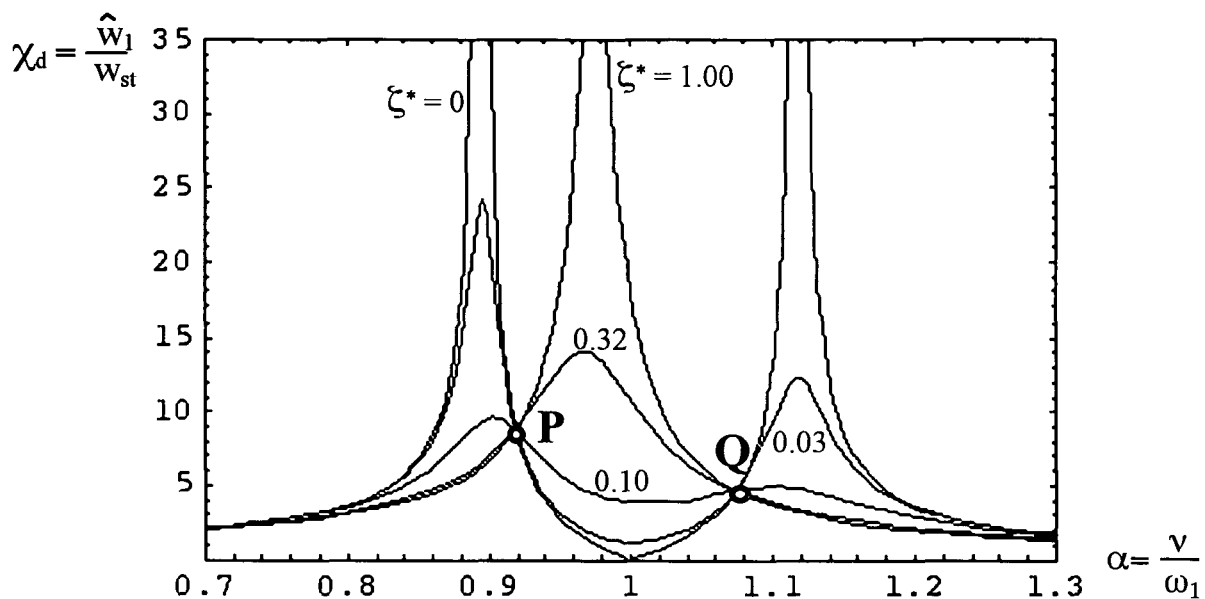


Abb. 1.4: Schwingungsantwort des Hauptsystems in Abhängigkeit von der bezogenen Erregerkreisfrequenz α bei verschiedenen Werten des Lehr'schen Dämpfungsmaßes ζ^* ; Massenverhältnis $\mu^* = 5\%$; Frequenzverhältnis $\delta^* = \omega^* / \omega_1 = 1.00$; Dämpfungsunabhängige Fixpunkte P und Q

Anhand der Abb. 1.4 stellt man eine bemerkenswerte Eigentümlichkeit fest: Unabhängig von der Wahl des Lehr'schen Dämpfungsmaßes ζ^* schneiden sich alle Kurven in den beiden Fixpunkten P und Q . Um nun einen optimalen Wert für den Entwurfparameter $\delta^* = \omega^* / \omega_1$ zu ermitteln, wird in einem ersten Schritt die Lage dieser Fixpunkte auf der bezogenen Frequenzachse α berechnet und anschließend

die Forderung formuliert, dass der Ordinatenwert des dynamischen Vergrößerungsfaktors χ_d für die Fixpunkte P und Q gleich groß sein soll. Auf diese Weise erhält man eine besonders einfache Formel für das optimale Frequenzverhältnis, wie von Den Hartog [1, Seite 97] angegeben,

$$\delta_{opt}^* = \frac{1}{1 + \mu^*} . \quad (1-42)$$

Für einen Schwingungstilger mit sehr geringer Masse, $\mu^* \approx 0$, ergibt sich für eine optimale Abstimmung die Eigenkreisfrequenz des Tilgers ω^* identisch zu jener des Hauptsystems ω_1 . Bei Erhöhung der Tilgermasse auf einen Wert von z.B. $\mu^* = 20\%$ ergibt sich das optimale Frequenzverhältnis zu $\delta_{opt}^* = 5/6$ und daraus die Eigenkreisfrequenz $\omega^* = 5\omega_1/6$, d.h. der Tilger muss demnach ca. 17% langsamer schwingen als das Hauptsystem.

Ein zweiter zu optimierender Entwurfparameter ist das Lehr'sche Dämpfungsmaß ζ^* des Schwingungstilgers. Aus Abb. 1.4 erkennt man, dass die Kurven des dynamischen Vergrößerungsfaktors χ_d in den Fixpunkte P und Q geneigte Tangenten aufweisen. Die Forderung einer horizontalen Tangente in diesen Fixpunkten, d.h. die erste Ableitung der Gl. (1-41) nach dem veränderlichen Parameter $\alpha = \nu / \omega_1$ ist gleich Null zu setzen, führt nach einigen algebraischen Umformungen, wie von Den Hartog [1, Seite 101] ausgeführt, auf

$$\zeta_{opt}^* = \sqrt{\frac{3\mu^*}{8(1 + \mu^*)}} . \quad (1-43)$$

Unter Verwendung dieser optimalen Entwurfparameter $\delta_{opt}^* = \omega^* / \omega_1$ und ζ_{opt}^* für den konventionellen dynamischen Schwingungstilger nach Den Hartog, ergibt sich der in Abb. 1.5 dargestellte optimale Verlauf des dynamischen Vergrößerungsfaktors χ_d in Abhängigkeit von der bezogenen Erregerkreisfrequenz $\alpha = \nu / \omega_1$, wobei das Massenverhältnis wieder mit $\mu^* = 5\%$ gewählt wird.

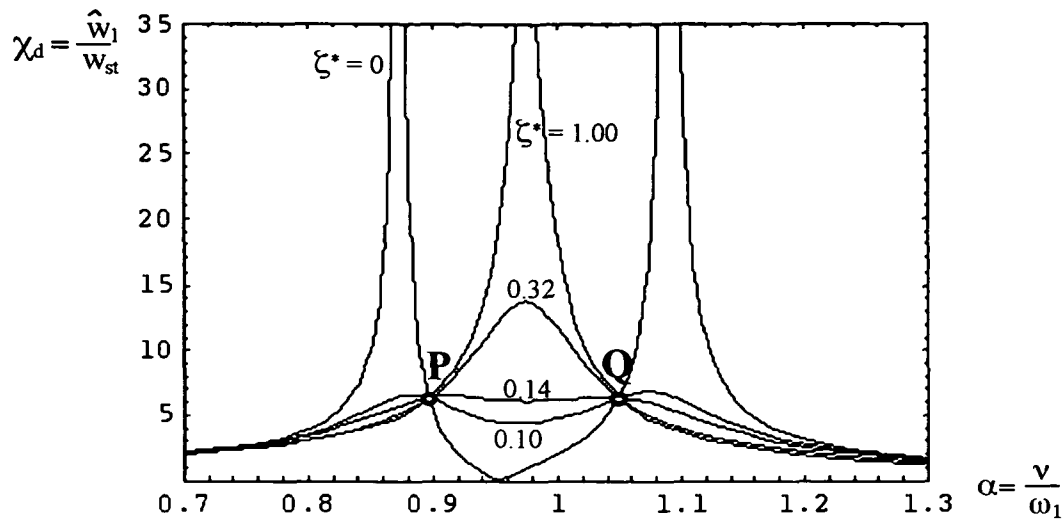


Abb. 1.5: Schwingungsantwort des Hauptsystems in Abhängigkeit von der bezogenen Erregerkreisfrequenz α bei verschiedenen Werten des Lehr'schen Dämpfungsmaßes ζ^* ; Massenverhältnis $\mu^* = 5\%$; Günstigste Abstimmung $\delta_{opt}^* = 0.95$, $\zeta_{opt}^* = 0.14$

Man erkennt deutlich die Eigenschaften der Kurve welche sich aus den optimalen Entwurfparametern $\delta_{opt}^* = 0.95$ und $\zeta_{opt}^* = 0.14$ ergibt: die Fixpunkte P und Q befinden sich auf gleicher Höhe und besitzen eine horizontale Tangente. Die maximalen Antworten des Hauptsystems ergeben sich an den Stellen der Fixpunkte P und Q . Die Größe dieser maximalen Antworten erhält man durch Auswerten der Gl. (1-41) an den dämpfungsunabhängigen Abszissenwerten $\alpha(P)$ und $\alpha(Q)$,

$$\chi_d = \frac{\hat{w}_1}{w_{st}} = \sqrt{1 + \frac{2}{\mu^*}}, \quad (1-44)$$

das bedeutet ein möglichst großes Masseverhältnis anzustreben. Wird die Dämpfung zu groß gewählt $\zeta^* > \zeta_{opt}^*$, z.B. Kurve $\zeta^* = 0.32$ in Abb. 1.5, entsteht zwischen den Fixpunkten eine Schwingungsspitze die den durch optimalen Entwurf des Tilgers erreichten minimalen Wert von χ_d überschreitet. Die beiden Massen m_1 und m^* werden bei zu hohen Dämpfungswerten fest miteinander verkoppelt, d.h. im Verlauf des dynamischen Vergrößerungsfaktors, Abb. 1.5, ist nur noch eine Resonanzspitze sichtbar. Im Falle von $\zeta^* < \zeta_{opt}^*$, z.B. Kurve $\zeta^* = 0.03$ in Abb. 1.4, bleiben zwar zwei Resonanzspitzen erhalten, diese gehen jedoch mit geneigten Tangenten durch die Fixpunkte P und Q und führen teilweise zu einer enormen Verschlechterung

gegenüber dem optimalen Dämpfungsverhalten, extrem für $\zeta^* = 0$. Die beschriebene dynamische Schwingungstilgung wurde von Den Hartog [1] für ein harmonisch, krafterregtes mechanische System, durchgeführt. Für andere Anregungsarten bzw. in Abhängigkeit von der zu optimierenden Systemantwort sind die optimalen Entwurfparameter $\delta_{opt}^* = \omega^* / \omega_1$ und ζ_{opt}^* sowie der maximale dynamische Vergrößerungsfaktor des Hauptsystems χ_d der Tabelle 1.1 zu entnehmen, aus Soong und Dargush [6, Seite 234] und Warburton⁵.

Tabelle 1.1: Optimale Entwurfparameter $\delta_{opt}^* = \omega^* / \omega_1$ und ζ_{opt}^* für einen konventionellen dynamischen Schwingungstilger; maximaler dynamischer Vergrößerungsfaktor χ_d des Hauptsystems; Erregerkreisfrequenz ν ; Unterscheidung nach Art der Anregung und dem zu optimierenden Parameter; Quelle: Soong und Dargush⁶ [Seite 234]

Erregung			Max. dynamischer Vergrößerungsfaktor		Optimale Entwurfparameter	
Fall	Art	Wirkend auf	Optimierte Systemantwort	$\chi_d = \frac{\hat{w}_1}{w_{st}}$	$\delta_{opt}^* = \frac{\omega^*}{\omega_1}$	ζ_{opt}^*
1	Kraft $F_0 e^{i\nu t}$	Hauptsystem	$\frac{k_1 w_1}{F_0}$	$\sqrt{1 + \frac{2}{\mu^*}}$	$\frac{1}{1 + \mu^*}$	$\sqrt{\frac{3\mu^*}{8(1 + \mu^*)}}$
2	Kraft $F_0 e^{i\nu t}$	Hauptsystem	$\frac{m_1 \ddot{w}_1}{F_0}$	$\sqrt{\frac{2}{\mu^*(1 + \mu^*)}}$	$\sqrt{\frac{1}{1 + \mu^*}}$	$\sqrt{\frac{3\mu^*}{8(1 + \mu^*/2)}}$
3	Beschl. $\ddot{w}_g e^{i\nu t}$	Fundament	$\frac{\nu^2 w_1}{\ddot{w}_g}$	$(1 + \mu^*) \sqrt{\frac{2}{\mu^*}}$	$\frac{\sqrt{1 - \mu^*/2}}{1 + \mu^*}$	$\sqrt{\frac{3\mu^*}{8(1 + \mu^*)(1 - \mu^*/2)}}$
4	Beschl. $\ddot{w}_g e^{i\nu t}$	Fundament	$\frac{\ddot{w}_g + \ddot{w}_1}{\ddot{w}_g}$	$\sqrt{1 + \frac{2}{\mu^*}}$	$\frac{1}{1 + \mu^*}$	$\sqrt{\frac{3\mu^*}{8(1 + \mu^*)}}$

An dieser Stelle wird noch angemerkt, dass die in den Abb. 1.5 und Abb. 1.4 erzielte Reduktion des dynamischen Vergrößerungsfaktors χ_d in eine äquivalente Dämpfung des SDOF-Hauptsystems mit Tilger umgerechnet werden kann, wie im Zuge der numerischen Simulationen in Kapitel 6 ausgeführt wird. Der mechanische Tilger aus

Abb. 1.3 wird in der vorliegenden Dissertation durch einen äquivalenten Flüssigkeitstilger ersetzt, die entsprechende Analogie wird in Abb. 3.16 illustriert.

1.3 Zustandsraumdarstellung des MDOF-Systems mit dynamischen Schwingungstilgern

Für den Fall eines SDOF-Hauptsystems ist die entsprechende Zustandsraumdarstellung z.B. in Ziegler⁷ [Seite 345] ausführlich dargelegt. Die Bewegung des in Abb. 1.2 dargestellten MDOF-Systems wird durch N -gekoppelte gewöhnliche Differentialgleichungen 2. Ordnung beschrieben, Gl. (1-3). Nun erweist es sich in vielen Fällen als nützlich, diese Bewegungsgleichungen in ein Differentialgleichungssystem 1. Ordnung zu transformieren. Insbesondere im Hinblick auf die Optimierung der Flüssigkeitstilger über ein Gütekriterium bei einem Hauptsystem mit mehreren schwingungsfähigen Freiheitsgraden ist diese Darstellungsform hilfreich.

Die im vorigen Abschnitt dargelegte Schwingungstilgung nach Den Hartog betrachtet nämlich immer nur das Hauptsystem mit einem einzigen Freiheitsgrad (Deformation w_1). Besitzt das Hauptsystem aber mehrere Freiheitsgrade (Eigenkreisfrequenzen $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N$), kann zwar mit Hilfe der Modalen Analyse, wie in Abschnitt 1.1.5 ausgeführt, eine Entkopplung des linearen Systems herbeigeführt und der konventionelle Schwingungstilger auf diese modale Eigenkreisfrequenz abgestimmt werden, jedoch bleibt die Frage offen, inwieweit benachbarte Eigenkreisfrequenzen Auswirkungen auf das Dämpfungsverhalten haben. Aufgrund dieser Tatsache wird in Kapitel 3, Abschnitt 3.6.2, ein geeignetes Gütekriterium im Zustandsraum für Flüssigkeitstilger vorgestellt, dass eine Minimierung der quadratischen Amplitudenfrequenzgangsfläche erzielt. Insbesondere wird an dieser Stelle darauf hingewiesen, dass die Optimierung nach Den Hartog immer nur einen einzigen Tilger für die zu tilgende Schwingungsform vorsieht. Um die Robustheit der Schwingungstilgung zu erhöhen, sollten jedoch mehrere Schwingungstilger auf nur eine einzige Schwingungsform des Hauptsystems abgestimmt werden. Die Optimierung nach Den Hartog liefert in diesem Fall zwei identische Ausdrücke für die Entwurfparameter der beiden Schwingungstilger. Hingegen erhält man mit der

Zustandsraumoptimierung unterschiedliche Tilgerparameter, wie in Kapitel 6, Abschnitt 6.1, anhand der numerischen Simulation der Millennium Bridge gezeigt wird. Dabei liegen die optimalen Eigenkreisfrequenzen der beiden Tilger jeweils unter- und oberhalb von der zu tilgenden Eigenkreisfrequenz des Hauptsystems (ersichtlich anhand des in Abb. 6.17 dargestellten Amplitudenfrequenzganges). Dem zur Folge kann die optimale Abstimmung mehrerer Flüssigkeitstilger auf nur eine Eigenfrequenz der Brücke als äußerst robust eingestuft werden. Eine im Zuge der Nutzungsdauer der Brücke nachträgliche Änderung der Systemparameter (Masse, Steifigkeit) wird somit teilweise kompensiert.

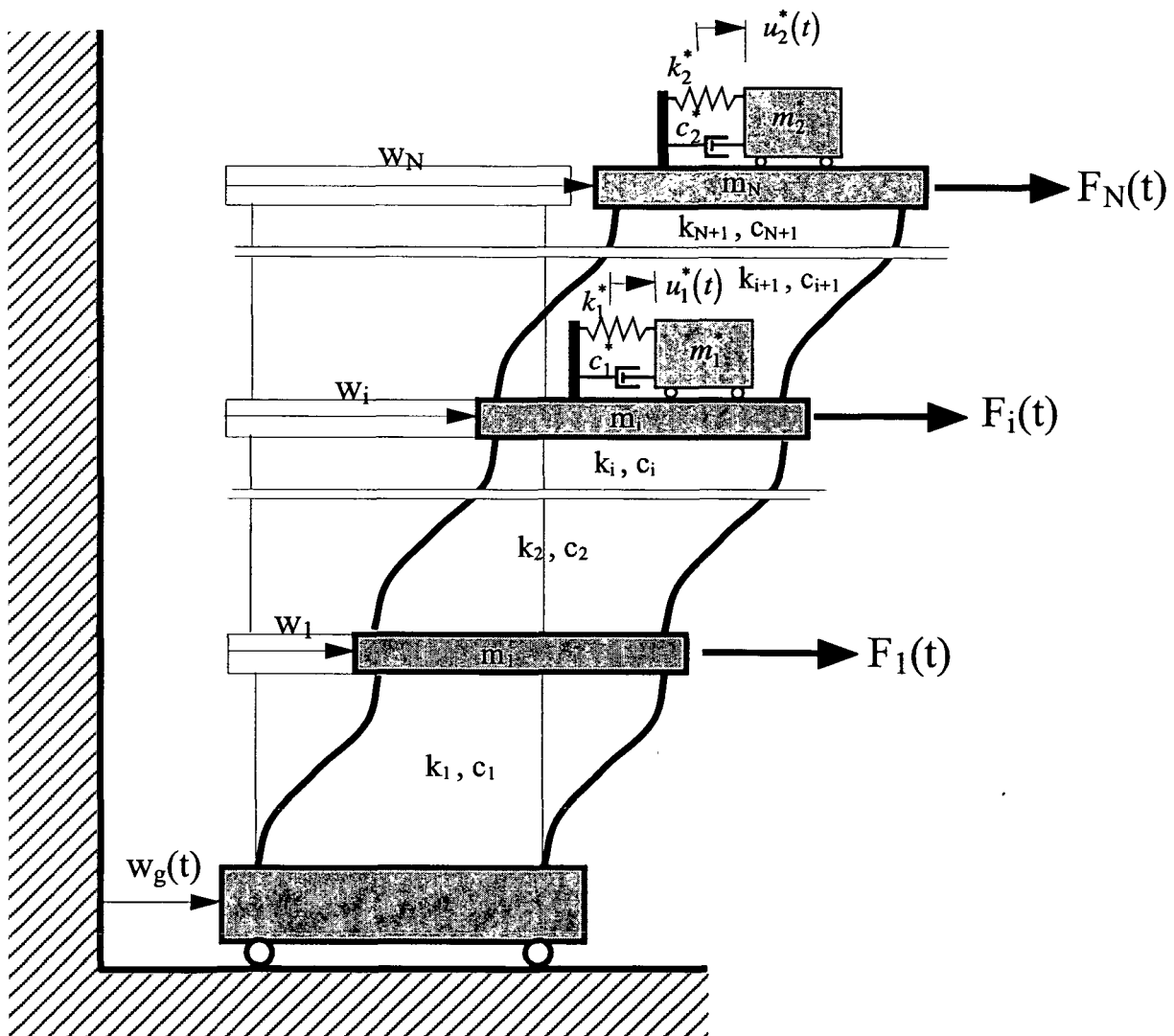


Abb. 1.6: Ebener mehrstöckiger Rahmen mit linear elastischen Stielen (Schubbalken); Feldsteifigkeiten k_1, \dots, k_N ; Einpunkt-Wegerregung des Fundamentes $w_g(t)$; Kräfteerregung (Windkräfte) $F_i(t)$; dynamische Schwingungstilger auf den starren Riegelmassen m_i und m_N

Als grundlegendes Beispiel der Zustandsraumdarstellung wird in diesem Abschnitt, der in Abb. 1.6 illustrierte MDOF-Schwinger (Schubbalken) mit insgesamt zwei dynamischen Schwingungstilgern, auf den Rieгельmassen m_i und m_N gewählt. Die Bewegungsgleichungen des in Abb. 1.6 dargestellten, gekoppelten MDOF-Systems, ergeben sich wieder nach Freischneiden der Rieгель- und Tilgermassen m_1, m_2, \dots, m_N und m_1^*, m_2^* mit Hilfe des Impulssatzes, wie z.B. auch von Hochrainer⁸ [Seite 103] angegeben,

$$\begin{aligned} \mathbf{M} \ddot{\bar{\mathbf{w}}} + \mathbf{C} \dot{\bar{\mathbf{w}}} + \mathbf{K} \bar{\mathbf{w}} &= -\mathbf{M} \bar{\mathbf{r}}_S \ddot{\mathbf{w}}_g + \bar{\mathbf{F}}(t) - \mathbf{L} \bar{\mathbf{F}}_x, & \bar{\mathbf{F}}_x &= \mathbf{M}^* (\bar{\mathbf{i}} \ddot{\mathbf{w}}_g + \mathbf{L}^T \ddot{\bar{\mathbf{w}}} + \ddot{\bar{\mathbf{u}}}^*), \\ \ddot{\bar{\mathbf{u}}}^* + \mathbf{C}^* \dot{\bar{\mathbf{u}}}^* + \mathbf{K}^* \bar{\mathbf{u}}^* &= -(\bar{\mathbf{i}} \ddot{\mathbf{w}}_g + \mathbf{L}^T \ddot{\bar{\mathbf{w}}}), & \bar{\mathbf{i}} &= [1 \quad 1 \quad 1 \quad \dots \quad 1]^T, \end{aligned} \quad (1-45)$$

wo \mathbf{M}^* , \mathbf{C}^* und \mathbf{K}^* die Massenmatrix, Dämpfungsmatrix und Steifigkeitsmatrix der dynamischen Schwingungstilger definieren. Unter der vorerst allgemeinen Annahme von insgesamt n Schwingungstilgern sind diese Matrizen wie folgt definiert,

$$\mathbf{M}^* = \text{diag}[m_1^*, \dots, m_n^*], \quad \mathbf{C}^* = \text{diag}[2\zeta_1^* \omega_1^*, \dots, 2\zeta_n^* \omega_n^*], \quad \mathbf{K}^* = \text{diag}[\omega_1^{*2}, \dots, \omega_n^{*2}]. \quad (1-46)$$

Für die, in der Abb. 1.6 illustrierten, Schwingungstilger auf den starren Rieгельmassen m_i und m_N , somit

$$\mathbf{M}^* = \text{diag}[m_1^*, m_2^*], \quad \mathbf{C}^* = \text{diag}[2\zeta_1^* \omega_1^*, 2\zeta_2^* \omega_2^*], \quad \mathbf{K}^* = \text{diag}[\omega_1^{*2}, \omega_2^{*2}]. \quad (1-47)$$

In Gl. (1-45) bezeichnen $\bar{\mathbf{F}}_x$ und \mathbf{L} die aus der Dynamik des Schwingungstilgers resultierende Reaktionskraft und die sogenannte Positionsmatrix mit der Dimension $[N \times n]$, wo n die Anzahl der installierten Schwingungstilger definiert (in unserem Fall ist $n=2$),

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \leftarrow \text{Freiheitsgrad der getilgt wird, } w_i \quad (1-48)$$

↑

Flüssigkeitstilger der auf den jeweiligen Freiheitsgrad einwirkt, u_i^* .

Die beiden Differentialgleichungssysteme 2. Ordnung, Gl. (1-45), werden nun in eine gekoppelte Matrizengleichung der folgenden Form umgeschrieben,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} + \mathbf{L}\mathbf{M}^*\mathbf{L}^T & \mathbf{L}\mathbf{M}^* \\ \mathbf{L}^T & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\bar{\mathbf{w}}} \\ \ddot{\bar{\mathbf{u}}}^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\bar{\mathbf{w}}} \\ \dot{\bar{\mathbf{u}}}^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{w}} \\ \bar{\mathbf{u}}^* \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{M}\bar{\mathbf{r}}_S + \mathbf{L}\mathbf{M}^*\bar{\mathbf{i}} \\ \bar{\mathbf{i}} \end{bmatrix} \ddot{\mathbf{w}}_g + \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{F}}(t) \\ \bar{\mathbf{0}} \end{bmatrix}, \quad (1-49)$$

woraus nach Definition der gekoppelten Massenmatrix des Gesamtsystems,

$$\mathbf{M}_S = \begin{bmatrix} \mathbf{M} + \mathbf{L}\mathbf{M}^*\mathbf{L}^T & \mathbf{L}\mathbf{M}^* \\ \mathbf{L}^T & \mathbf{I} \end{bmatrix}, \quad (1-50)$$

explizite Ausdrücke für die N bzw. n -dimensionalen Beschleunigungsvektoren des Hauptsystems $\ddot{\bar{\mathbf{w}}}$ bzw. der Flüssigkeitstilger $\ddot{\bar{\mathbf{u}}}^*$ folgen,

$$\begin{bmatrix} \ddot{\bar{\mathbf{w}}} \\ \ddot{\bar{\mathbf{u}}}^* \end{bmatrix} = -\mathbf{M}_S^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\bar{\mathbf{w}}} \\ \dot{\bar{\mathbf{u}}}^* \end{bmatrix} - \mathbf{M}_S^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{w}} \\ \bar{\mathbf{u}}^* \end{bmatrix} - \mathbf{M}_S^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{M}\bar{\mathbf{r}}_S + \mathbf{L}\mathbf{M}^*\bar{\mathbf{i}} \\ \bar{\mathbf{i}} \end{bmatrix} \ddot{\mathbf{w}}_g + \mathbf{M}_S^{-1} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{F}}(t) \\ \bar{\mathbf{0}} \end{bmatrix}. \quad (1-51)$$

Die Gl. (1-51) wird nun durch Einführen des Zustandsvektors $\bar{\mathbf{z}} = [\bar{\mathbf{w}}^T \ \bar{\mathbf{u}}^{*T} \ \dot{\bar{\mathbf{w}}}^T \ \dot{\bar{\mathbf{u}}}^{*T}]^T$ bzw. dessen zeitlicher Ableitung $\dot{\bar{\mathbf{z}}}$ in ein Differentialgleichungssystem 1. Ordnung transformiert,

$$\dot{\bar{\mathbf{z}}} = (\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{R}) \bar{\mathbf{z}} - \bar{\mathbf{e}}_g \ddot{\mathbf{w}}_g + \bar{\mathbf{b}}(t), \quad \bar{\mathbf{b}} = \mathbf{E}_F \bar{\mathbf{F}}(t), \quad (1-52)$$

wobei die Hypermatrizen wie folgt definiert sind,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}_S^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} & -\mathbf{M}_S^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \end{bmatrix}, & \mathbf{B} &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}_S^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix} & -\mathbf{M}_S^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix} \end{bmatrix}, \\
 \mathbf{R} &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}^* & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{C}^* \end{bmatrix}, & \bar{\mathbf{e}}_g &= \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{0}} \\ \bar{\mathbf{0}} \\ \mathbf{M}_S^{-1} \left(\mathbf{M} \bar{\mathbf{r}}_S + \mathbf{L} \mathbf{M}^* \bar{\mathbf{i}} \right) \\ \bar{\mathbf{i}} \end{bmatrix}, & \mathbf{E}_F &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{M}_S^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \end{bmatrix}.
 \end{aligned} \tag{1-53}$$

Die Aufspaltung der Systemmatrix in $\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{R}$ hat den Vorteil, dass in \mathbf{A} nur die bekannten Systemparameter des mehrstöckigen Rahmens (Hauptsystem) und in $\mathbf{B}\mathbf{R}$ die Unbekannten, noch zu optimierenden, Entwurfparameter ω_n^* und ζ_n^* enthalten sind. Das entsprechende Gütekriterium im Zustandsraum wird in Kapitel 3, Abschnitt 3.6.2 anhand eines Flüssigkeitstilgers dargelegt.

LITERATUR

¹ Den Hartog, J.P., 1936, 'Mechanische Schwingungen', Verlag von Julius Springer, Berlin.

² Clough, R.W., Penzien, J., 1975, 'Dynamic of Structures', McGraw-Hill Book Company.

³ Shabana, A.A., 1997, 'Vibration of Discrete and Continuous Systems', Second Edition, Springer – Verlag New York, Inc.

⁴ Ziegler, F., 1979, 'Skriptum zur Vorlesung Baudynamik (Bebenerregung)', erhältlich am Institut für Allgemeine Mechanik (E201), TU-Wien, A-1040 Wien.

⁵ Warburton, G.B., Ayorinde, E.O., 1980, 'Optimum Absorber Parameters for Simple Systems', Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 8, p. 197 – 217.

⁶ Soong, T.T., Dargush, G.F., 1997, 'Passive Energy Dissipation Systems in Structural Engineering', John Wiley&Sons.

⁷ Ziegler, F., 1998, 'Technische Mechanik der festen und flüssigen Körper', Dritte, verbesserte Auflage, Springer Wien New York.

⁸ Hochrainer, M.J., 2001, 'Control of vibrations of civil engineering structures with special emphasis on tall buildings', Dissertation, Vienna University of Technology, ausgeführt am Institut für Allgemeine Mechanik (E201), TU-Wien, A-1040 Wien.

2. GESCHICHTLICHE ENTWICKLUNG - PASSIVE SCHWINGUNGSTILGUNGSSYSTEME BEI BRÜCKENBAUWERKEN

In diesem zweiten Kapitel wird ein kurzer Abriss der geschichtlichen Entwicklung des Flüssigkeitstilgers vorgestellt und dessen Einzug in die Anwendung der Tilgung von Bauwerks- und Brückenschwingungen näher erläutert. Die Idee und zugehörige Anwendungsart des Flüssigkeitstilgers wird zuerst vorgestellt. Die wichtigsten der bisher erschienen Arbeiten auf dem Gebiet der Flüssigkeitstilger und deren Einsatz in Baukonstruktionen werden kurz diskutiert. In einem zweiten Abschnitt dieses Kapitels werden derzeit bekannte passive Schwingungstilgungssysteme von Brückenbauwerken vorgestellt und in ihrer Wirkungsweise erläutert.

2.1 Geschichtliche Entwicklung des Flüssigkeitstilgers – Anwendung im Schiffbau und in der Satellitentechnik

Am Beginn der Dämpfungstechnik unter Verwendung des Mediums Flüssigkeit steht der von Frahm¹ entwickelte und erprobte Schlingertank aus dem Jahre 1902, wie in Abb. 2.1 illustriert. In bewegter See treffen die Wellen das Schiff mehr oder weniger periodisch, d.h. obwohl der Seegang in Wirklichkeit eine ziemlich komplizierte Erscheinung ist, kann das zur Rollbewegung anfachende Drehmoment durch eine dominierende harmonische Funktion angenähert werden, wie auch von Den Hartog² erläutert wird. Wenn nun die Wellenfrequenz nahe bei der Eigenfrequenz der Schiffsrollbewegung liegt, können die Schiffsschwingungen sehr erheblich werden. In bewegter See sind Rollwinkel bis zu $\pi/10$ ($\approx 20^\circ$) beobachtet worden. Frahm entwickelte daraufhin im Jahre 1902 einen im Querschnitt veränderlichen U-förmigen Tank, wodurch sich die Schwingungszahl des Schlingertanks der Schwingungsperiode des Schiffes anpassen lässt. Dieser Tank erstreckt sich, in der Form eines rechteckigen Behälters, über $2/3$ der Schiffslänge und ist durch senkrechte Wände in drei oder mehr Abteilungen unterteilt, von denen jede einen zugehörigen rohrförmigen Luftkanal mit Drosselventil aufweist. Die Dämpfung der Flüssigkeitsschwingung wird bei dieser Bauart weniger vom strömenden Tankwasser als vielmehr durch die Luftreibung im Drosselventil hervorgerufen.

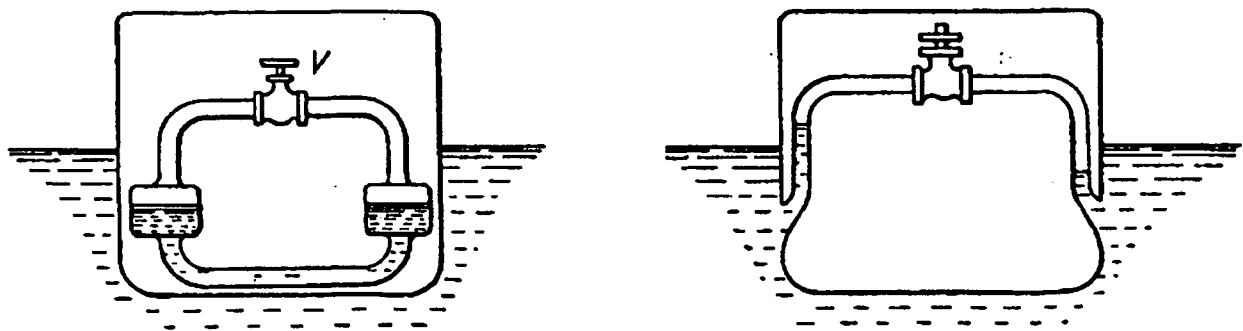


Abb. 2.1: Alte Bauart des Frahm-Tanks aus dem Jahre 1902; Moderne Bauart; Quelle: Den Hartog [2, Seite 107]

Wie aus der Originalveröffentlichung hervorgeht, dachte Frahm an die Wirkung eines Tilgers um die Rollbewegung des Schiffes bei Resonanz mit den auflaufenden

Wellen aufzuheben. Erst später wurde von Hahnkamm³ das Problem der erzwungenen, trägheits- und reibungsgekoppelten Schwingungen von Schiff und Schlingertank umfassend theoretisch und experimentell abgesichert. Es ist weiters anzumerken, dass es bereits vor Frahm einschlägige Überlegungen gab durch einen Schlingertank die Rollbewegungen von Schiffen zu reduzieren, diese werden z.B. von Petersen⁴ dargelegt. Sie scheiterten jedoch an dem Vorurteil der Seeoffiziere, freies Wasser absichtlich in das Schiff einzulassen. Es war der Verdienst von Frahm, diese Vorbehalte durch Versuche und theoretische Studien entkräftet zu haben. Danach wurde der Frahm-Tank mit befriedigender Wirkung z.B. auf den Passagierdampfern „Bremen“ und „Europa“ eingebaut, deren Schiffrollbewegung sich durch die Tanks um ca. $2/3$ vermindern ließ.

Die Arbeit von Frahm war für lange Zeit die einzige Anwendung von flüssigkeitsgefüllten Behältern zur Schwingungstilgung. Erst die rasche Entwicklung der Raumfahrt und Satellitentechnik in den 60' er Jahren des 20. Jahrhunderts führte auf ein weiteres Einsatzgebiet dieser Tilgerart. Um nämlich die Rollbewegung von Satelliten in der Erdumlaufbahn, hervorgerufen durch die Zentripetalbeschleunigung, wirkend auf einen in der Masse und Steifigkeit unsymmetrischen Körper, auf ein erträgliches Maß einzuschränken und dadurch mögliche Schäden an Geräten und Einbauteilen zu vermeiden, wurde ein ringförmiger Flüssigkeitstilger von Carrier und Miles⁵ vorgeschlagen, Abb. 2.2.

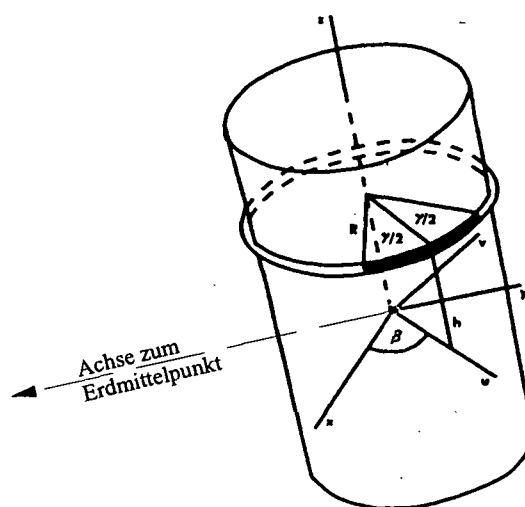


Abb. 2.2: Prinzipskizze eines Satelliten; ringförmige Anordnung eines Flüssigkeitstilgers zur Reduzierung der unerwünschten Rollbewegungen; Quelle: Alfriend [6]

Weiterführende Studien in diese Richtung wurden in den darauf folgenden Jahren in einer intensiven Weise von Alfriend⁶ durchgeführt. Ein weiterer der NASA zugehöriger Wissenschaftler, nämlich Abramson⁷, veröffentlichte im Jahre 1966 eine umfassende Arbeit über das Verhalten von Flüssigkeiten in einem dynamisch erregten starren Behälter. Grund für diese Untersuchung war die Problematik des Startvorganges eines Raumfahrzeuges, wo die mit flüssigem Treibstoff gefüllten Tanks großen dynamischen Kräften ausgesetzt sind.

An dieser Stelle sei noch erwähnt, dass Watanabe⁸ im Jahre 1969 den Flüssigkeitstilger nach Frahm für die Reduzierung der Rollbewegung von Unterseebooten vorgeschlagen und untersucht hat. Außerdem wird von Hagedorn⁹ im Jahre 1987 ein Flüssigkeitstilger, mit unterschiedlichen Querschnittsflächen in den horizontalen und geneigten Rohrabschnitten, zur Reduzierung der Schwingungsantwort von Freileitungen zufolge Winderregung vorgeschlagen. Hagedorn zeigt sowohl numerisch als auch experimentell, dass mit Hilfe des installierten Flüssigkeitstilgers eine enorme Steigerung der Energiedissipation erreicht wird.

2.2 Anwendung von Flüssigkeitstilgern in Hochbaukonstruktionen

Der Einsatz von Flüssigkeitstilgern zur Reduzierung von Bauwerksschwingungen wurde von Brunner¹⁰ im Jahre 1964 vorgeschlagen. Dabei handelt es sich um einen hydraulischen Schwingungstilger der bei schwingungsanfälligen hohen Stahlkaminen mehrfach eingesetzt wurde, wie in Abb. 2.3 dargestellt. Der Dämpfer besteht aus einem mit viskoser Flüssigkeit (Öl) gefüllten, kreisrunden offenen Behälter. In dem Behälter liegen horizontal angeordnete, perforierte Platten über welche die erforderliche Dämpfung (Energiedissipation) beim „Schwappen“ der Flüssigkeit induziert wird.

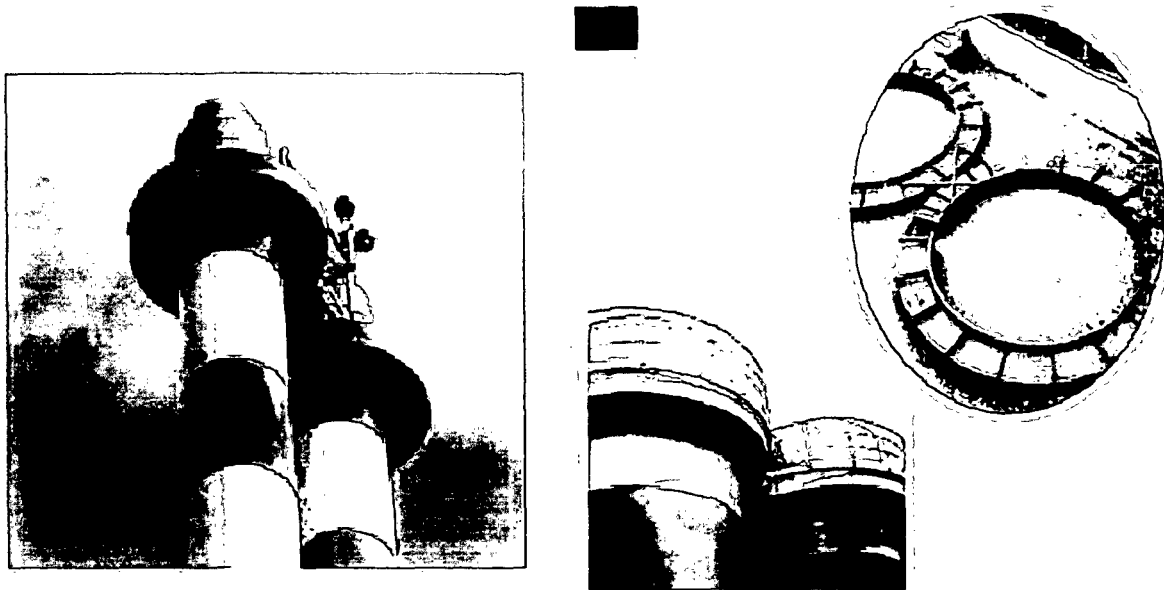


Abb. 2.3: Einsatz eines Flüssigkeitstilgers für schwingungsanfällige hohe Stahlkamine nach Brunner [10]; Quelle: Yalla¹¹

Anmerkung: Um in der Folge Verwechslungen in der Art des Flüssigkeitstilgers zu vermeiden, wird im Zuge dieses Kapitels auf die im englischen übliche Bezeichnung des Flüssigkeitstilgers übergegangen: Tuned Liquid Damper (TLD) für einen flüssigkeitsgefüllten starren Behälter mit freier Flüssigkeitsoberfläche, wie z.B. von Brunner [10] vorgeschlagen, und Tuned Liquid Column Damper (TLCD) für ein teilweise mit Flüssigkeit gefülltes Rohrleitungssystem wie es im Zuge der Dissertation untersucht wird.

Die Arbeit von Brunner [10] war eher praktischer Natur und wurde von Bauer¹² im Jahre 1984 in theoretischer Hinsicht verbessert. Ab dem Jahre 1987 entfachte in Japan eine regelrechte Flut an intensiven Forschungen und Weiterentwicklungen des TLD für den Einsatz zur Schwingungstilgung von Baukonstruktionen, z.B. von Fujino et al.¹³, Fujii et al.¹⁴, Sun et al.¹⁵ oder Kubo et al.¹⁶. Weitere Untersuchungen auf dem Gebiet des TLD finden sich außerhalb Japans z.B. von Kareem und Sun¹⁷, Modi und Welt¹⁸, Lou et al.¹⁹ oder Yalla²⁰. Eine sehr ausführliche Darstellung jüngster Entwicklungen auf dem Gebiet des TLD findet sich in Ibrahim²¹ et al.. Der Flüssigkeitstilger vom Typ TLD wurde bereits in einer Vielzahl von schwingungsanfälligen Bauwerken erfolgreich eingebaut. Eine Liste der bis zum

Jahre 1995 in Gebäuden installierten TLDs findet sich in Holmes²². Als exemplarisches Beispiel ist in der Abb. 2.4 das in Japan errichtete, 150m hohe Shin Yokohama Prince Hotel dargestellt, Tamura et al. [23]. Zuzufolge unangenehmer windinduzierter Bauwerksschwingungen wurden insgesamt 30 starre, zylindrische, mit Flüssigkeit gefüllte Behälter (Höhe=2.00m, Durchmesser=1.00m) als TLDs im obersten Geschoß des Gebäudes untergebracht.

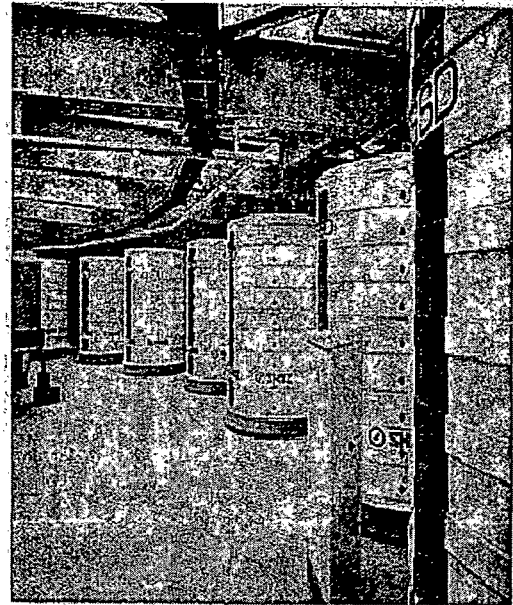
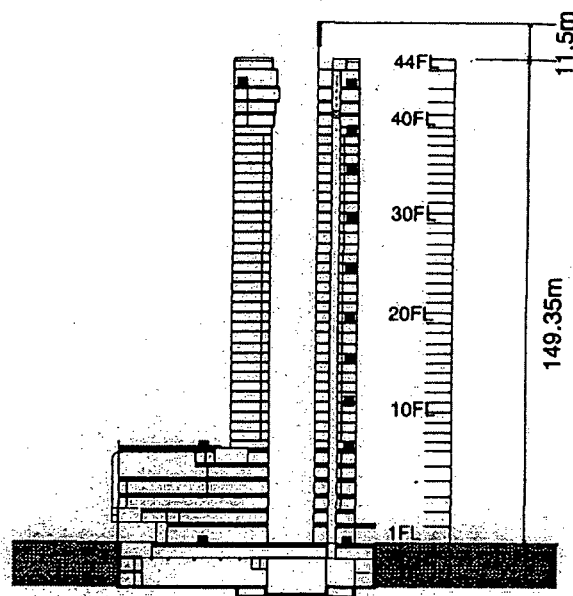


Abb. 2.4: Installation von 30 TLDs zur Reduzierung windinduzierter Schwingungen auf der Spitze des Shin Yokohama Prince Hotels in Japan, Quelle: Tamura et al.²³

Die Energiedissipation erfolgt bei TLDs einerseits durch Flüssigkeitsreibung und andererseits durch Wellenbruchphänomene beim „Schwappen“. Letztere sind sehr stark energieverzehrend (ähnlich einer Brandungswelle) und führen bei TLDs sehr oft zu einer unerwünschten Überhöhung des optimalen Dämpfungskoeffizienten, der in Kapitel 1, Abschnitt 1.2 diskutiert wurde. Eine Abstimmung kann nun auf eine dominierende Frequenz des Hauptsystems erfolgen. Benachbarte Frequenzen stören unter Umständen das „Schwappen“.

Beinahe zeitgleich mit der Entwicklung des TLD wurde von Sakai et al.²⁴ im Jahre 1989 ein neuartiger Flüssigkeitstilger, der sogenannte TLCD, zur Reduzierung von Bauwerksschwingungen vorgeschlagen. Die Vorteile des TLCD gegenüber anderen Tilgersystemen sind:

- 1) Einfache Unterbringung (auch nachträglich) in Gebäuden
- 2) Beliebige Form des ebenen Rohrleitungssystems (U- oder V-förmig)
- 3) Sehr geringe Herstellungs- und Installationskosten
- 4) Nahezu wartungsfrei
- 5) Der TLCD kann als Rahmenkonstruktion (tragendes Element) in ein Gebäude integriert werden
- 6) Unempfindlich gegenüber anderen Eigenfrequenzen (bei TLDs können Oberflächenwellen höherer Frequenz entstehen)
- 7) Der TLCD kann über eine Transformation, wie von Hochrainer [38, Seite 97] und in Kapitel 3, Abschnitt 3.3.1, ausgeführt, in einen analogen konventionellen dynamischen Schwingungstilger übergeführt werden, (dadurch wird eine Abstimmung der Entwurfparameter δ_{opt}^* und ζ_{opt}^* nach Den Hartog, Kapitel 1, Abschnitt 1.2 möglich)
- 8) Einfache Abstimmung der Eigenfrequenz (Hinzufügen bzw. Wegnahme von Flüssigkeitsmasse) und des linearen Dämpfungskoeffizienten (durch Verändern des Blendendurchmessers, wie in Kapitel 3, Abschnitt 3.2.2 dargelegt)
- 9) Verwendung des im Gebäude gespeicherten Wassers zum Löschen von Brandherden bzw. in Krisenzeiten als Trinkwasser
- 10) Relativ einfache Möglichkeit der aktiven Regelung des TLCD zur Reduzierung transienter Schwingungsspitzen, wie z.B. von Hochrainer [38, Seite 146] untersucht wurde, ATLCD
- 11) Verwenden des TLCD als Erregerelement zur dynamischen in situ Analyse eines Bauwerks

Aufgrund der genannten Vorteile entfachte in den darauf folgenden Jahren ein reges Forschungsinteresse auf dem Gebiet der Schwingungstilgung mittels TLCDs, resultierend in einer großen Anzahl von Publikationen. Die wichtigsten dieser Arbeiten werden nachstehend kurz diskutiert.

Balendra et al.²⁵ (*Effectiveness of tuned liquid column dampers for vibration control of towers*, 1995) untersucht den Einsatz von TLCDs für schlanke Hochhäuser zur Reduzierung windinduzierter Schwingungen. Aus einer Parameterstudie werden

optimale Entwurfparameter für den TLCD ermittelt die zu einer maximalen Reduktion der Schwingungsamplituden des Gebäudes führen. In einer späteren Arbeit von Balendra et al.²⁶ (*Vibration control of various types of buildings using TLCD, 1999*) zeigt dieser die dämpfende Wirkung des Flüssigkeitstilgers in Abhängigkeit von der Modellierung der Gebäudestruktur, (Massen und Steifigkeitssprünge im Verlauf der Höhe des Gebäudes, Gebäude mit biegeweichem Erdgeschoß, kontinuierliche und diskrete Verteilung der Massen, usw.). Um gewisse Nachteile des passiven Tilgersystems zu kompensieren untersuchte Balendra et al.²⁷ (*Control of wind-excited towers by active tuned liquid column damper, 2001*) auch einen aktiv geregelten TLCD zur Reduzierung der Schwingungsantwort eines Hochhauses zufolge Windanregung.

In einer Publikation von Gao et al.²⁸ (*Optimization of tuned liquid column dampers, 1997*) werden zufolge einer harmonischen Kraftanregung optimale Parameter für den TLCD, mit unterschiedlichen Querschnittsflächen in den horizontalen und geneigten Rohrabschnitten, numerisch errechnet. Es wird gezeigt, dass durch entsprechende Wahl der Querschnittsflächen im horizontalen und geneigten Rohrabschnitt die effektive Länge und damit auch die Eigenfrequenz des TLCDs beeinflusst werden kann. Weiters wird ein V-förmiger TLCD vorgeschlagen, der sich bei großen Schwingungsamplituden der freien Flüssigkeitsoberfläche als sehr vorteilhaft herausstellt, Abb. 2.5.

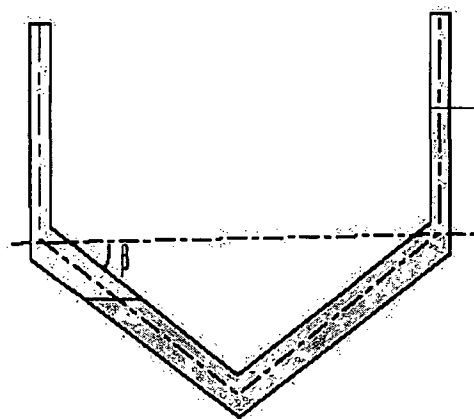


Abb. 2.5: V-förmiger TLCD für den Einsatz bei großen Schwingungsamplituden, Quelle: Gao et al. [28]

Werden nämlich bei einem U-förmigen TLCD die Schwingungsamplituden zu groß (d.h. die freie Flüssigkeitsoberfläche tritt in den horizontalen Rohrabschnitt), verliert

die Flüssigkeitssäule ihre U-förmige Gestalt woraus sich eine drastische Veränderung des physikalischen Verhaltens ergibt, d.h. das gewählte mechanische Modell verliert seine Gültigkeit.

Sehr interessant sind auch die Untersuchungen von Hitchcock et al.²⁹ (*Characteristics of liquid column vibration absorbers (LCVA)-I*, 1997), der wiederum den TLCD verallgemeinert indem er die Querschnittsflächen im horizontalen und im geneigten Rohrabschnitt variabel ausführt, (daraus resultiert auch die Bezeichnung LCVA). In dieser ersten Publikation untersucht Hitchcock et al. [29] einen sogenannten „unidirectional“ LCVA. Es werden sowohl freie als auch erzwungene Schwingversuche mit unterschiedlichen Querschnittsverhältnissen, Variation der horizontalen Länge der Flüssigkeitssäule und mit verschiedenen Viskositäten des flüssigen Mediums durchgeführt. Die experimentellen Ergebnisse werden mit jenen aus der numerischen Analyse verglichen, wobei sich eine gute Übereinstimmung ergibt. In einer zweiten Publikation wird von Hitchcock et al.³⁰ (*Characteristics of liquid column vibration absorbers (LCVA)-II*, 1997) ein sogenannter „bidirectional“ LCVA vorgeschlagen. Dieser wird analog zum „unidirectional“ LCVA sowohl numerisch als auch experimentell untersucht. Die Anregung erfolgt dabei harmonisch in zwei zueinander senkrechten Richtungen. Es zeigt sich, dass bei einem Masseverhältnis von 3% (=Masse des Tilgers zur bewegten Gebäudemasse) und einem Frequenzverhältnis von $\delta = 0.98$ die größtmögliche Tilgerwirkung erzielt wird. Chang und Hsu³¹ (*Control performance of liquid column vibration absorber*, 1998) untersuchen einen LCVA zufolge Windanregung und ermitteln optimale Parameter um eine bestmögliche Tilgerwirkung zu erzielen. Aus der Arbeit geht hervor, dass sich die Tilgerwirkung bei Vergrößerung des horizontalen Rohrquerschnittes wesentlich verbessert.

In einer Arbeit von Won et al.³² (*Performance Assessment Of Tuned Liquid Column Dampers Under Random Seismic Loading*, 1997) wird das Dämpfungsverhalten eines TLCD unter verschiedenen seismischen Anregungen umfassend studiert. Es erfolgt eine Sensibilitätsuntersuchung der folgenden Parameter: Masseverhältnis, Dämpfungskoeffizient des TLCD, Frequenzverhältnis von Tilger zu Hauptsystem und Dauer des Erdbebens.

Die Ermittlung der Entwurfparameter für die optimale Abstimmung eines single-tuned-liquid-column-damper (STLCD) und multiple-tuned-liquid-column-damper (MTLCD) zufolge Erdbebenanregung für ein SDOF-Hauptsystem, wird von Sadek et al.³³ (*Single- And Multiple-Tuned Liquid Column Dampers For Seismic Applications*, 1998) dargelegt. Mit Hilfe der numerisch errechneten Parameter wird eine Reduzierung der Schwingungsantwort des Hauptsystems (Verschiebung und Beschleunigung) von bis zu 47% erreicht. In der sehr ausführlichen Studie wird außerdem gezeigt, dass die Dämpfungswirkung unter Verwendung eines MTLCD nicht unbedingt effektiver als jene des STLCD sein muss. Die Sensibilität der optimalen Entwurfparameter, verknüpft mit ungenauen Gebäudeparametern (Eigenkreisfrequenzen und Gebäudemassen) ist bei STLCD jedoch größer. Diese Tatsache wird auch in Kapitel 6, Abschnitt 6.1, näher erläutert und bestätigt.

Yalla et al.³⁴ (*Semi-active tuned liquid column dampers for vibration control of structures*, 2001) untersucht eine semi-aktive pneumatische Regelungsmethode für TLCDs, wie in Abb. 2.6 illustriert. In Abhängigkeit vom gemessenen Erregersignal wird der Blendendurchmesser des TLCD über Aktoren so verändert, dass sich ein optimaler Dämpfungskoeffizient ζ_A einstellt.

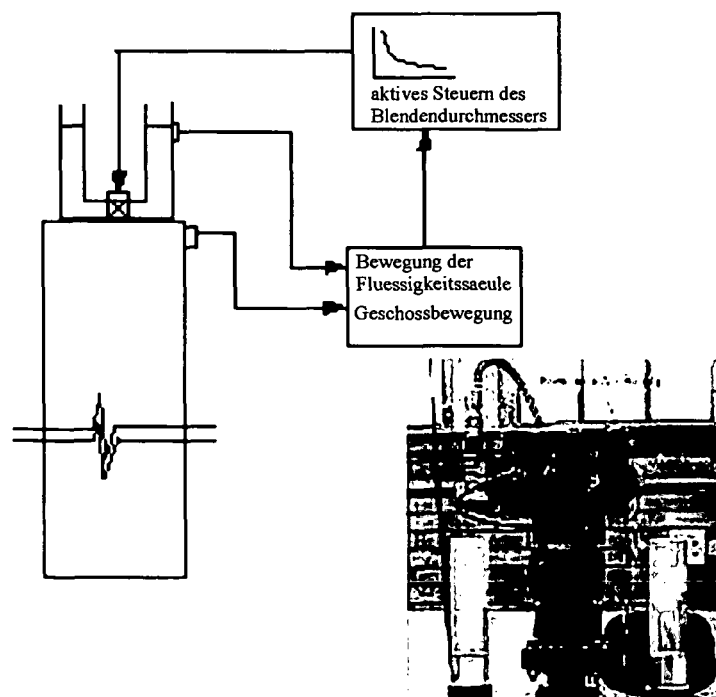


Abb. 2.6: Semi-aktiv pneumatisch geregelter TLCD; Veränderung des Blendendurchmessers mit Hilfe Aktoren; Quelle: Yalla et al.[34]

In einer neuen Arbeit von Ni et al.³⁵ wird ein semi-aktiver MR (magneto-rheological) - TLCD vorgestellt. Über ein am horizontalen Rohrabschnitt des Flüssigkeitstilgers angelegtes Magnetfeld, wird die Fließspannung der MR-Flüssigkeit und damit die Flüssigkeitsdämpfung in gewünschter Weise gesteuert.

Im Zuge von zwei, am Institut für Allgemeine Mechanik der TU-Wien durchgeführten Diplomarbeiten, wurde von Hruska³⁶ (*Elastische Rahmentragwerke mit U-rohrförmigen Flüssigkeitsdämpfern – eine Computergesteuerte Modelluntersuchung, 1999*) und Kofler³⁷ (*Eine experimentelle und numerische Modelluntersuchung von ebenen Rahmentragwerken mit U-rohrförmigen Flüssigkeitsdämpfern, 2000*) eine experimentelle und numerische Analyse über das Dämpfungsverhalten von Flüssigkeitstilgern auf einem SDOF-Schubrahmen studiert. Sowohl die freien als auch erzwungenen harmonischen Schwingversuche mit unterschiedlichen TLCD-Konfigurationen zeigten die dämpfende Wirkung des Flüssigkeitstilgers.

Eine weitere am Institut für Allgemeine Mechanik der TU-Wien entstandene umfassende Arbeit auf dem Gebiet des Flüssigkeitstilgers ist die von Hochrainer³⁸ (*Control of vibrations of civil engineering structures with special emphasis on tall buildings, 2001*) in den Jahren 1998 bis 2001 erarbeitete Dissertation. Hochrainer [38, Seite 97] zeigt unter anderem eine sehr anschauliche Analogie zwischen dem konventionellen dynamischen Schwingungstilger nach Den Hartog, wie in Kapitel 1, Abschnitt 1.2 dargelegt, und dem zu analysierenden Flüssigkeitstilger für ein SDOF Hauptsystem. Mit Hilfe dieser Analogie können die Entwurfparameter für den TLCD in bequemer Weise berechnet werden. Es ist bekannt, dass durch den Einsatz von passiven Flüssigkeitstilgern die Schwingungsantwort im eingeschwungenen Zustand deutlich reduziert werden kann. Demgegenüber besteht ein Nachteil von passiven Tilgern jeglicher Art darin, dass während des Einschwingvorganges oft transiente Schwingungsspitzen vorhanden sind, die erst durch Einführung des aktiven Flüssigkeitstilgers vermindert werden können. Aus diesem Grund untersucht Hochrainer [38, Seite 146] ein sehr effizientes aktives Kontrollsystem für den TLCD, wie in Abb. 2.7 dargestellt. Der aktive TLCD enthält auf beiden Seiten der geeigneten Rohrabschnitte einen Luftraum, über den die Dynamik der Flüssigkeitssäule durch

Druckluftzufuhr über das Einlassventil gezielt beeinflusst werden kann. Dabei ist im Ruhezustand unbedingt auf $p_1 = p_2 = p_0$ zu achten.

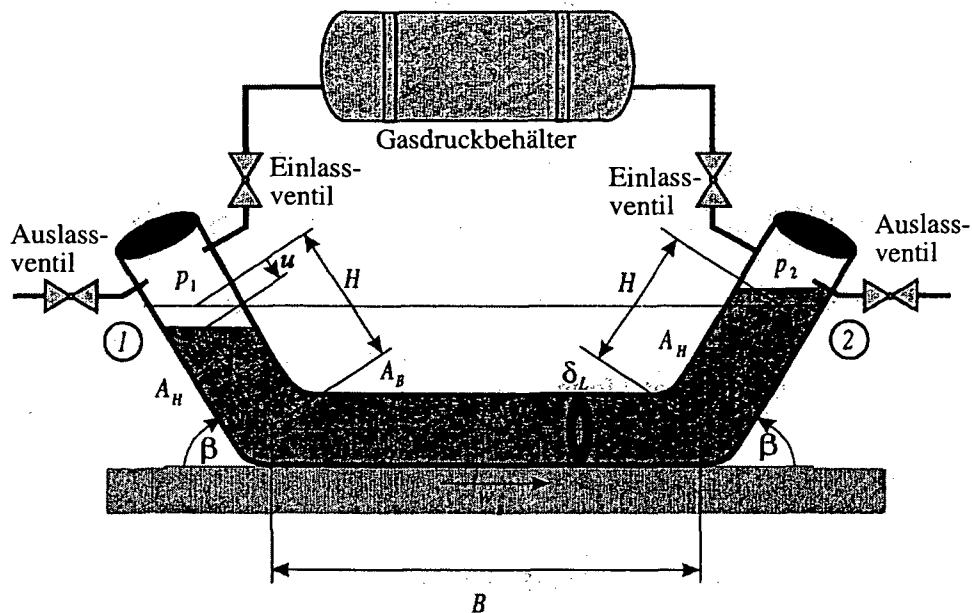


Abb. 2.7: Aktives Kontrollsystem für den TLCD; im Ruhezustand ist auf $p_1 = p_2 = p_0$ zu achten;
Quelle: Dissertation Hochrainer [38, Seite 146]

In der Dissertation von Hochrainer [38, Seite 162] werden außerdem eine Reihe von Benchmark Studien mit und ohne Wirkung von Flüssigkeitstilgern vorgelegt. Die erste numerische Analyse wird an einem eingeschossiges 3-D Gebäude unter Erdbebenanregung durchgeführt. Das Gebäude wird mit drei passiven Flüssigkeitstilgern ausgestattet und in horizontaler Richtung (längs und quer) mit dem historisch bedeutungsvollen El Centro Beben (Nord-Süd Komponente, 1940) zu erzwungenen Schwingungen angeregt. Als zweites numerisches Beispiel untersucht Hochrainer ein Hochhaus unter Winderregung. Es werden jeweils zwei parallele passive Flüssigkeitstilger im obersten Stockwerk installiert und die dämpfende Wirkung gezeigt. Die Windanregung erfolgt dabei in zwei aufeinander senkrechten Richtungen. In der dritten numerischen Untersuchung wird ein ebenes dreigeschossiges Gebäudemodell unter Erdbebenerregung betrachtet und mit einem Flüssigkeitstilger am obersten Stockwerk versehen. Die dämpfende Wirkung unter Verwendung eines passiven als auch aktiv geregelten Flüssigkeitstilgers wird

umfassend studiert. Eine weitere numerische Simulation wird an einem Hochhaus mit 76 Stockwerken durchgeführt. Die Wirkung von drei Flüssigkeitstilgern in unterschiedlichen Stockwerken des Hochhauses wird zufolge Windanregung untersucht. Im letzten numerischen Beispiel wird ein erdbebenerregtes Gebäude mit insgesamt drei aktiv geregelten Flüssigkeitstilgern ausgestattet und die dämpfende Wirkung gezeigt. An dieser Stelle ist anzumerken, dass Hochrainer in allen dargelegten numerischen Studien eine vertikale Anregung des gekoppelten Systems Gebäude / Flüssigkeitstilger vernachlässigt. Eine Aussage über den Einfluss dieser vertikalen Anregung auf das optimale Dämpfungsverhalten von Flüssigkeitstilgern bleibt daher offen. In Verallgemeinerung dieser Studien von Hochrainer wird in der vorliegenden Dissertation eine in der Ebene allgemeine Bewegung des gekoppelten Systems Gebäude / Flüssigkeitstilger betrachtet, wie in Kapitel 3 ausgeführt. Es kann gezeigt werden, dass bei einer entsprechenden Größe des optimalen linearen Dämpfungskoeffizienten $\zeta_{A,0}$, Gl. (3-48), keine Auswirkungen der vertikalen Anregung, für den betrachteten Amplitudenbereich, zu beobachten sind und daher eine detaillierte Untersuchung der vertikalen Anregung unterbleiben kann, wie in Kapitel 3, Abschnitt 3.7 diskutiert. Insbesondere wird in Kapitel 3, Abschnitt 3.6 das von Hochrainer untersuchte dreigeschossige Gebäudemodell mit Flüssigkeitstilger betrachtet und einer kombinierten horizontalen und vertikalen Erdbebenerregung ausgesetzt. Es zeigt sich in dieser Simulation, dass für den betrachteten Amplitudenbereich der vertikalen Anregung kein negativer Einfluss auf das Dämpfungsverhalten des optimierten Flüssigkeitstilgers vorhanden ist.

2.3 Überblick passiver Dämpfungs- und Tilgungssysteme bei Brücken

Die Arbeiten auf dem Gebiet der Schwingungsdämpfung und Schwingungstilgung von Brücken sind sehr vielfältig und stellen im Prinzip eine Anwendung der in Hochbaukonstruktionen eingesetzten Systeme auf Brücken dar. Der Unterschied zwischen Dämpfer und Tilger ist hierbei wie folgt zu geben: Das Prinzip der Dämpfer beruht auf der Energiedissipation zufolge inelastischer Deformationsprozesse, die zu

einer Anhebung der Eigendämpfung des Hauptsystems (Brücke) führen, wie in den Abschnitten 2.3.1 und 2.3.2 beschrieben. Dem gegenüber bestehen Schwingungstilger aus einem Feder-Masse System mit parallel geschaltetem Dämpferelement (Kelvin-Voigt'scher Modellkörper), wie in den Abschnitten 2.3.3 und 2.3.4 dargelegt. Letztere werden, im Gegensatz zum Dämpfer, optimal auf eine ausgewählte Schwingungsform des Hauptsystems (Brücke) abgestimmt.

2.3.1 Einsatz von metallischen Dämpfern

Metallische Dämpfer beruhen auf der Eigenschaft, bei inelastischen Deformationszuständen Schwingungsenergie zu dissipieren. Bei dynamischer Beanspruchung ist die Baukonstruktion und damit auch der metallische Dämpfer einer wechselnden Zug- und Druckbeanspruchung ausgesetzt. Trägt man den Verlauf der Normalspannung σ über die Normalverzerrung ε auf, entsteht die in Abb. 2.8 dargestellte Hysteresekurve. Die Größe der dissipierten Energie kann als die von der Hysteresekurve eingeschlossene Fläche identifiziert werden.

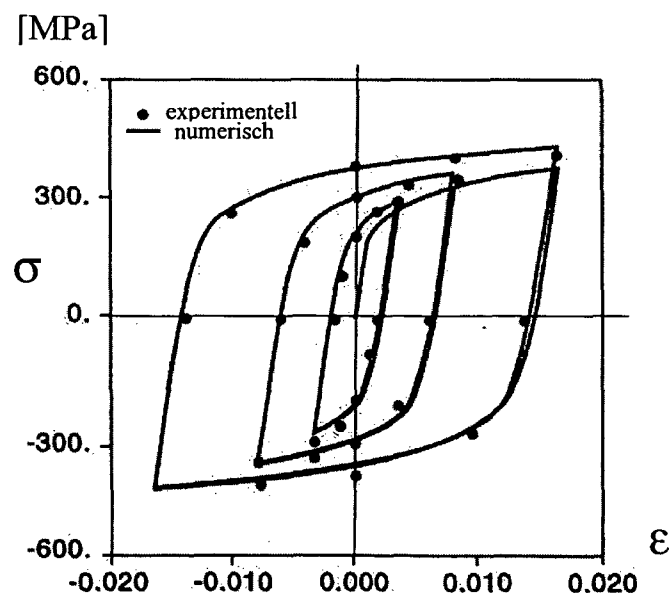


Abb. 2.8: Verlauf der Normalspannung σ in Abhängigkeit von der Normalverzerrung ε bei wechselnder Zug- und Druckbeanspruchung; Quelle: Soong und Dargush [39, Seite 45]

Als Material für den Dämpfer werden weiche Metalle wie z.B. Blei oder geeignete metallische Legierungen verwendet. In der Abb. 2.9 ist ein typischer metallischer Dämpfer illustriert.

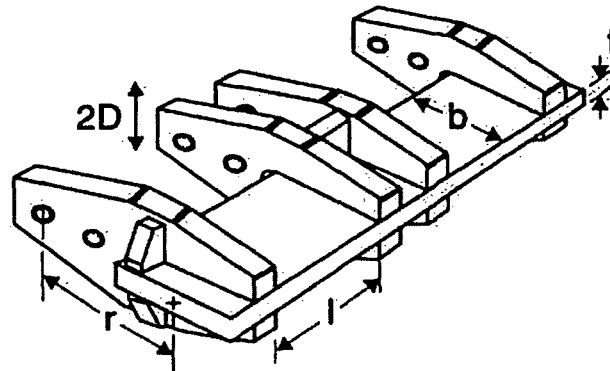


Abb. 2.9: Typischer metallischer Dämpfer; Quelle: Soong und Dargush [39, Seite 35]

Für eine detaillierte theoretische Abhandlung wird auf das Buch von Soong und Dargush³⁹ verwiesen. Die Erhöhung der Eigendämpfung von Brücken mit Hilfe metallischer Dämpfer wurde unter anderem auch von Skinner et al.⁴⁰ vorgeschlagen und in die Brückenpfeiler der Rangitikei Bridge in Neuseeland implementiert.

2.3.2 Einsatz von viskoelastischen Dämpfern

Das Prinzip des viskoelastischen Dämpfers beruht, ähnlich dem metallischen Dämpfer, auf der Energiedissipation zufolge inelastischer Deformationsprozesse. Die Deformation des Dämpfers erfolgt hier jedoch nicht in Normalen- sondern in Querrichtung (Schubdeformation). Typische viskoelastische Materialien sind Polymere und glasartige Substanzen. In der Abb. 2.10 ist ein derartiger Dämpfer dargestellt, wobei das viskoelastische Material zwischen zwei Stahlplatten befestigt ist.

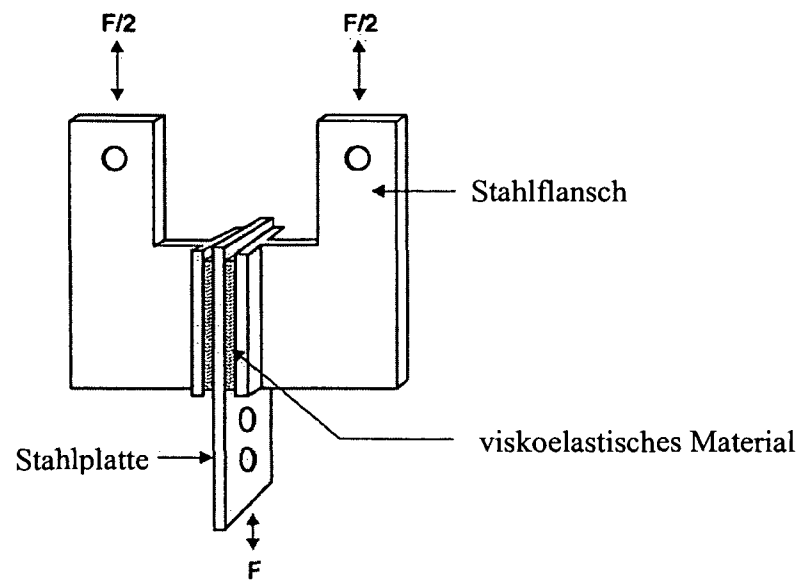


Abb. 2.10: Typischer viskoelastischer Dämpfer, bestehend aus dem viskoelastischen Material in Verbindung mit zwei Stahlplatten; Quelle: Soong und Dargush [39, Seite 128]

Bei Relativbewegungen der Stahlplatten erfährt das viskose Material eine Schubdeformation und dissipiert dadurch Bewegungsenergie. Trägt man hier den Verlauf der Schubspannung τ über der Schubverzerrung γ auf, entsteht die in Abb. 2.11 dargestellte, nahezu elliptische, Hysteresekurve.

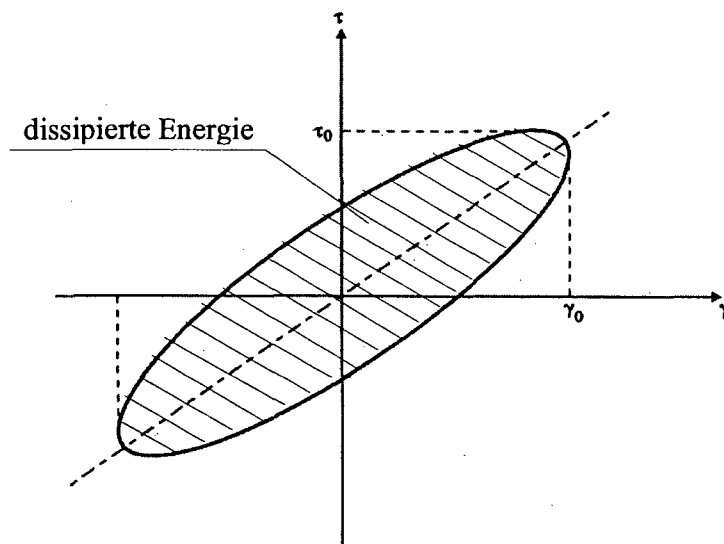


Abb. 2.11: Verlauf der Schubspannung τ in Abhängigkeit von der Schubverzerrung γ ; elliptische Hysteresekurve; Quelle: Soong und Dargush [39, Seite 129]

Die Größe der Energiedissipation kann wiederum aus der Ellipsenfläche identifiziert werden. Für Brückenbauwerke werden viskoelastische Dämpfer ebenfalls zur Erhöhung der Eigendämpfung angewendet. In einer Arbeit von Feng et al.⁴¹ werden viskoelastische Dämpfer für Längs und Querdehnungsfugen von zwei parallel angeordneten Autobahnbrücken vorgeschlagen um der Gefahr des Herabfallens der Brücken von ihren Lagerungen und/oder die gegenseitige Kollision bei starken Erdbeben entgegenzuwirken. Pan⁴² untersucht in einer Arbeit aus dem Jahre 1992 den Einsatz von viskoelastischen Dämpfern zur Reduzierung von personeninduzierten Schwingungen bei Fußgängerbrücken.

Die Anwendung von viskoelastischen Dämpferelementen wurde unter anderem auch für die Sanierung der Millennium Bridge in London von Fitzpatrick et al.⁴³ vorgeschlagen und realisiert. Die personeninduzierten horizontalen Querschwingungen wurden durch diese Maßnahme stark reduziert. Insbesondere konnte die in der horizontalen Schwingungsform vorhandene Eigendämpfung der Brücke stark angehoben werden. In Kapitel 6, Abschnitt 6.1, wird eine detaillierte dynamische Analyse der Millennium Bridge mit und ohne Wirkung von Flüssigkeitstilgern vom Typ TLCD als Alternative dargelegt.

2.3.3 Einsatz von konventionellen Schwingungstilgern mit Reibelementen

In der Abb. 2.12 ist ein Schwingungstilger mit Reibelement zur Reduzierung der horizontalen Schwingungsantwort illustriert. Die rückstellende Wirkung der ausgelenkten Pendelmasse wird alleine durch die Schwerkraft gewonnen (ähnlich einem konventionellen Tuned Mass Damper (TMD) - Pendeltyp). Durch passende Wahl der Pendellänge l_D kann die Eigenfrequenz des Tilgers, $\omega^* = \sqrt{g/l_D}$, auf eine ausgewählte Schwingungsform des Hauptsystems abgestimmt werden. Nachteil dieses Schwingungstilgers: Um eine Bewegung und daraus resultierend eine Kraftwirkung der Pendelmasse auf das Hauptsystem herbeizuführen, muss erst die Haftreibung des Reibelementes zur Unterlage überschritten werden. Eine detaillierte

theoretische Untersuchung dieses Schwingungstilgers findet sich bei Soong und Dargush [39] oder bei Petersen [4].

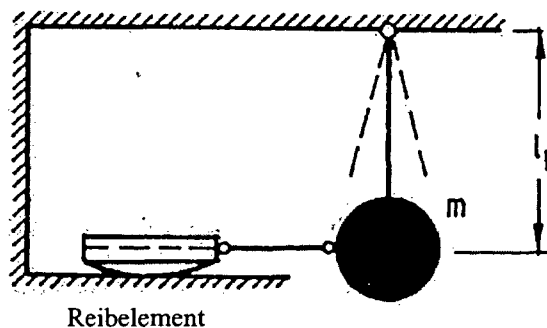


Abb. 2.12: Schwingungstilger mit Reibelement zur Reduzierung von horizontalen Schwingungen;
Quelle: Petersen [4, Seite 84]

2.3.4 Einsatz von konventionellen dynamischen Schwingungstilgern mit viskoser Dämpfungscharakteristik (Den Hartog Tilger)

Diese Art des Schwingungstilgers (Feder-Masse-System in Kombination mit einem parallel geschaltetem viskosen Dämpfungselement, Tuned Mass Damper (TMD)) wird vorwiegend zur Reduzierung von vertikalen Schwingungsamplituden bei Brücken angewendet. Es handelt sich hierbei um einen konventionellen dynamischen Schwingungstilger nach Den Hartog, wie in Kapitel 1, Abschnitt 1.2, dargelegt, d.h. die optimale Abstimmung dieses Tilgersystems auf das Hauptsystem erfolgt mit Hilfe der in Kapitel 1, Tabelle 1, gelisteten Entwurfparameter.

Die Anwendung eines Schwingungstilgers dieser Art wird von Hirsch⁴⁴ im Jahre 1981 zur Reduzierung von personeninduzierten Vertikalschwingungen einer Fußgängerbrücke (Schrägseilbrücke) vorgeschlagen und realisiert, wie in Abb. 2.13 dargestellt. Die Installation erfolgte dabei an jener Stelle, wo die zweite Eigenform einen Knoten aufweist, wie in Abb. 2.13 eingetragen.

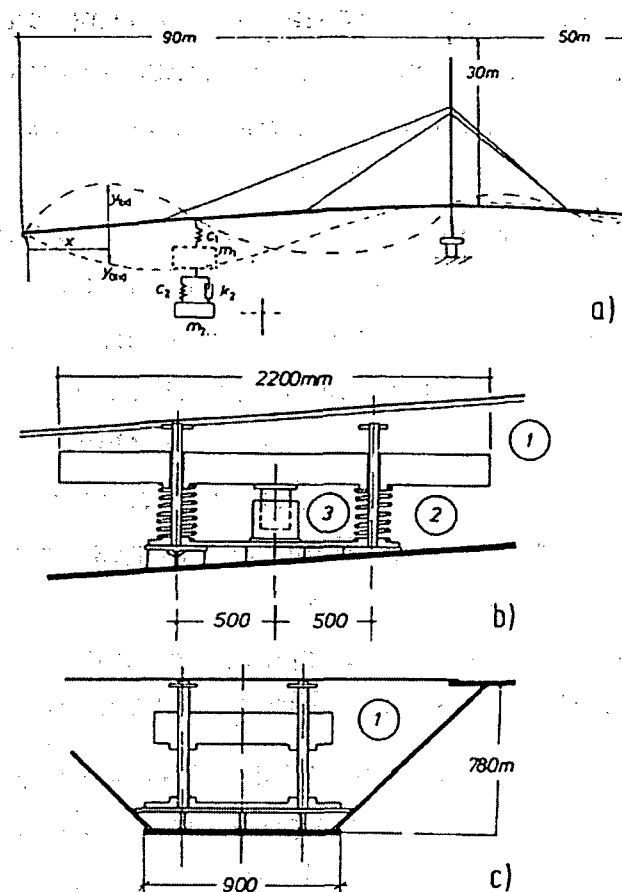


Abb. 2.13: Dynamischer Schwingungstilger mit viskosem Dämpferelement für eine Fußgängerbrücke;
Quelle: Petersen [4, Seite 228]

Als exemplarisches Beispiel der viskosen Dämpfungscharakteristik ist das von Petersen [4] im Jahre 1995 entwickelte viskose Dämpferelement, System Maurer Söhne-Petersen, in der Abb. 2.14 dargestellt.

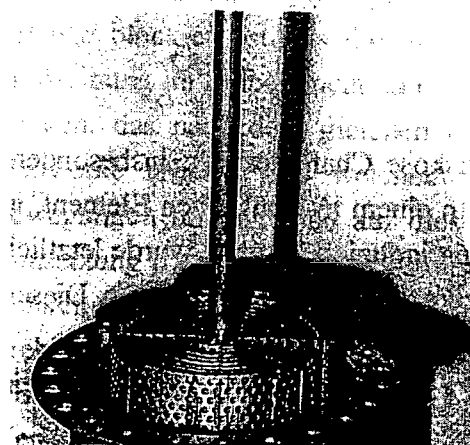


Abb. 2.14: Viskoses Dämpferelement; entworfen von Petersen [4] im Jahre 1995; Quelle: Petersen [4, Seite 124]

Das viskose Dämpferelement besteht aus einem Kolben der sich in einem mit Öl gefüllten Topf auf und ab bewegt. Mit der wechselnden Auf- und Abwärtsbewegung ist eine weitgehend laminare Scherströmung verbunden. Die Verdrängungseffekte durch die Stange sind ebenso wie die Verwirbelung als gering einzustufen, d.h. der Ansatz einer linearen Dämpfungscharakteristik ist hierbei bis zu einer bestimmten Größe der Schwingungsamplitude gerechtfertigt.

Das dargelegte Dämpferelement wurde in Kombination mit einem Feder-Masse-System zur Tilgung der vertikalen Schwingungen z.B. bei der Fröttmaninger Hängebrücke in München erfolgreich eingebaut, Abb. 2.15.

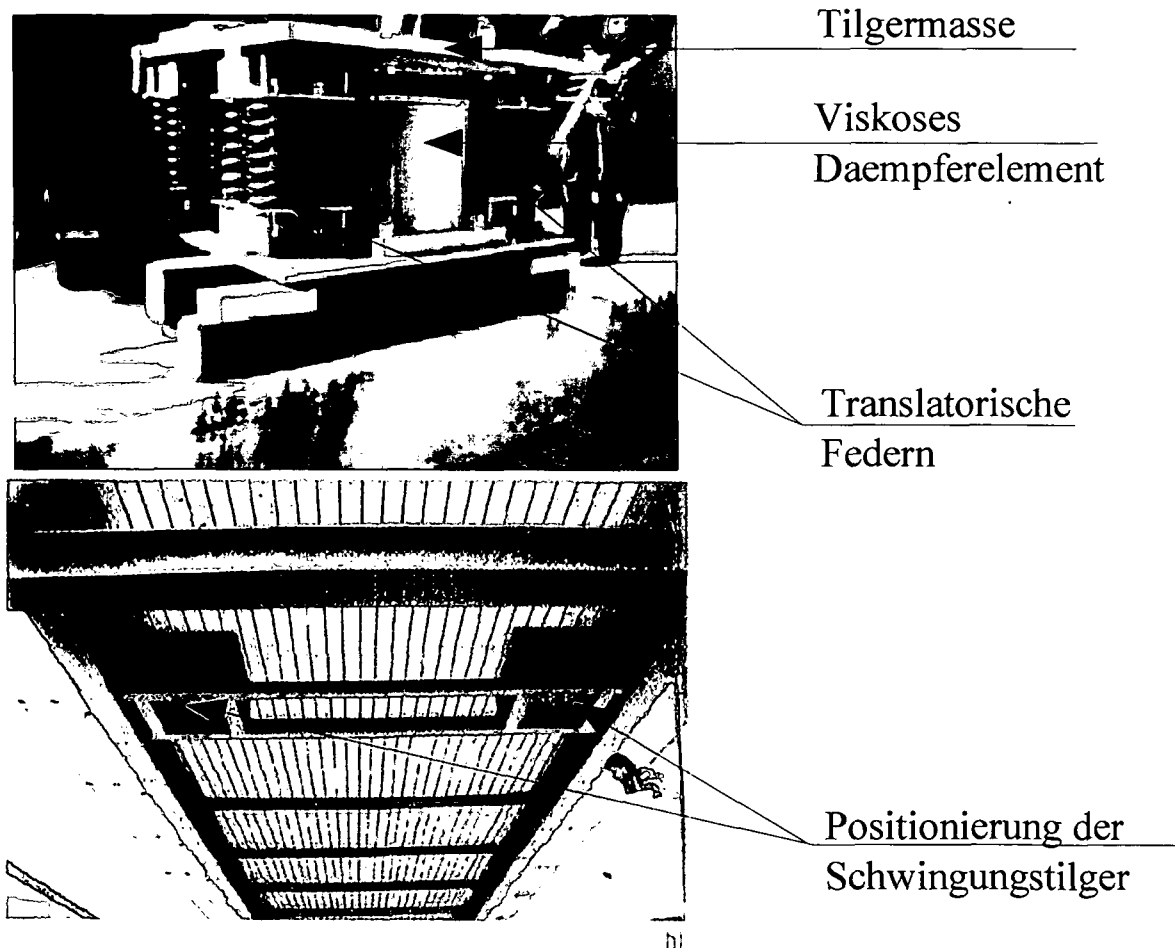


Abb. 2.15: Dämpferelement von Petersen in Kombination mit einem Feder-Masse-System; eingebaut unter dem Brückenquerschnitt der Fröttmaninger Hängebrücke in München; Quelle: Petersen [4, Seite 136]

Insgesamt wurden zwei Schwingungstilger, bestehend aus vier translatorischen Federn, zwei viskosen Dämpferelementen und der Tilgermasse, an der Unterseite des Brückenquerschnittes (in Trägermitte) eingebaut. Die personeninduzierten Brückenschwingungen bei stark verdichtetem Fußgängerverkehr konnten durch diese Maßnahme auf ein praktisch nicht mehr wahrnehmbares Maß reduziert werden.

Vertikalschwingungen von Brücken können einerseits durch Verkehr oder Personen andererseits aber auch durch aerodynamische Effekte der Windanströmung ausgelöst werden. Im letztgenannten Fall erweist sich der Einsatz von dynamischen Schwingungstilgern ebenfalls als sinnvoll, wie das exemplarische Beispiel der Großen Beltbrücke in England zeigt, Abb. 2.16. Larsen et al.⁴⁵ entwickelte nämlich ein Feder-Masse-System in Kombination mit viskosen Dämpferelementen zur Reduzierung wirbelinduzierter Querschwingungen der Brücke. Die Spannweite der Brücke beträgt insgesamt 193 m, unterteilt in 7 bzw. 13 Feldern.

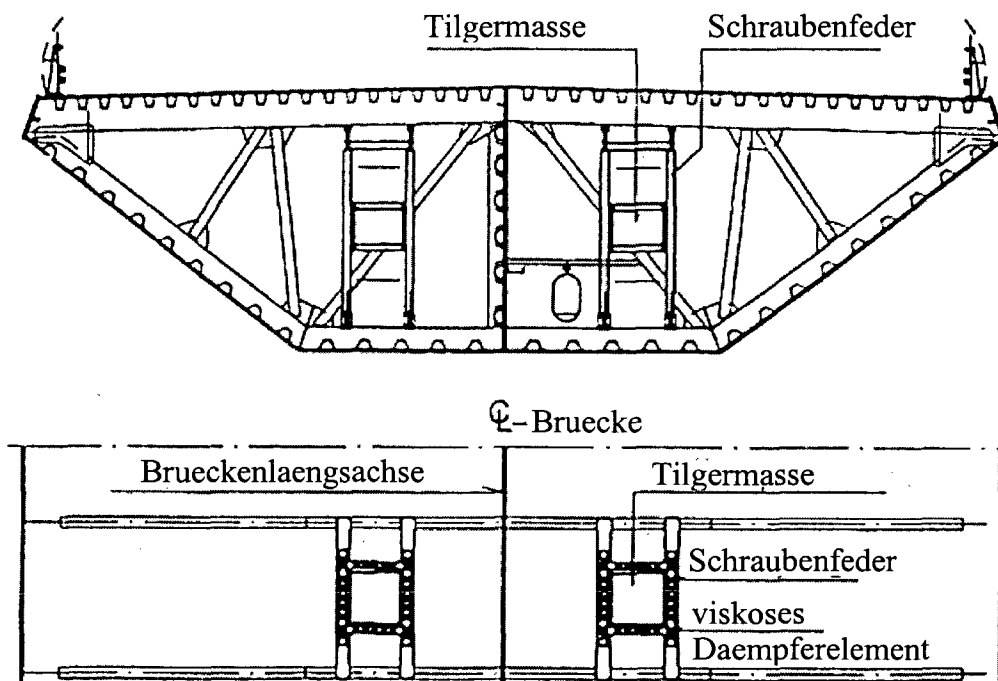


Abb. 2.16: Einbau von dynamischen Schwingungstilgern mit viskosen Dämpferelementen in die Große Beltbrücke; Reduzierung von wirbelinduzierten Querschwingungen der Brücke; Quelle: Petersen [4, Seite 230]

Die Tilger wurden jeweils als zwei symmetrisch liegende Einzeltilger ausgebildet und in den Feldern so installiert, dass nicht nur die Grundschwingungsform sondern auch höhere Schwingungsformen getilgt werden. In einer weiteren interessanten Arbeit von Lin et al.⁴⁶ wird die aus aerodynamischen Effekten sich einstellende Biegedrillschwingung einer 2-DOF Brückenstruktur, gekoppelt mit einem ebenfalls 2-DOF Schwingungstilger, untersucht, Abb. 2.17. Es wird eine Sensibilitätsuntersuchung durchgeführt wobei die folgenden Parameter variiert werden: Dämpfungskoeffizienten des Schwingungstilgers, Masseverhältnis des Tilgers zur bewegten Brückenmasse und Frequenzverhältnis. Bei geringer aerodynamischer Koppelung wird eine Reduzierung der Schwingungsantwort von ca. 25–33% erreicht und bei starker Koppelung von ca. 20–50%. Außerdem kann gezeigt werden, dass durch den installierten Schwingungstilger eine Erhöhung der zur Flutterinstabilität (wie z.B. in Klöppel und Thiele⁴⁷ oder Ziegler⁴⁸ angegeben) führenden, kritischen Windgeschwindigkeit von 10.4% und 20.5%, für entkoppeltes Flattern und für gekoppeltes Flattern, erreicht wird.

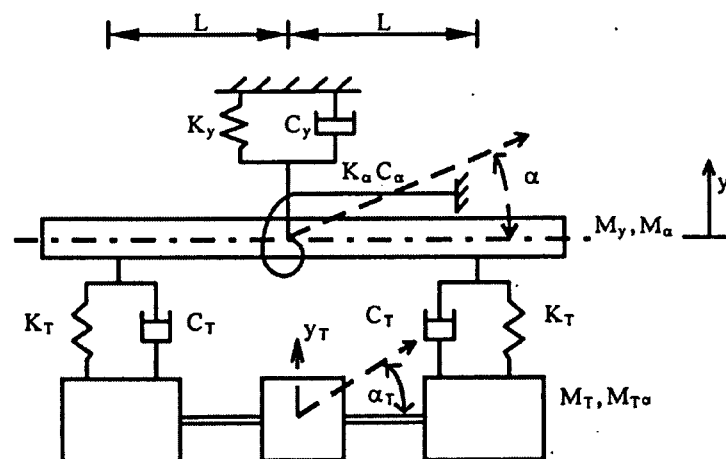


Abb. 2.17: Mechanisches Modell des gekoppelten 4-DOF Systems Brücke/Schwingungstilger; Quelle: Lin et al. [46]

Insbesondere wird an dieser Stelle auf die Tilgung von widerregten Schwingungen mit Hilfe von Flüssigkeitstilgern vom Typ TLCD, wie in Kapitel 7 ausgeführt, verwiesen.

Für die Tilgung der horizontalen Schwingungsantwort einer Brücke werden dynamische Schwingungstilger in Kombination mit viskosen Dämpferelementen z.B. in der Form eines Automobilstoßdämpfers angewendet, wie in Abb. 2.18 dargestellt.

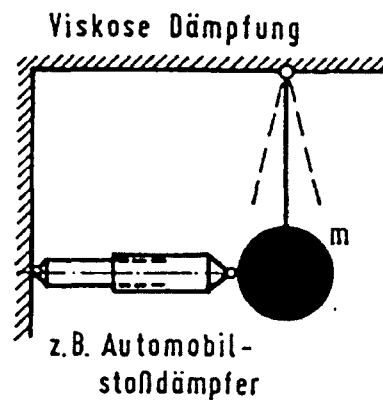


Abb. 2.18: Schwingungstilger in Kombination mit viskosem Dämpferelement (Automobilstoßdämpfer) zur Reduktion der horizontalen Schwingungsantwort; Quelle: Petersen [4, Seite 84]

Die Federung wird durch eine Pendelung ersetzt wodurch die rückstellende Wirkung aus der Gravitation gewonnen wird. Im Dämpfungselement wird die Anregungsenergie absorbiert. Der Tilger wird im Allgemeinen dort positioniert wo die Amplitude der zu tilgenden Schwingungsform am größten ist. Es ist noch anzumerken, dass im Falle einer Brückenstruktur sehr oft nur das viskose Dämpferelement für sich allein eingebaut wird, um die Eigendämpfung der Brücke zu erhöhen. In der Literatur findet sich noch eine Vielzahl weiterer Untersuchungen auf dem Gebiet des dynamischen Schwingungstilgers und dessen Anwendung im Brückeningenieurwesen. Ein umfangreicher Überblick findet sich bei Petersen [4].

2.3.5 Einsatz von Flüssigkeitstilgern für Brücken

Der Einsatz von Flüssigkeitstilgern in Hochbaukonstruktionen wurde in Abschnitt 2.2 dieses Kapitels bereits erläutert. Im Jahre 1990 präsentierte Sun et al.⁴⁹ eine Untersuchung über den Einsatz von TLDs zur Reduzierung von Drehschwingungen einer Brücke. Zuvor wurde aber bereits im Jahre 1989 von Kubo et al.⁵⁰ eine

experimentelle Studie über die Tilgung von Drehschwingungen mittels TLDs, jedoch für ein lineares Modell der Flüssigkeitsschwingung ohne Turbulenzdämpfung, wie in Kapitel 3, Abschnitt 3.2.2, dargelegt, durchgeführt. Für die Tilgung von personeninduzierten horizontalen Schwingungen der Toda Park Bridge (Schrägseilbrücke) in Japan wurden von Nakamura und Fujino⁵¹ ebenfalls Flüssigkeitstilger vom Typ TLD vorgeschlagen und eingebaut, Abb. 2.19.

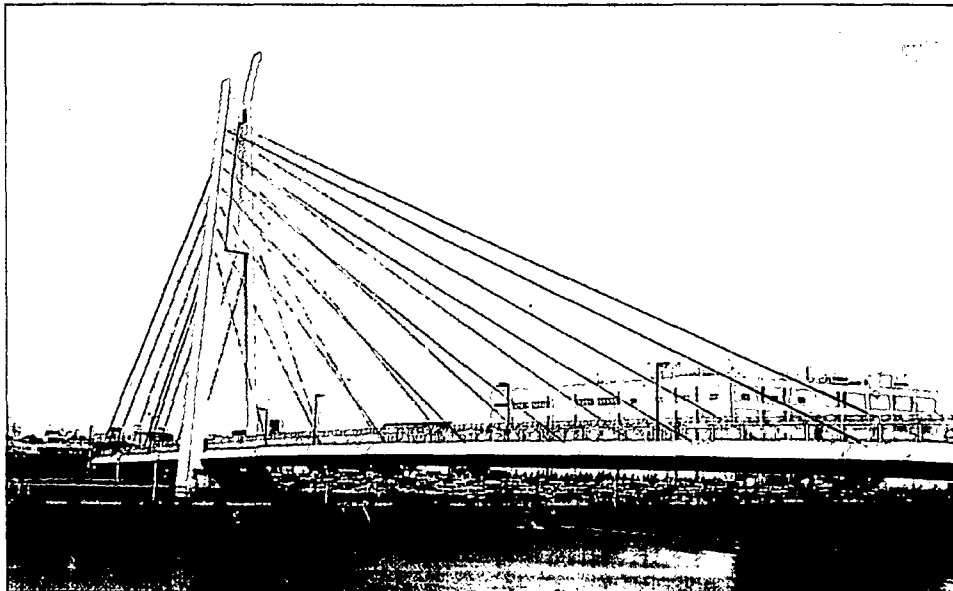


Abb. 2.19: Toda Park Bridge in Japan (Schrägseilbrücke); Quelle: Nakamura und Fujino [51]

Die für Fußgänger als unangenehm empfundene horizontale Schwingungsantwort konnte durch den Einsatz von TLDs, wie von Nakamura und Fujino ausgeführt, beträchtlich reduziert werden. Die Installation der TLDs im Inneren des Brückenquerschnittes wurde im Jahre 1992 durchgeführt. Nach Ablauf von zehn Jahren erfolgte eine Überprüfung der Anlage wobei festgestellt wurde, dass lediglich geringe Mengen an Wasser verdunstet waren. Das fehlende Wasser wurde nachgefüllt und damit die TLDs neuerlich justiert. Diese interessante praktische Anwendung von Flüssigkeitstilgern im Brückenbau bestätigt den nahezu wartungsfreien Einsatz und damit großen Vorteil dieser Tilgerart. Diese Brücke wird insbesondere im Kapitel 6, Abschnitt 6.2, einer umfassenden dynamischen Analyse mit und ohne der Wirkung eines Flüssigkeitstilgers vom Typ TLCD unterzogen.

Der erste Einsatz von TLCDs zur Reduzierung der Schwingungsantwort von Brückenkonstruktionen wurde von Sun et al.⁵² im Jahre 1990 untersucht. In der sowohl numerischen als auch experimentellen Studie wird ein U-förmiger mit Flüssigkeit gefüllter Behälter zur Tilgung von vertikalen Schwingungen vorgeschlagen, wie in Abb. 2.20 illustriert. Diese Art der Tilgung ist jedoch nicht Gegenstand der vorliegenden Dissertation.

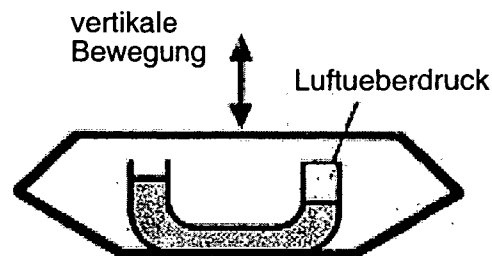


Abb. 2.20: U-förmiger Flüssigkeitstilger zur Reduzierung der vertikalen Schwingungsantwort von Brücken; Quelle: Sun et al. [52]

Der Behälter wird an einer Seite luftdicht verschlossen und mit einem Luftüberdruck beaufschlagt. Dadurch entsteht eine Differenz in der Wasserspiegelhöhe von linker und rechter Seite des U-förmigen Behälters. Bei vertikaler Anregung der Brücke bildet diese ausgelenkte Flüssigkeitsmasse die sogenannte „aktiv“ bewegte Masse. Nach diesen erstmalig durchgeführten Untersuchungen von Sun et al. [52] erfolgte erst im Jahre 2000 von Xue et al.⁵³ eine Weiterentwicklung dieses Tilgersystems für Brücken. Xue untersuchte sowohl numerisch als auch experimentell den Einsatz von TLCDs zur Reduzierung von Drehschwingungen. Eine detaillierte Beschreibung der numerischen und experimentellen Studien findet sich in Kapitel 4, Abschnitt 4.1. Weiterführende Studien über die Tilgung von Drehschwingungen durch den Einsatz von mehreren TLCDs wurden von Shum und Xu^{54 55} vorgenommen.

In Verallgemeinerung dieser Untersuchungen wird in der vorliegenden Dissertation, die erzwungene Schwingungsantwort eines sich in der Ebene allgemein bewegenden Brückenquerschnittes durch den Einsatz von TLCDs reduziert. Dem Brückenquerschnitt werden insgesamt 3 Freiheitsgrade zugeordnet, außerdem wird der Massen- und Steifigkeitsmittelpunkt in unterschiedlicher Lage gewählt, d.h. es wird eine gekoppelte Biegedrillschwingung unterstellt, wie in Kapitel 4 dargelegt.

LITERATUR

- ¹ Frahm, H., 1911, 'Neuartige Schlingertanks zur Abdämpfung von Schiffsrollbewegungen, Theoretischer Teil', Jahrbuch schiffsbautechnische Gesellschaft 12, S. 351-365.
- ² Den Hartog, J.P., 1936, 'Mechanische Schwingungen', Verlag von Julius Springer, Berlin.
- ³ Hahnkamm, E., 1932, 'Untersuchung über das reibungs- und trägheitsgekoppelte Schwingungssystem Schiff und Schlingertank, Ing.-Archiv 3, S. 251-276.
- ⁴ Petersen, C., 2001, 'Schwingungsdämpfer im Ingenieurbau', Herausgeber: Maurer Söhne GmbH & Co.Kg, München, Innovation im Stahl.
- ⁵ Carrier, G.F., Miles, J.W., 1960, 'On the Annular Damper for a Freely Precessing Gyroscope', Journal of Applied Mechanics, Vol.27, p. 237-240.
- ⁶ Alfried, K.T., 1974, 'Partially Filled Viscous Ring Nutation Damper', Journal of Spacecraft, Vol.11, No.7, p. 456-462.
- ⁷ Abramson, H.N., 1966, 'The dynamic behavior of liquids in moving containers', NASA SP-106.
- ⁸ Watanabe S., 1969, 'Methods of vibration reduction', Proc. Japan Naval Arch. Soc. Symp., p. 156-179.
- ⁹ Hagedorn, P., 1987, 'Nichtlinearitäten in der Schwingungstechnik: Einige Probleme und Lösungswege', In: Dynamische Probleme - Modellierung und Wirklichkeit (Natke, H.G., Popp, K., Hrsg.), Hannover: Mitteilung des Curt-Risch-Instituts, Seite 1-22.
- ¹⁰ Brunner, A., 1964, 'Amortisseur d'oscillation hydraulique pour cheminees. Societe' Hydrotechnique de France, Journees de l'Hydraulique VIII, Rapp. 5 / p. 1-7.
- ¹¹ Yalla, S.K., 2001, 'Liquid dampers for mitigation of structural response: Theoretical development and experimental validation', Dissertation, University of Notre Dame, Department of Civil Engineering and Geological Sciences, Indiana.
- ¹² Bauer, H.F., 1984, 'Oscillation of immiscible liquids in a rectangular container: A new damper for excited structures', Journal of Sound and Vibration 93, p. 117-133.
- ¹³ Fujino, Y., Pacheco, B.M., Chaiseri, P., Sun, L.M., 1988, 'Parametric studies on tuned liquid damper (TLD) using circular containers by free-oscillation experiment', JSCE, Journal of Structural Engineering and Earthquake Engineering, 5(1), p. 381-391.
- ¹⁴ Fujii, K., Tamura, Y., Sato, T., Wakahara, T., 1988, 'Wind-induced vibration of tower and practical applications of tuned sloshing damper', Journal of Wind Engineering, 37, p. 537 – 546.
- ¹⁵ Sun, L.M., Fujino, Y., Pacheco, B.M., Isobe, M., 1989, 'Nonlinear waves and dynamic pressures in rectangular TLD – simulation and experimental verification', JSCE, Journal of Structural Engineering and Earthquake Engineering, 6(2), p. 251-262.
- ¹⁶ Kubo, K. et al., 1989, 'On pitching vibration control by using liquid sloshing', in Proc. 44th JSCE annual meeting, Vol. 1, p. 730-731, (in Japanese).
- ¹⁷ Kareem, A., Sun, W.J., 1987, 'Stochastic response of structures with fluid-containing appendages', Journal of Sound and Vibration, 119(3), p. 389-408.
- ¹⁸ Modi, V.J., Welt, F., 1987, 'Vibration control using nutation dampers', in: Proc. Int. Conference on Flow Induced Vibrations, BHRA, England, p. 369-376.
- ¹⁹ Lou, J.Y.K., Lutes, L.D., Li, J.J., 1994, 'Active tuned liquid damper for structural control', 1st World Conference on Structural Control, 3-5 August 1994, Los Angeles, California, USA, p. TP1.70 – TP1.79.
- ²⁰ Yalla, S.K., Kareem, A., 1999, 'Modeling of TLDs as Sloshing-Slamming Dampers', Wind Engineering into the 21st century: Proc. 10th World Conference on Wind Engineering, Copenhagen, Balkema Press, p. 1569-1575.
- ²¹ Ibrahim, R.A., Pilipchuk, V.N., Ikeda, T., 2001, 'Recent Advances in Liquid Sloshing Dynamics', Applied Mechanics Reviews, 54(2), p. 133-199.
- ²² Holmes, J.D., 1995, 'Listing of installations', Elsevier Science Ltd., Printed in Great Britain, p. 676-678.
- ²³ Tamura, Y., Fujii, K., Ohtsuki, T., Wakahara, T., Kohsaka, R., 1995, 'Effectiveness of tuned liquid dampers under wind excitation', Engineering Structures, Vol.17, No.9, p. 609-621.

-
- ²⁴ Sakai, F., Takaeda, S., Tamaki, T., 1989, 'Tuned liquid column damper – new type device for suppression of building vibrations', in: Proc. Int. Conf. on High-rise Buildings, Nanjing, China, p. 926-931.
- ²⁵ Balendra, T., Wang, C.M., Cheong, H.F., 1995, 'Effectiveness of tuned liquid column dampers for vibration control of towers', *Engineering Structures*, Vol.17, No.9, p. 668-675.
- ²⁶ Balendra, T., Wang, C.M., Rakesh, G., 1999, 'Vibration control of various types of buildings using TLCD', *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, 83, p. 197-208.
- ²⁷ Balendra, T., Wang, C.M., Yan, N., 2001, 'Control of wind-excited towers by active tuned liquid column damper', *Engineering Structures*, 23, p. 1054-1067.
- ²⁸ Gao, H., Kwok, K.C.S., Samali, B., 1997, 'Optimization of tuned liquid column dampers', *Engineering Structures*, Vol.19, No.6, p. 476-486.
- ²⁹ Hitchcock, P.A., Kwok, K.C.S., Watkins, R.D., Samali, B., 1997, 'Characteristics of liquid column vibration absorbers (LCVA)-I', *Engineering Structures*, Vol.19, No.2, p. 126-134.
- ³⁰ Hitchcock, P.A., Kwok, K.C.S., Watkins, R.D., Samali, B., 1997, 'Characteristics of liquid column vibration absorbers (LCVA)-II', *Engineering Structures*, Vol.19, No.2, p. 135-144.
- ³¹ Chang, C.C., Hsu, C.T., 1998, 'Control performance of liquid column vibration absorbers', *Engineering Structures*, Vol.20, No.7, p. 580-586.
- ³² Won, A.Y.J., Pires, J.A., Haroun, M.A., 1997, 'Performance Assessment Of Tuned Liquid Column Dampers Under Random Seismic Loading', *Int. J. Non-Linear Mechanics*, Vol.32, No.4, p. 745-758.
- ³³ Sadek, F., Bijan, M., Lew, H.S., 1998, 'Single- And Multiple-Tuned Liquid Column Dampers For Seismic Applications', *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 27, p. 439-463.
- ³⁴ Yalla, S.K., Kareem, A., Kantor, J.C., 2001, 'Semi-active tuned liquid column dampers for vibration control of structures', *Engineering Structures*, 23, p. 1469-1479.
- ³⁵ Ni, Y.Q., Ying, Z.G., Wang, J.Y., Ko, J.M., Spencer Jr., B.F., 2004, 'Stochastic optimal control of wind-excited tall buildings using semi-active MR-TLCDs', *Probabilistic Engineering Mechanics*, Vol. 19, p. 269-277.
- ³⁶ Hruska, A., 1999, 'Elastische Rahmentragwerke mit U-rohrförmigen Flüssigkeitsdämpfern – eine computergesteuerte Modelluntersuchung', Diplomarbeit, Institut für Allgemeine Mechanik (E201), TU-Wien, A-1040 Wien.
- ³⁷ Kofler, M., 2000, 'Eine experimentelle und numerische Modelluntersuchung von ebenen Rahmentragwerken mit U-rohrförmigen Flüssigkeitsdämpfern', Diplomarbeit, Institut für Allgemeine Mechanik (E201), TU-Wien, A-1040 Wien.
- ³⁸ Hochrainer, M.J., 2001, 'Control of vibrations of civil engineering structures with special emphasis on tall buildings', Dissertation, Vienna University of Technology, ausgeführt am Institut für Allgemeine Mechanik (E201), TU-Wien, A-1040 Wien.
- ³⁹ Soong, T.T., Dargush, G.F., 1997, 'Passive Energy Dissipation Systems in Structural Engineering', John Wiley & Sons, New York.
- ⁴⁰ Skinner, R.I., Tyler, R.G., Heine, A.J., Robinson, W.H., 1980, 'Hysteretic Dampers for the Protection of Structures from Earthquakes', *Earthquake Engineering*, 13, p. 22-36.
- ⁴¹ Feng, M.Q., Kim, J.M., Shinozuka, M., Purasinghe, R., 'Viscoelastic Dampers at Expansion Joints for Seismic Protection of Bridges', *Journal of Bridge Engineering*, Vol.5, No.1, p. 67-74.
- ⁴² Pan, T.C., 1992, 'Vibration of Pedestrian Overpass', *Journal of Performance of Constructed Facilities*, Vol.6, No.1, p. 33-45.
- ⁴³ Fitzpatrick, T., Dallard, P., Le Bourva, S., Low, A., Smith, R.R., Willford, M., 2001, 'Linking London: The Millennium Bridge', Published by The Royal Academy of Engineering, Westminster London.
- ⁴⁴ Hirsch, G., 1981, 'Kontrolle der wind- und erdbebenenerregten Schwingungen weitgespannter Schrägseilbrücken, in: VDI-Berichte Nr. 419, S. 101-109. Düsseldorf: VDI-Verlag.
- ⁴⁵ Larsen, A., Svenson, E., Anderson, H., 1995, 'Design aspects of tuned mass dampers for the Great Belt East Bridge approach spans', *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics* 54/55, p. 413-426.

-
- ⁴⁶ Lin, Y.Y., Cheng, C.M., Lee, C.H., 2000, 'A tuned mass damper for suppressing the coupled flexural and torsional buffeting response of long-span bridges', *Engineering Structures*, 22, p. 1195-1204.
- ⁴⁷ Klöppel, K., Thiele, F., 1967, 'Modellversuche im Windkanal zur Bemessung von Brücken gegen die Gefahr winderregter Schwingungen', *Der Stahlbau*, Heft 12, Berlin, 36. Jahrgang, S. 353-365.
- ⁴⁸ Ziegler, F., 1998, 'Technische Mechanik der festen und flüssigen Körper', Dritte, verbesserte Auflage, Springer Wien New York.
- ⁴⁹ Sun, L.M., Fujino, Y., Koga, K., 1995, 'A Model Of Tuned Liquid Dampers For Suppressing Pitching Motions Of Structures', *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 24, p. 625-636.
- ⁵⁰ Kubo, K. et al., 1989, 'On pitching vibration control by using liquid sloshing', in *Proc. 44th JSCE annual meeting*, Vol. 1, p.730-731, (in Japanese).
- ⁵¹ Nakamura, S., Fujino, Y., 2002, 'Lateral Vibration on a Pedestrian Cable-Stayed Bridge', *Journal of the International Association for Bridge and Structural Engineering (IABSE)*, Vol.12, No.4, p. 295-300.
- ⁵² Sun, L.M., Nakaoka, T., et al., 1990, 'Tuned liquid damper for suppressing vertical vibration', in: *Proc. 45th JSCE annual meeting*, Vol.1, p. 978-979 (in Japanese).
- ⁵³ Xue, S.D., Ko, J.M., Xu, Y.L., 2000, 'Tuned liquid column damper for suppressing pitching motion of structures', *Engineering Structures*, 23, p. 1538-1551.
- ⁵⁴ Shum, K.M., Xu, Y.L., 2002, 'Multiple-tuned liquid column dampers for torsional vibration control of structures: experimental investigation', *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 31, p. 977-991.
- ⁵⁵ Shum, K.M., Xu, Y.L., 2002, 'Multiple-tuned liquid column dampers for torsional vibration control of structures: theoretical investigation', *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 32, p. 309-328.

3. FLÜSSIGKEITSTILGER UNTER HORIZONTALER UND VERTIKALER ERREGUNG MIT AN- WENDUNG IM HOCHBAU

Dieses dritte Kapitel analysiert den Flüssigkeitstilger unter einer kombinierten horizontalen und vertikalen Anregung. Eine umfangreiche Literaturstudie über Flüssigkeitstilger und deren Einsatz in Baukonstruktionen hat zu der Einsicht geführt, dass sich die wissenschaftlichen Betrachtungen fast ausschließlich auf horizontale Anregungen und deren Tilgung konzentrieren. In keiner der Arbeiten findet sich eine Aussage über die Berücksichtigung von vertikalen Anregungen von Baukonstruktionen die mit einem Flüssigkeitstilger ausgestattet sind. Es wird daher sowohl numerisch als auch experimentell untersucht, welche Auswirkung eine zusätzliche vertikale Bewegung auf das Dämpfungsverhalten eines Flüssigkeitstilgers haben kann. Ein im Zuge dieser Dissertation entwickelter Modellversuchstand soll das physikalische Phänomen der Parameterresonanz anschaulich verdeutlichen. Die Ergebnisse aus dem Experiment werden mit der numerischen Analyse verglichen und ausführlich diskutiert. Es kann gezeigt werden, dass bei entsprechender Wahl der Größe des optimalen linearen Dämpfungskoeffizienten des Flüssigkeitstilgers, kein negativer Einfluss der vertikalen Anregung vorhanden ist.

3.1 Einführung

Der Einsatz von Flüssigkeitstilgern zur Reduktion der Schwingungsantwort von Hochbaukonstruktionen ist bereits genauestens studiert und erprobt worden, dargelegt z.B. von Sakai et al.¹, Balendra et al.², Hochrainer³ (für Wind- und Erdbebenanregung) und in Kapitel 2, Abschnitt 2.2. Die gesamten Studien konzentrieren sich jedoch fast ausschließlich auf die Untersuchung der horizontalen Bewegungen einer Baukonstruktion und deren Tilgung und vernachlässigen dabei eventuell auftretende vertikale Bewegungen, z.B. die vertikale Komponente der Erdbebenanregung. Es lässt sich nun die berechtigte Frage stellen, ob diese Vernachlässigung in allen Fällen der Analyse gerechtfertigt ist oder nicht. Die Aufzeichnungen von Erdbebenschritten durch Seismogramme bestätigen, dass Hochhäuser unter Bebenanregung vertikalen Beschleunigungen ausgesetzt sind. Am 06. Mai 1976 zeichnete das in Tolmezzo-Diga Ambiesta positionierte Seismogramm ein starkes Erdbebensignal in Friaul (Italien) auf. Der zeitliche Verlauf der vertikalen Bodenbeschleunigung dieses Bebens ist in Abb. 3.1 dargestellt.

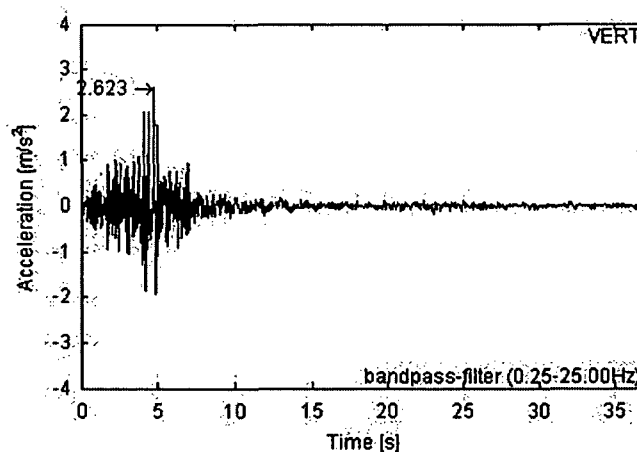


Abb. 3.1: Erdbebenschrieb der vertikalen Bodenbeschleunigung des Bebens in Friaul, 06. Mai 1976,

Quelle: <http://www.isesd.cv.ic.ac.uk>

Auch bei Brückenquerschnitten treten zufolge Wind- und/oder Verkehrsbelastung vertikale Schwingungen auf, hierbei wird auf Kapitel 4 und Kapitel 6 der Dissertation verwiesen. Der folgende Abschnitt widmet sich nun der Analyse dieser zusätzlichen vertikalen Anregungen, die in der Realität mehr oder weniger ausgeprägt vorhanden

ist, um deren Einfluss auf das Dämpfungsverhalten des Flüssigkeitstilgers zu untersuchen.

Bei vertikaler Erregung, des mit einem Flüssigkeitstilger ausgestatteten Gebäudes, entsteht die Gefahr von Parameterresonanz in der Flüssigkeitsschwingung, ein Phänomen welches unter bestimmten Bedingungen (definierte Größe der vertikalen Erregeramplitude und definiertes Frequenzverhältnis von Eigenfrequenz des Flüssigkeitstilgers zur Erregerfrequenz), zu einem instabilen Verhalten einer Schwingung führt, wie z.B. von Klotter⁴ dargelegt. Der wesentliche Unterschied zwischen Parameterresonanz und dem konventionellen Resonanzphänomen ist die Tatsache, dass bei vorhandener Anfangsstörung, an unendlich vielen Sub- und Superharmonischen Frequenzen instabiles Verhalten eines Schwingers möglich ist, wie in Abschnitt 3.2.5 ausführlich dargelegt. Die Instabilität bewirkt eine theoretisch unbegrenzte Aufschaukelung der Flüssigkeitsschwingung und zerstört somit den Dämpfungseffekt des Tilgers. Das gewünschte Ziel, dem Hauptsystem durch den Tilger Schwingungsenergie zu entziehen wird dann nicht erreicht, vielmehr wird dem Hauptsystem durch das Anwachsen der Schwingungsamplitude des Flüssigkeitstilgers zusätzlich Energie zugeführt. Insbesondere ist darauf hinzuweisen, dass dieses Verhalten auch bei einem konventionellen Tuned Mass Damper (TMD) - Pendeltyp mit vertikal bewegtem Aufhängepunkt beobachtet werden kann.

Aus den oben genannten Gründen scheint es zweckmäßig zu sein das mechanische Modell des Einfreiheitsgrad (single-degree-of-freedom, SDOF) Schwingers auf einen zusätzlichen vertikalen DOF zu erweitern, wie von Reiterer und Hochrainer⁵ ausgeführt. Es wird ein geeignetes mechanisches Modell erarbeitet und numerische Computersimulationen unter harmonischer Krafterregung durchgeführt, außerdem wird ein Modellversuchsstand, entwickelt und konstruiert im Labor für Modelldynamik des Instituts für Allgemeine Mechanik, (Leitung: ao.Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Rudolf Heuer), präsentiert, wie in der Abb. 3.2 dargestellt. Der Modellversuchsstand, ein ebenes, translatorisch bewegtes Pendel, auf dessen unterer horizontalen Pendelmasse ein Flüssigkeitstilger fixiert ist, wird über zwei entsprechend positionierte Elektromagnetische Schwingungsgeber, (Typ Brüel&Kjaer 4808), sowohl horizontal als auch vertikal angeregt. Eine detaillierte Beschreibung

der durchgeführten Modellversuche findet sich in Abschnitt 3.4. Die experimentellen Ergebnisse werden mit jenen der numerischen Studie verglichen und zeigen eine ausgesprochen gute Übereinstimmung, wie in Abschnitt 3.5 dargelegt.

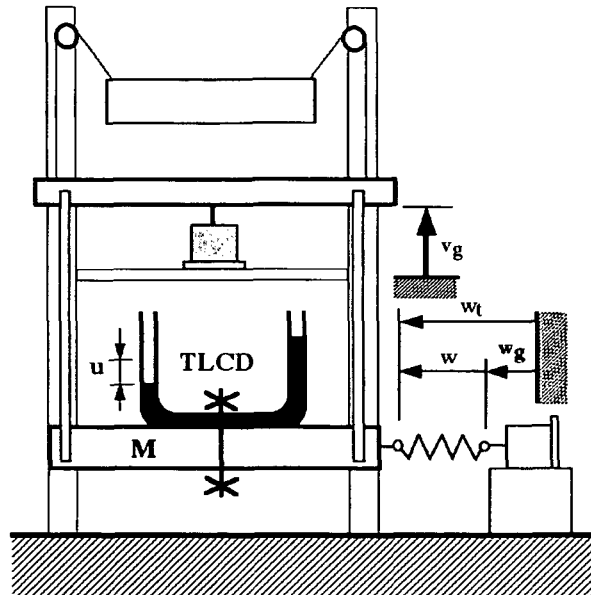


Abb. 3.2: Modellversuchsstand: Hauptsystem mit Flüssigkeitstilger auf starrem Riegel unter kombinierter horizontaler und vertikaler harmonischer Anregung; Laboratorium für Modelldynamik am Institut für Allgemeine Mechanik E201

3.2 Mechanisches Modell

3.2.1 Substruktur Methode – Flüssigkeitstilger freigeschnitten

Für die Ermittlung der Bewegungsgleichung des Flüssigkeitstilgers wird eine Substruktur Methode angewendet. Diese Methode ist im Ingenieurwesen weit verbreitet und erweist sich für komplexe Problemstellungen als äußerst günstig, wie z.B. von Meirovitch⁶ angegeben. Zu diesem Zweck wird in einem ersten Schritt der Flüssigkeitstilger vom Hauptsystem abgetrennt und im freigeschnittenen Zustand einer totalen horizontalen w_t und vertikalen v_t Boden- oder Geschoßanregung ausgesetzt, wie in Abb. 3.3 illustriert. Nach Herleitung der Bewegungsgleichung zufolge dieser beiden Anregungsarten werden in einem zweiten Schritt die

Reaktionskraftkomponenten in horizontaler F_x und vertikaler F_z Richtung, sowie die Komponente des Reaktionsmoments M_{Ay} bezüglich eines bewegten Bezugspunktes A berechnet. Die Reaktionskraft \bar{F} und das Reaktionsmoment \bar{M}_A entstehen aus der Dynamik des Flüssigkeitstilgers und wirken dann resultierend auf die Flüssigkeit.

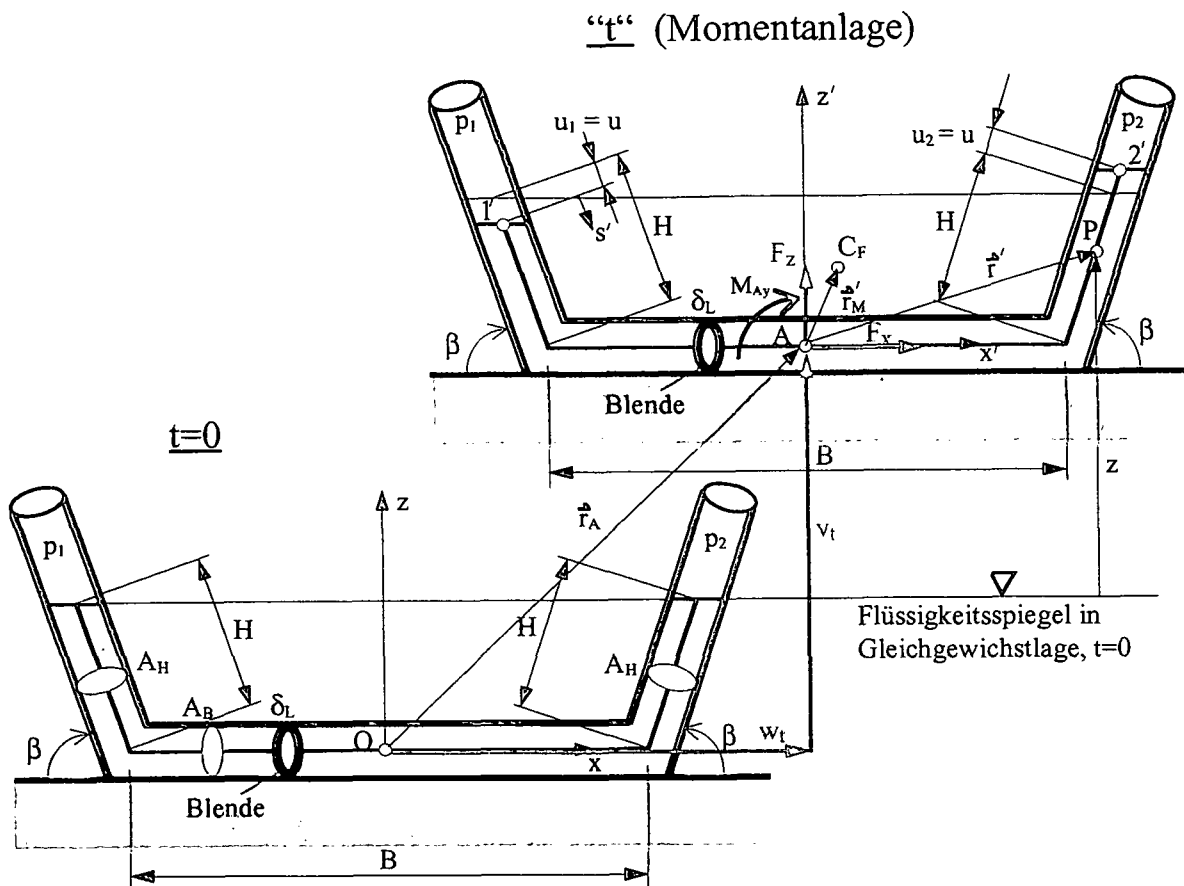


Abb. 3.3: Flüssigkeitstilger unter kombinierter horizontaler w_t und vertikaler v_t Anregung; Lage des Tilgers, $t=0$; Momentanlage des Tilgers mit ausgelenktem Stromfaden, "t"; Parallel verschobenes Führungssystem; resultierende Kraftkomponenten F_x , F_z und Moment M_{Ay} ; $A_H \geq A_B$

Die Parameter des Flüssigkeitstilgers sind gegeben durch die horizontale Länge des Flüssigkeitsfadens B und die schräge Länge des Flüssigkeitsfadens im Gleichgewichtszustand H , mit den Querschnittsflächen A_H in den geneigten Schenkeln und A_B im horizontalen Teil des Rohres. Der Neigungswinkel β der

geneigten Rohrteile, gemessen von der Horizontalen, soll im Bereich $\pi/6 < \beta \leq \pi/2$ liegen. Weiters bezeichnet ρ die Dichte des strömenden Mediums, z.B. beträgt diese für Wasser $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$. Die relative, instationäre, inkompressible Strömung der Flüssigkeit im starren Behälter und im Rahmen der Stromfadentheorie wird über die Lagekoordinate der freien Flüssigkeitsoberfläche $u(t)$ beschrieben. Unter der Annahme eines geschlossenen und luftgefüllten Rohrleitungssystems wird sich an beiden Enden der ausgelenkten Flüssigkeitsoberfläche eine nicht vernachlässigbare Druckdifferenz $\Delta p = p_2 - p_1$ ausbilden. Die dadurch entstehende Luftfeder verstärkt die Wirkung der rückstellenden Kraft, welche bei offenem Rohr nur durch die Schwerkraft bewirkt wird, wie im Abschnitt 3.2.3 ausgeführt. In Abb. 3.3 bezeichnet weiters \vec{r}_M den Vektor vom bewegten Bezugspunkt A zum momentanen Massenmittelpunkt C_F des ausgelenkten Flüssigkeitsfadens, zerlegt im Führungssystem.

3.2.2 Instationäre Bernoulli-Gleichung in einem translatorisch bewegten Bezugssystem

Für die Ermittlung der Bewegungsgleichung wird eine verallgemeinerte Bernoulli-Gleichung entlang der momentanen, relativen, instationären Stromlinie in einem translatorisch bewegten Bezugssystem formuliert, wie in Ziegler⁷, Seite 390, ausgeführt. Ausgangspunkt für die Herleitung bildet die vektorielle Eulersche Bewegungsgleichung der reibungsfrei strömenden Flüssigkeit im homogenen Schwerfeld, $g = 9.81 \text{ m/s}^2$,

$$\rho \vec{a} = \vec{k} - \text{grad } p, \quad \vec{k} = -\rho g \vec{e}_z. \quad (3-1)$$

Um den Zusammenhang zwischen Druck und Geschwindigkeit in Eulerscher Darstellung zu erhalten wird Gl. (3-1) in Relativgeschwindigkeitsrichtung (Tangentenrichtung \vec{e}_t des Stromfadens) projiziert und anschließend bei fester Zeit t entlang der

Relativstromlinie von $1'$ nach $2'$ integriert, wie in Abb. 3.3 dargestellt. Die rechte Seite der Gl. (3-1) ergibt sich bei translatorischer Verschiebung des Bezugssystems identisch zur konventionellen Bernoulli-Gleichung, unter der voraussetzenden Annahme einer reibungsfreien und inkompressiblen Strömung,

$$\frac{1}{\rho} \int_{1'}^{2'} \bar{k} \cdot \bar{e}_t' ds' - \frac{1}{\rho} \int_{1'}^{2'} \frac{\partial p}{\partial s'} ds' = -g(z_2 - z_1) - \frac{p_2 - p_1}{\rho} . \quad (3-2)$$

Die Differenz $z_2 - z_1$ ergibt sich, nach translatorischer Verschiebung des Tilgers, in Bezug auf ein raumfestes Bezugsniveau welches im Flüssigkeitsspiegel der Gleichgewichtslage zum Zeitpunkt $t=0$ gewählt wird, Abb. 3.3,

$$z_2 - z_1 = (z_2' + v_t) - (z_1' + v_t) = z_2' - z_1' = 2u \sin \beta . \quad (3-3)$$

Der in Tangentenrichtung \bar{e}_t' des relativen Stromfadens zu projizierende absolute Beschleunigungsvektor \bar{a} , Gl. (3-1), muss in seine Anteile aufgegliedert werden. Ausgangspunkt für die Ermittlung der absoluten Beschleunigung ist der zeitlich veränderliche Ortsvektor \bar{r} , gemessen vom raumfesten Bezugspunkt O zu einem betrachteten materiellen Punkt P des relativen Stromfadens, Abb. 3.3,

$$\bar{r} = \bar{r}_A + \bar{r}' . \quad (3-4)$$

Zeitliche Differentiation ergibt die Geschwindigkeit,

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}_A}{dt} + \frac{d\bar{r}'}{dt} = \bar{v}_A + \bar{v}' , \quad (3-5)$$

wo \bar{v}_A die absolute Geschwindigkeit des bewegten Bezugspunktes A und \bar{v}' die Relativgeschwindigkeit angibt. Nochmalige Differentiation liefert schließlich die Beschleunigung in der gesuchten Form

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}_A}{dt} + \frac{d\bar{v}'}{dt} = \bar{a}_A + \bar{a}' , \quad \frac{d\bar{v}'}{dt} = \frac{d'\bar{v}'}{dt} \quad \text{da} \quad \bar{\Omega} = \bar{0} , \quad (3-6)$$

wobei \vec{a}_A den Vektor der absoluten Beschleunigung des Bezugspunktes A und \vec{a} die relative Beschleunigung des betrachteten materiellen Punktes P gegen das translatierende Führungssystem angibt. Die folgende Projektion der Beschleunigung \vec{a} in \vec{e}_t -Richtung des Stromfadens und anschließende Integration über die relative Stromlinie in Strömungsrichtung bei festgehaltener Zeit t unter Beachtung von

$$\vec{a} \cdot \vec{e}_t = \vec{a}_A \cdot \vec{e}_t + \vec{a}' \cdot \vec{e}_t, \quad \vec{a}' \cdot \vec{e}_t = \frac{\partial v'}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{v'^2}{2} \right), \quad (3-7)$$

ergibt nach Einsetzen in Gl. (3-1), unter Berücksichtigung der Gl. (3-2), die gesuchte instationäre Bernoulli-Gleichung in einem translatorisch bewegten Bezugssystem

$$\int_1^2 \frac{\partial v'}{\partial t} ds' + \frac{1}{2} (v_2'^2 - v_1'^2) = -g(z_2 - z_1) - \frac{1}{\rho} (p_2 - p_1) - \int_1^2 \vec{a}_A \cdot \vec{e}_t ds'. \quad (3-8)$$

Die zeitliche Ableitung $\partial / \partial t$ beschreibt die relative instationäre Änderung im bewegten Führungssystem. Die Terme auf der linken Seite entsprechen einem relativen kinetischen Energiezuwachs je Masseneinheit, auf der rechten Seite treten auf die Masseneinheit bezogene Arbeiten der äußeren Gewichtskraft und der inneren Druckkraft auf. Außerdem erscheint auf der rechten Seite ein, ergänzend zur konventionellen Bernoulli-Gleichung, zusätzlicher Korrekturterm welcher die Beschleunigung \vec{a}_A beinhaltet. Diese translatorische Beschleunigung \vec{a}_A des mitbewegten Bezugspunktes A auf dem starren Führungssystem ist gegeben durch,

$$\vec{a}_A = \ddot{w}_t \vec{e}_x + \ddot{v}_t \vec{e}_z, \quad (3-9)$$

wo \ddot{w}_t die totale horizontale und \ddot{v}_t die totale vertikale Beschleunigung, bezogen auf ein raumfestes Koordinatensystem, definieren, wie in Abb. 3.3 eingetragen. Die folgende Projektion der Beschleunigung \vec{a}_A in Tangentenrichtung \vec{e}_t der relativen Stromlinie wird bereichsweise durchgeführt, entsprechend Abb. 3.4.

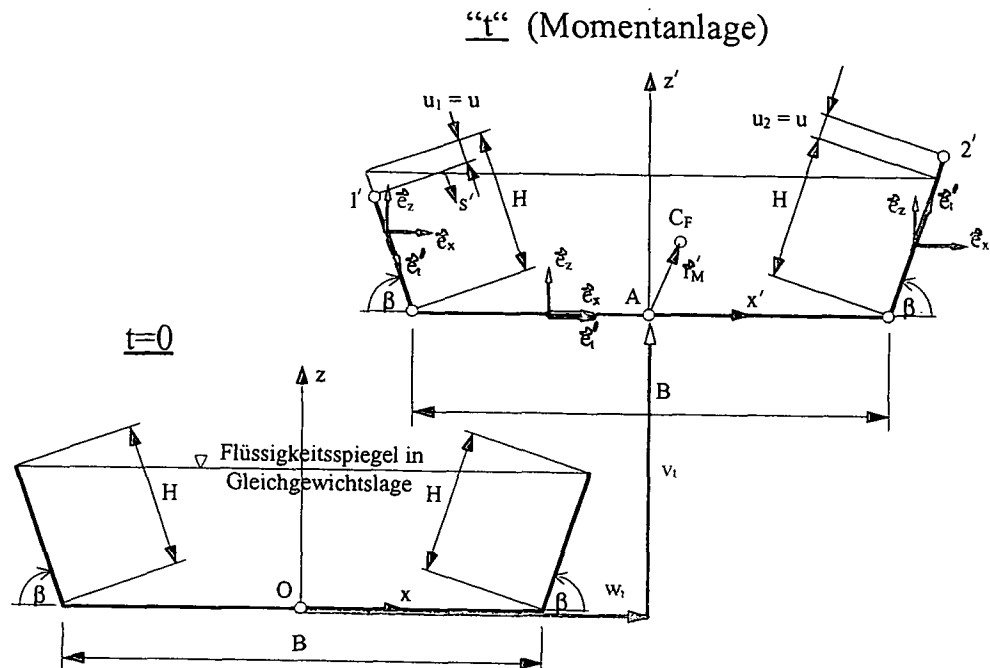


Abb. 3.4: Relativstromlinie zum Zeitpunkt $t = 0$; momentane Relativstromlinie in ausgelenkter Lage des Stromfadens zum Zeitpunkt " t "

Die Gesamtlänge der Relativstromlinie $\int_1^{2'} ds' = (H - u) + B + (H + u)$ wird wie folgt aufgespalten

$$\int_1^{2'} ds' = \int_0^{(H-u)} ds'_1 + \int_0^B ds'_2 + \int_0^{(H+u)} ds'_3 \quad (3-10)$$

Für die Bereiche $0 \rightarrow (H - u)$: $\bar{e}_x \cdot \bar{e}'_1 = \cos \beta$, $\bar{e}_z \cdot \bar{e}'_1 = -\sin \beta$, $0 \rightarrow B$: $\bar{e}_x \cdot \bar{e}'_1 = 1$, $\bar{e}_z \cdot \bar{e}'_1 = 0$ und von $0 \rightarrow (H + u)$: $\bar{e}_x \cdot \bar{e}'_1 = \cos \beta$, $\bar{e}_z \cdot \bar{e}'_1 = \sin \beta$, ergibt sich der Korrekturterm aus Gl. (3-8) durch abschnittsweise Integration gemäß Gl. (3-10) zu

$$\int_1^{2'} \bar{a}_A \cdot \bar{e}'_1 ds' = \ddot{w}_t \int_1^{2'} \bar{e}_x \cdot \bar{e}'_1 ds' + \ddot{v}_t \int_1^{2'} \bar{e}_z \cdot \bar{e}'_1 ds' = (B + 2H \cos \beta) \ddot{w}_t + 2u \sin \beta \ddot{v}_t \quad (3-11)$$

Nach Einsetzen von Gl. (3-11) in Gl. (3-8) erhält man die folgende instationäre verallgemeinerte Bernoulli-Gleichung

$$\int_1^2 \frac{\partial \dot{v}}{\partial t} ds + \frac{1}{2} (v_2'^2 - v_1'^2) = -g(z_2 - z_1) - \frac{1}{\rho} (p_2 - p_1) - \frac{\Delta p_L}{\rho} - (B + 2H \cos \beta) \ddot{w}_t - 2u \sin \beta \ddot{v}_t, \quad (3-12)$$

wobei der zusätzlich eingeführte Term Δp_L auf der rechten Seite die Druckverluste zufolge viskoser und turbulenter Effekte in der instationär strömenden Flüssigkeit berücksichtigt

$$\Delta p_L = \frac{\rho |\dot{u}| \dot{u}}{2} \lambda(\text{Re}) . \quad (3-13)$$

λ definiert die dimensionslose Rohrwiderstandszahl, deren Größe bei stationärer mittlerer Geschwindigkeit in Abhängigkeit von der Reynoldszahl und dem Rauigkeitsparameter der Rohrwand bestimmt ist, wie z.B. in Ziegler [7, Seite 525] dargelegt. Die dimensionslose Reynoldszahl ist definiert durch

$$\text{Re} = \frac{2R\dot{u}}{\nu} , \quad (3-14)$$

wo R den Rohrradius, \dot{u} die mittlere Strömungsgeschwindigkeit und $\nu = \eta / \rho$ die kinematische Zähigkeit bezeichnen. Der Materialparameter η ist der dynamische Zähigkeitsbeiwert. Für Wasser bei 20°C ist $\nu = 0.30 \times 10^{-6} \text{ m}^2 / \text{s}$. Die Strömung des Flüssigkeitsfadens im Rohr ist ein instationärer Prozess, d.h. eine eventuell laminare Anlaufströmung schlägt um in turbulente Strömung (ab $\text{Re}_K \geq 2320$) und umgekehrt. Die Energiedissipation bzw. Dämpfung der Flüssigkeitsschwingung wird vorwiegend durch Turbulenzeffekte in der Strömung hervorgerufen. Insbesondere lässt sich der Anteil an Turbulenzdämpfung durch den Einbau einer passenden Blende in den Flüssigkeitsstrom zusätzlich steigern, wie in Abb. 3.3 eingetragen. Eine ausführliche Zusammenstellung von Verlustfaktoren für stationäre Strömung verschiedenster Rohrteile wie z.B. Eckbogen, Richtungsänderungen, Abzweiger sowie Verluste zufolge unterschiedlichster Einbauteile, wie z.B. Blenden, Gitter, etc. in die strömende Flüssigkeit findet sich in Idelchik⁸, Fried⁹ und Blevins¹⁰. Unter der Annahme des wesentlichen Turbulenzdämpfungsanteils für Δp_L , Gl. (3-13) in Gl.

(3-12), und unter Beachtung der Symmetrie, mit $v_1' = v_2' = \dot{u}$ sowie der Differenz der lotrechten Koordinaten $z_2 - z_1$ aus Gl. (3-3), liefert die Integration über die instationäre Geschwindigkeitsverteilung entlang der momentanen Relativstromlinie in Gl. (3-12), mit der Kontinuitätsbeziehung $\dot{m}(t) = \rho A(s') v'(s', t) = \rho A_H \dot{u}(t)$,

$$\int_1^2 \frac{\partial v'}{\partial t} ds' = \left(2H + B \frac{A_H}{A_B} \right) \ddot{u} = L_{eff} \ddot{u}, \quad (3-15)$$

folgt nach einigen Schritten der Umordnung folgender Ausdruck für die nichtlineare, parametererregte Bewegungsgleichung des Flüssigkeitstilgers

$$\ddot{u} + \delta_L |\dot{u}| \dot{u} + \frac{\Delta p}{\rho L_{eff}} + \omega_A^2 \left[1 + \frac{\ddot{v}_t}{g} \right] u = -\kappa \ddot{w}_t, \quad \Delta p = p_2 - p_1, \quad \delta_L = \frac{\lambda}{2L_{eff}}, \quad \omega_A^2 = \frac{2g}{L_{eff}} \sin \beta. \quad (3-16)$$

In Gl. (3-16) ist κ ein von der Geometrie des Tilgers abhängiger dimensionsloser Faktor und L_{eff} ist die effektive Länge des Flüssigkeitsfadens, Gl. (3-15),

$$\kappa = \frac{B + 2H \cos \beta}{L_{eff}}, \quad L_{eff} = 2H + \frac{A_H}{A_B} B. \quad (3-17)$$

Der Ausdruck für die effektive Länge kann sehr anschaulich als äquivalente Länge eines Flüssigkeitstilgers mit konstanter Querschnittsfläche A_H und gleicher kinetischer Energie gedeutet werden. Der in Abb. 3.3 dargestellte und sowohl numerisch als auch experimentell untersuchte Flüssigkeitstilger besitzt keinen dichten Verschluss an den Rohrenden. Das aufgrund der Bewegung des Flüssigkeitsfadens an einem Rohrende ausgepresste und gleichzeitig am gegenüberliegenden Rohrende angesaugte Luftvolumen hat nur eine sehr geringe Masse. Dem zur Folge darf der an der Oberfläche der Flüssigkeitssäule vorhandene Luftdruck gleich dem äußeren Umgebungsdruck p_0 gesetzt und die Druckdifferenz $p_2 - p_1$ näherungsweise vernachlässigt werden, $\Delta p \approx 0$. Für den offenen ungedämpften Flüssigkeitstilger ist dann die Eigenkreisfrequenz durch,

$$\omega_A = \sqrt{\frac{2g}{L_{eff}} \sin \beta} \quad , \quad (3-18)$$

gegeben, in Gl. (3-16) ist dann $\Delta p = 0$ und $\delta_L = 0$ zu setzen.

Eine Untersuchung der Wirkung der Luftfeder bei dicht verschlossenen Rohrenden findet sich im Abschnitt 3.2.3, insbesondere geht dann die Bewegungsgleichung (3-16) in Gl. (3-28) über. Die Eigenkreisfrequenz des ungedämpften geschlossenen Flüssigkeitstilgers ist durch Gl. (3-29) gegeben und wird durch die Wirkung der Luftfeder entsprechend erhöht.

In Gl. (3-16) wurde die dimensionslose Rohrwiderstandszahl λ durch den Verlustkoeffizienten $\delta_L = \lambda / 2L_{eff}$ ersetzt. Der Verlustkoeffizient δ_L setzt sich, wie zuvor erwähnt, zum einen aus überwiegend turbulenten Verlusten entlang der Relativstromlinie und zum anderen aus zusätzlichen Verlusten aufgrund der in die Strömung eingebauten Blende zusammen. Die Größe des Verlustkoeffizienten δ_L kann über den Blendendurchmesser festgelegt werden. Ausschlaggebend für die Größe der Verluste, zufolge eingebauter Blende, in einer stationären Strömung ist das Querschnittsverhältnis $\bar{f} = A_{Blende} / A_B$, angegeben in Idelchik [8]. Aus dem in Abb. 3.5 dargestellten Diagramm kann der Verlustkoeffizient λ , bei stationärer Strömung, in Abhängigkeit vom Querschnittsverhältnis \bar{f} abgelesen werden.

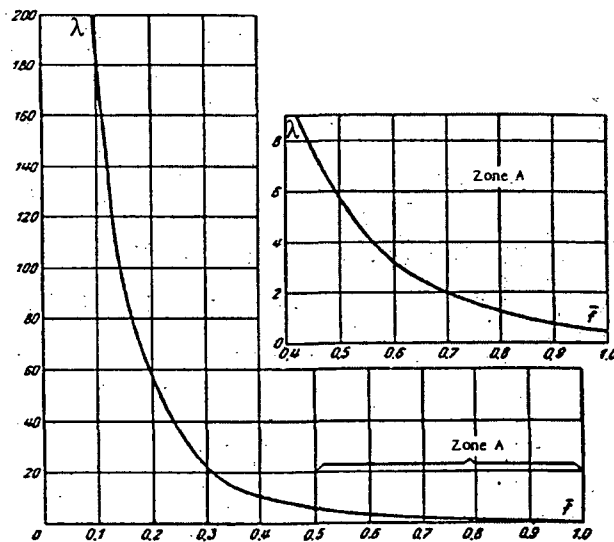


Abb. 3.5: Diagramm des Verlustfaktors λ in Abhängigkeit vom Querschnittsverhältnis \bar{f} für stationäre Strömung; Quelle: Idelchik [8]

Die Bewegungsgleichung des Flüssigkeitstilgers, Gl. (3-16), ist aufgrund der vorhandenen Turbulenzdämpfung $\delta_L|\dot{u}|\dot{u}$ eine nichtlineare Gleichung und zusätzlich durch die vertikale Anregung \ddot{v}_t parametererregt. Im Hinblick auf den optimalen Entwurf des Flüssigkeitstilgers ist es notwendig den turbulenten Dämpfungsterm δ_L mittels eines Energieprinzips in einen äquivalenten linear viskosen Dämpfungsterm ζ_A überzuführen. Es wird gefordert dass die innerhalb einer Schwingungsperiode T_0 dissipierte Energie für das nichtlineare System mit turbulentem Dämpfungsterm δ_L und für das lineare System mit viskosem Dämpfungsterm ζ_A gleich sein muss, Hochrainer [3, Seite 234]. Für diesen Energievergleich wird die Bewegungsgleichung der freien Schwingung des Flüssigkeitstilgers herangezogen und in folgender Form verglichen

$$E = \int_0^T \left| (\delta_L |\dot{u}| \dot{u} + \omega_A^2 u) \dot{u} \right| dt = \int_0^T \left| (2\zeta_A \omega_A \dot{u} + \omega_A^2 u) \dot{u} \right| dt . \quad (3-19)$$

Aus dieser Forderung resultiert unter der Annahme einer zeitlich harmonischen freien Schwingung $u(t) = A \cos \omega t$, der äquivalente lineare viskose Dämpfungsterm

$$\zeta_A = \frac{4U_0\delta_L}{3\pi} , \quad (3-20)$$

wo U_0 die Schwingungsamplitude des Flüssigkeitsfadens und ζ_A den linearisierten Dämpfungsbeiwert definiert. Für numerische Studien wird U_0 im Allgemeinen gleich der maximalen Schwingungsamplitude U_{\max} des Flüssigkeitsfadens gesetzt, wie in Abschnitt 3.3.2 ausgeführt. Die Bewegungsgleichung mit linearisierten Dämpfungsglied des Flüssigkeitstilgers ergibt sich unter Beachtung von $\Delta p \approx 0$ zu

$$\ddot{u} + 2\zeta_A \omega_A \dot{u} + \omega_A^2 \left[1 + \frac{\ddot{v}_t}{g} \right] u = -\kappa \ddot{w}_t . \quad (3-21)$$

Aus Gl. (3-20) erkennt man, dass die für nichtlineare Schwingungen typische Amplitudenabhängigkeit der Lösungsfunktion nach wie vor erhalten bleibt, da sich der lineare viskose Dämpfungsterm ζ_A proportional zur Schwingungsamplitude U_0 ergibt. Im Zuge von numerischen Studien wird ζ_A als bereichsweise konstant

festgesetzt und für einen definierten Amplitudenbereich mit Hilfe von Ausschwingversuchen ermittelt, wie in Abschnitt 3.3.2 ausgeführt.

Ein Vergleich der linearisierten Bewegungsgleichung, Gl. (3-21), für den Flüssigkeitstilger unter kombinierter translatorischer Anregung, mit der konventionellen Gleichung für den rein horizontal erregten Tilger, angegeben z.B. in Hochrainer [3, Seite 78], lässt eine Zeitabhängigkeit im Systemparameter der Steifigkeit erkennen, die durch den zufolge vertikaler Anregung zusätzlich auftretenden Term

$$\omega_A^2 \frac{\ddot{v}_t}{g} u, \quad (3-22)$$

hervorgerufen wird. In der dargelegten numerischen Studie wird die linearisierte Bewegungsgleichung, Gl. (3-21), dazu verwendet um optimale Parameter des Frequenzverhältnisses zwischen Haupt- und Sekundärsystem und der Dämpfung des Flüssigkeitstilgers zu berechnen, wie in Abschnitt 3.3.1 ausgeführt. Es ist jedoch wichtig darauf hinzuweisen und zu verstehen, dass die linearisierte Gleichung nur für einen ganz bestimmten Bereich der Schwingungsamplitude U_0 des Flüssigkeitsfadens anzuwenden ist. Im Falle der Parameterresonanz werden Schwingungsamplituden erreicht, die das Maximum des durch numerische Studien festgelegten Wertes U_{\max} in hohem Maße überschreiten und eine Adaptierung des äquivalenten linearen viskosen Dämpfungsterms ζ_A notwendig machen. Um diese ständige Adaptierung zu vermeiden, wird die äquivalente linear viskose Dämpfung $2\zeta_A \omega_A \dot{u}$ durch die nichtlineare Turbulenzdämpfung $\delta_L |\dot{u}| \dot{u}$ ersetzt, Gl. (3-16), und dadurch eine dem Quadrat der Geschwindigkeit proportionale Dämpfung induziert. Ein Vergleich der so erhaltenen numerischen Ergebnisse mit jenen aus dem Experiment zeigt eine ausgezeichnete Übereinstimmung und es kann daraus gefolgert werden, dass die nichtlineare Gleichung das physikalische Verhalten von Flüssigkeitstilgern unter Parameterresonanz, hervorgerufen durch vertikale Anregungen, wesentlich besser beschreibt als das linearisierte Modell. Zudem wird sich in Abschnitt 3.3.2 zeigen, dass nur bei Verwendung der Turbulenzdämpfung

eine Begrenzung der Schwingungsamplitude des Flüssigkeitstilgers bei Eintreten von Parameterresonanz möglich ist.

In Abb. 3.6 ist der Verlauf des linearen $2\zeta_A\omega_A\dot{u}$, ($\zeta_A = 0.045$, $\omega_A = 2\pi 0.90$), und nichtlinearen Dämpfungsterms $\delta_L|\dot{u}|\dot{u}$, ($\delta_L = 1.325$), in Abhängigkeit von der relativen Schwinggeschwindigkeit \dot{u} abgebildet, wobei für den Wert der im Experiment maximal erreichbaren Amplitude $U_{\max} = 80.00\text{ mm}$ gewählt wurde. Interessant ist die Feststellung, dass bis zu einem bestimmten gemeinsamen Schnittpunkt die Turbulenzdämpfung sogar geringere Werte liefert als die äquivalente lineare Dämpfung, d.h. für kleine Schwingungsamplituden überschätzt die lineare Dämpfung den realen Wert. Nach Überschreiten des gemeinsamen Schnittpunktes liefert der lineare Term jedoch viel zu geringe Dämpfungswerte und unterschätzt die Dämpfung des Flüssigkeitstilgers, eine Adaptierung des linearen Dämpfungskoeffizienten ζ_A ist dann notwendig.

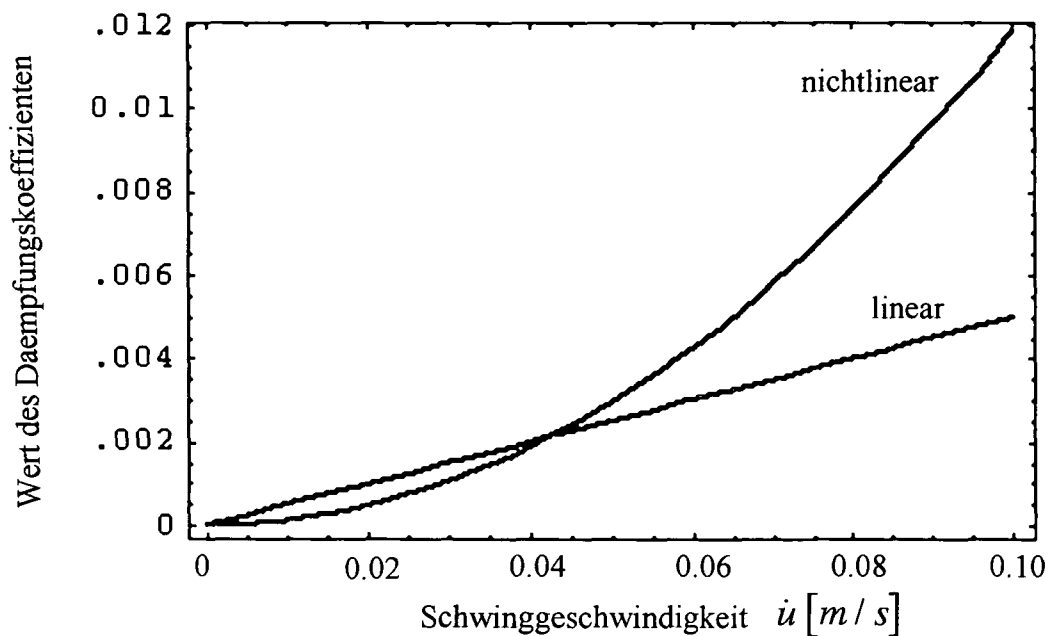


Abb. 3.6: Vergleich des linearen $2\zeta_A\omega_A\dot{u}$ und nichtlinearen $\delta_L|\dot{u}|\dot{u}$ Dämpfungsterms

3.2.3 Geschlossene Rohrenden – Effekt der Luftfeder

Wie bereits in Abschnitt 3.2.1 erwähnt wurde bildet sich unter der Annahme eines geschlossenen Rohrleitungssystems an beiden Enden der ausgelenkten Flüssigkeitsoberfläche eine nicht vernachlässigbare Druckdifferenz $\Delta p = p_2 - p_1$ aus. Das eingeschlossene Luftvolumen, dessen Größe in Abhängigkeit von der Lagekoordinate der freien Flüssigkeitsoberfläche $u(t)$ zeitlich schwankt, ist einem ständigen Wechsel von Verdichtung und Entspannung ausgesetzt. Diese Volumenänderung führt gleichzeitig zu einer Änderung des Druckes im Gas und dadurch zu einer, zusätzlich zur Schwerkraft entstehenden, rückstellenden Wirkung der ausgelenkten Flüssigkeitssäule (Luftfeder). Die gesuchte Druckdifferenz $\Delta p = p_2 - p_1$ ergibt sich aus der Gasgleichung für eine polytrope Zustandsänderung (Polytropenexponent n), wie z.B. von Ziegler [7, Seite 82] ausgeführt, und unter Beachtung der Luftvolumina im ausgelenkten Zustand des Flüssigkeitsfadens,

$$V_1 = V_0 + A_H u, \quad V_2 = V_0 - A_H u, \quad (3-23)$$

zu

$$\Delta p(u) = p_0 \left[\left(\frac{V_0}{V_0 - A_H u} \right)^n - \left(\frac{V_0}{V_0 + A_H u} \right)^n \right]. \quad (3-24)$$

Die Gl. (3-24) wird auch von Hochrainer [3, Seite 83] dargelegt. Dabei bezeichnet V_0 das anfängliche Luftvolumen im Gleichgewichtszustand der Flüssigkeitssäule und p_0 den zugehörigen anfänglichen Druck, (z.B. gleich dem Luftdruck $p_0 = 10^5 \text{ Pa}$). Eine Linearisierung des Ausdruckes für $\Delta p(u)$, Gl. (3-24), erhält man durch Entwicklung der nichtlinearen Funktion in eine Taylorreihe, (unter Vernachlässigung der Glieder höherer Ordnung),

$$\Delta p(u) = \frac{2n p_0 A_H}{V_0} u + O(u^3) \approx \frac{2n p_0}{H_L} u, \quad (3-25)$$

wo $H_L = V_0 / A_H$ die Höhe der Luftfeder definiert. Die Abweichung der exakten nichtlinearen Druckdifferenz, Gl. (3-24), zur linearisierten, Gl. (3-25), in Abhängigkeit von der dimensionslosen Auslenkung $\chi = u / H_L$ ist für den Polytropenexponenten $n = 1.2$ in der Abb. 3.7 dargestellt.

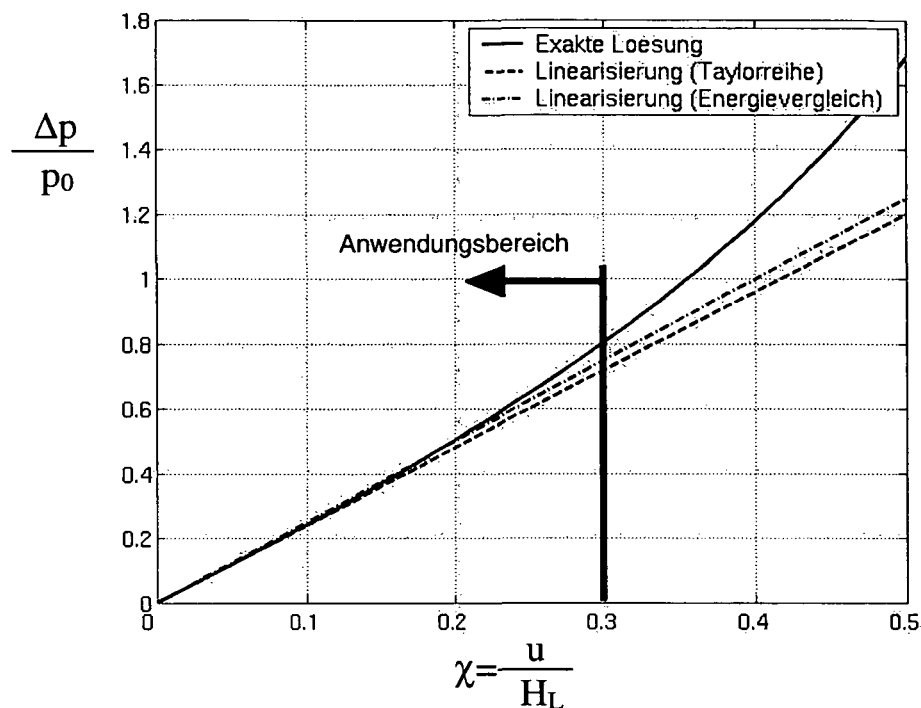


Abb. 3.7: Abweichung der exakten nichtlinearen Druckdifferenz zur linearisierten (mit Hilfe einer Taylorreihenentwicklung) bzw. zu jener die durch einen Energievergleich erhalten wird, $n = 1.2$

Man erkennt, dass bis zu einem Wert von $\chi = 0.25$ nur eine sehr geringe Abweichung in der Druckdifferenz Δp vorhanden ist, d.h. die Linearisierung mittels Taylorreihe ist in diesem Bereich zulässig. Für sehr große Schwingungsamplituden $u(t)$ wird die rückstellende Wirkung der Luftfeder wegen des überlinearen Gesetzes unterschätzt.

Eine etwas bessere Art der Linearisierung erhält man durch einen Energievergleich, ähnlich zu dem bereits in Abschnitt 3.2.2 gezeigten, (Linearisierung der Turbulenzdämpfung). Es wird hier gefordert, dass die bei einer vorgegebenen maximalen Schwingungsamplitude $u = U_{\max}$ gespeicherte potentielle Energie in einer linear elastischen Feder (Federsteifigkeit K^*) und in der nichtlinearen Luftfeder gleich sein muss, wie auch von Hochrainer [3, Seite 84] dargelegt,

$$\frac{1}{2} K^* U_{\max}^2 = \int_{u=0}^{U_0} \Delta p(u) A_H du, \quad (3-26)$$

woraus unmittelbar die äquivalente lineare Federsteifigkeit berechnet werden kann,

$$K^* = \frac{\int_{u=0}^{U_0} \Delta p(u) A_H du}{\frac{1}{2} U_{\max}^2}. \quad (3-27)$$

In der Abb. 3.7 ist auch der Verlauf der äquivalent linearisierten Luftfeder für $U_0 = 0.25 H_L$ in Abhängigkeit von der dimensionslosen Auslenkung χ vergleichsweise dargestellt. Die tatsächliche Wirkung der nichtlinearen Luftfeder wird bei Anwendung des Energieprinzips nur dann unterschätzt, wenn $\chi > 0.30$. Es ist noch anzumerken, dass in der Realität nichtlineare Effekte der Luftfeder eine zusätzliche Rückstellkraft induzieren. Dadurch entsteht neben der vorhandenen Turbulenzdämpfung, Gl.(3-20), ein zusätzlicher positiver Einfluss in Bezug auf die Vermeidung von Parameterresonanz, wie in Abschnitt 3.2.5 ausführlich dargelegt.

Setzt man nun die linearisierte Druckdifferenz Δp , Gl. (3-25), in die nichtlineare Bewegungsgleichung des Flüssigkeitstilgers, Gl. (3-16), ein, dann erhält man nach zweckmäßiger Umordnung,

$$\ddot{u} + \delta_L |\dot{u}| \dot{u} + \omega_A^2 \left[1 + \frac{2 \ddot{v}_t}{L_{eff} \omega_A^2} \sin \beta \right] u = -\kappa \ddot{v}_t, \quad (3-28)$$

wobei die Eigenkreisfrequenz ω_A zufolge der Wirkung der Luftfeder nun wie folgt definiert ist,

$$\omega_A = \sqrt{\frac{2g \sin \beta}{L_{eff}} + \frac{2np_0}{\rho L_{eff} H_L}} = \sqrt{\frac{2g}{L_{eff}} \left(\sin \beta + \frac{n p_0 / \rho g}{H_L} \right)}, \quad (3-29)$$

$p_0 / \rho g$ entspricht dabei der statischen Höhe der Flüssigkeitssäule.

Man erkennt, dass die Eigenkreisfrequenz nun zusätzlich über die Höhe der Luftfeder $H_L = V_0 / A_H$ und dem Initialdruck p_0 gesteuert werden kann. Prinzipiell ist der praktische Anwendungsbereich von Flüssigkeitstilgern mit offenen Rohrenden auf sehr niedrige Frequenzen bis ca. 0.5 Hz beschränkt. Eine Erhöhung der Eigenfrequenzen erreicht man, ohne Betrachtung der Luftfeder, einerseits durch Minimierung der effektiven Länge des Flüssigkeitsfadens L_{eff} und andererseits durch die Wahl von $\beta = \pi / 2$. Hierbei ist jedoch darauf zu Achten, dass L_{eff} nicht beliebig verkleinert werden kann sondern aus der entsprechend gewählten Flüssigkeitsmasse m_f unter Beachtung der Querschnitte A_H und A_B rückgerechnet werden muss. Der Einsatz eines geschlossenen Rohrleitungssystems, dass in der Praxis immer ausgeführt wird, schafft daher einen großen Vorteil. Durch passende Wahl der Luftfederhöhe H_L lässt sich nämlich die Eigenfrequenz des Flüssigkeitstilgers effizient steigern. Um einen Eindruck von der Wirksamkeit der Luftfeder zu erhalten ist in der Tabelle 3.1 ein Vergleich der Eigenfrequenzen f_A eines Flüssigkeitstilgers (strömendes Medium Wasser, $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$) ohne und mit Luftfeder dargestellt.

Tabelle 3.1: Vergleich der Eigenfrequenzen f_A eines Flüssigkeitstilgers ohne und mit Luftfeder

	Ohne Luftfeder $f_A [\text{Hz}]$	Mit Luftfeder $f_A [\text{Hz}]$
	Neigungswinkel $\beta = \pi / 3$	Neigungswinkel $\beta = \pi / 3$ $H_L = 1 \text{ m}, p_0 = 10^5 \text{ Pa}, n = 1.2$
$L_{\text{eff}} = 1 \text{ m}$	0.65	2.56
$L_{\text{eff}} = 5 \text{ m}$	0.29	1.15
$L_{\text{eff}} = 10 \text{ m}$	0.21	0.81
$L_{\text{eff}} = 20 \text{ m}$	0.15	0.57
$L_{\text{eff}} = 40 \text{ m}$	0.10	0.41

Die Berechnung in Tabelle 3.1 erfolgt unter der Annahme einer Luftfederhöhe von $H_L = 1.00 \text{ m}$ sowie einem anfänglichen Gasdruck im Gleichgewichtszustand der Flüssigkeitssäule $p_0 = 10^5 \text{ Pa}$ (dieser Wert entspricht dem atmosphärischen Luftdruck in Bodennähe). Der Polytropenexponent wird als Mittelwert einer adiabatischen

($n=1.4$) und isothermen Zustandsänderung ($n=1.0$) mit $n=1.2$ gewählt. Man erkennt, dass die Wirkung der Luftfeder die Eigenfrequenz des Flüssigkeitstilgers doch beträchtlich erhöht, (ca. Faktor 4). Diese Tatsache steigert die Attraktivität dieser Tilgerart wiederum wesentlich, da die Eigenfrequenz nach festgelegten Parametern, Winkel β , und L_{eff} noch immer über die Luftfederhöhe H_L eingestellt bzw. nachjustiert werden kann.

3.2.4 Ermittlung der resultierenden Kräfte und Momente

Der Bewegungsgleichung (3-16) nachfolgend werden nun in einem zweiten Schritt die aus der Dynamik des Flüssigkeitstilgers resultierende Kraft \vec{F} und das Moment \vec{M}_A hergeleitet. Die tote Masse des Flüssigkeitstilgers $m_T = m - m_f$, wo m die Gesamtmasse und m_f die Flüssigkeitsmasse bezeichnet, wird der Geschoßmasse, dem Führungssystem, zugeschlagen. Die resultierende Kraft \vec{F} und das Moment \vec{M}_A wirken auf die Flüssigkeit, wie in Abb. 3.3 illustriert. Der Impulssatz für Körper mit konstanter Masse besagt, dass die zeitliche Änderung des absoluten Impulses gleich der Resultierenden der äußeren Kräfte ist,

$$\frac{d\vec{I}}{dt} = \vec{F} \quad , \quad \frac{d\vec{I}}{dt} = \frac{d\vec{I}}{dt} \quad . \quad (3-30)$$

Im Fall des Flüssigkeitstilgers wird die gesamte Flüssigkeitsmasse m_f , in dem als masselos definierten starren Rohr geführt bewegt und für die Anwendung des Impulssatzes in einer Momentanlage zum Zeitpunkt t betrachtet. Der absolute Impulsvektor \vec{I} der Flüssigkeitsmasse m_f ist dann

$$\vec{I} = \int_{m_f} (\vec{v}_A + \vec{v}') dm_f \quad , \quad \vec{v}_A = \dot{w}_t \vec{e}_x + \dot{v}_t \vec{e}_z \quad , \quad \vec{v}'(s') = \dot{u} \frac{A_H}{A(s')} \vec{e}_t(s') \quad , \quad dm_f(s') = \rho A(s') ds' \quad . \quad (3-31)$$

Nach Einsetzen der Geschwindigkeit des Bezugspunktes A , sowie der relativen Geschwindigkeit \vec{v}' in die Gl. (3-31) mit anschließender abschnittsweiser Integration entlang der Relativstromlinie in Strömungsrichtung, Abb. 3.4, erhält man den folgenden analytischen Ausdruck für den zeitlich veränderlichen Impulsvektor \vec{I} ,

$$\begin{aligned} \vec{I} &= \rho A_H \left[(H - u) \begin{pmatrix} \dot{u} \cos \beta + \dot{w}_t \\ 0 \\ -\dot{u} \sin \beta + \dot{v}_t \end{pmatrix} + (H + u) \begin{pmatrix} \dot{u} \cos \beta + \dot{w}_t \\ 0 \\ \dot{u} \sin \beta + \dot{v}_t \end{pmatrix} \right] + \rho A_B B \begin{pmatrix} \dot{u} \frac{A_H}{A_B} + \dot{w}_t \\ 0 \\ \dot{v}_t \end{pmatrix} = \\ &= \rho A_H \begin{pmatrix} 2H(\dot{u} \cos \beta + \dot{w}_t) + \dot{u}B + \frac{A_B}{A_H} B \dot{w}_t \\ 0 \\ 2u\dot{u} \sin \beta + 2H\dot{v}_t + \frac{A_B}{A_H} B \dot{v}_t \end{pmatrix} = \rho A_H \begin{pmatrix} \dot{w}_t \left(2H + \frac{A_B}{A_H} B \right) + \dot{u}(B + 2H \cos \beta) \\ 0 \\ \dot{v}_t \left(2H + \frac{A_B}{A_H} B \right) + 2u\dot{u} \sin \beta \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3-32)$$

Aus der zeitliche Ableitung des Impulsvektors \vec{I} , unter Beachtung von $d\vec{I}/dt = d\vec{I}/dt$, (da keine Drehung des Führungssystems vorliegt, $\vec{\Omega} = 0$), erhält man die auf die Flüssigkeit, im bewegten Bezugspunkt A , wirkenden (dynamischen) Kraftkomponenten F_x und F_z , die statische Gewichtskraft aus der ruhenden Flüssigkeitsmasse m_f ist in der Kraftkomponente F_z nicht enthalten,

$$F_x = m_f (\ddot{w}_t + \bar{\kappa} \ddot{u}), \quad m_f = \rho A_H \left(2H + \frac{A_B}{A_H} B \right) = \rho A_H L_1, \quad (3-33)$$

$$F_z = m_f \left(\ddot{v}_t + \bar{\kappa}_1 \frac{1}{H} (u\ddot{u} + \dot{u}^2) \right), \quad (3-34)$$

$$\bar{\kappa} = \frac{B + 2H \cos \beta}{L_1}, \quad \bar{\kappa}_1 = \frac{2H \sin \beta}{L_1}, \quad L_1 = L_{eff} + \left[1 - \left(\frac{A_H}{A_B} \right)^2 \right] \frac{A_B}{A_H} B, \quad (3-35)$$

wo L_{eff} die effektive Länge des Flüssigkeitsfadens, Gl. (3-17), und L_1 einen von der Querschnittsfläche abhängigen Längenfaktor bezeichnen. Letzterer degeneriert für

den Spezialfall konstanter Querschnitte $A_H = A_B = A$ zu L_{eff} . Die gesamte im Rohrsystem befindliche Flüssigkeitsmasse m_f , definiert mit $m_f = \rho A_H L_1$ diese Länge L_1 . Die von der Geometrie des Tilgers abhängigen dimensionslosen Faktoren $\bar{\kappa}$ und $\bar{\kappa}_1$ können folgendermaßen anschaulich gedeutet werden: $m_{Aw} = \bar{\kappa} m_f$ definiert die bei horizontaler Anregung des Tilgers „aktiv“ bewegte Flüssigkeitsmasse, hingegen gibt $m_{Pw} = m_f (1 - \bar{\kappa})$ die Größe der „passiv“ bewegten Flüssigkeitsmasse an; weiters definiert $m_{Av} = \bar{\kappa}_1 m_f u / H$ die bei vertikaler Anregung des Tilgers „aktiv“ bewegte Flüssigkeitsmasse und demgegenüber $m_{Pv} = m_f (1 - \bar{\kappa}_1 u / H)$ die „passiv“ bewegte Flüssigkeitsmasse. Die impulsive Masse wird auch beim Schwappen eines flüssigkeitsgefüllten starren Behälters mit freier Oberfläche (TLD) beobachtet, wie z.B. von Newmark und Rosenblueth¹¹ dargelegt.

Anschreiben des Drallsatzes um einen gegen das raumfeste Bezugssystem bewegten Bezugspunkt A , eingetragen in Abb. 3.3, liefert

$$\frac{d\bar{D}_A'}{dt} + m_f \bar{r}_M' \times \bar{a}_A = \bar{M}_A, \quad \frac{d\bar{D}_A'}{dt} = \frac{d'\bar{D}_A'}{dt}, \quad (3-36)$$

$$\bar{a}_A = \ddot{w}_t \bar{e}_x + \ddot{v}_t \bar{e}_z, \quad \bar{D}_A' = \int_{m_f} [\bar{r}' \times (\bar{v} - \bar{v}_A)] dm_f = \int_{m_f} \bar{r}' \times \bar{v}' dm_f, \quad (3-37)$$

wo \bar{D}_A' den resultierenden relativen Drallvektor der Flüssigkeitsmasse um den Bezugspunkt A bezeichnet. Weiters bezeichnet m_f die gesamte Flüssigkeitsmasse, \bar{a}_A die absolute Beschleunigung des Bezugspunktes A und \bar{r}_M' den Abstandsvektor zum momentanen Massenmittelpunkt C_F der Flüssigkeit vom bewegten Ursprung A des Führungssystems, eingetragen in Abb. 3.3,

$$\bar{r}_M' = x_M' \bar{e}_x + y_M' \bar{e}_y + z_M' \bar{e}_z = \frac{1}{m_f} \begin{pmatrix} \rho A_H u (B + 2H \cos \beta) \\ 0 \\ \rho A_H (H^2 + u^2) \sin \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\kappa} u \\ 0 \\ \frac{\bar{\kappa}_1}{2H} (H^2 + u^2) \end{pmatrix}. \quad (3-38)$$

Aus Gründen der Vereinfachung wird auch für die Berechnung des Drallvektors der bewegte Bezugspunkt A in die Symmetrieachse des horizontalen Rohrabschnittes gelegt. Aus dieser speziellen Wahl wird ersichtlich, dass nur die resultierenden Impulsvektoren der geneigten Rohrabschnitte einen Beitrag zum relativen Drallvektor \vec{D}_A leisten. Die Integration über das Flüssigkeitsvolumen der geneigten Rohrabschnitte gemäß Gl. (3-37),

$$\vec{D}_A = \rho A_H \left[\int_0^{H-u} \begin{pmatrix} -\frac{B}{2} - (H-u)\cos\beta + s'\cos\beta \\ 0 \\ (H-u)\sin\beta - s'\sin\beta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \dot{u}\cos\beta \\ 0 \\ -\dot{u}\sin\beta \end{pmatrix} ds'_1 + \int_0^{H+u} \begin{pmatrix} +\frac{B}{2} + s'\cos\beta \\ 0 \\ s'\sin\beta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \dot{u}\cos\beta \\ 0 \\ \dot{u}\sin\beta \end{pmatrix} ds'_3 \right] \quad (3-39)$$

liefert

$$\vec{D}_A = -\rho A_H B H \dot{u} \sin\beta \vec{e}_y = -\bar{\kappa}_1 m_f \frac{B}{2} \dot{u} \vec{e}_y . \quad (3-40)$$

Die zeitliche Ableitung des relativen Drallvektors \vec{D}_A liefert unter Berücksichtigung von $d\vec{D}_A/dt = d'\vec{D}_A/dt$, (da $\vec{\Omega} = 0$), den ersten Anteil am gesamten resultierenden Moment \vec{M}_A , Gl. (3-36). Der zweite Anteil aus dem Zusatzglied des Drallsatzes resultiert aus dem Abstand des beschleunigten Bezugspunktes A des Führungssystems zum momentanen Massenmittelpunkt C_f und ergibt sich zu

$$m_f \vec{r}_M' \times \vec{a}_A = m_f \begin{pmatrix} \bar{\kappa} u \\ 0 \\ \frac{\bar{\kappa}_1}{2H} (H^2 + u^2) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \ddot{w}_t \\ 0 \\ \ddot{v}_t \end{pmatrix} = m_f \left[\frac{\bar{\kappa}_1}{2H} (H^2 + u^2) \ddot{w}_t - \bar{\kappa} u \ddot{v}_t \right] \vec{e}_y . \quad (3-41)$$

Summation der beiden Anteile ergibt dann das auf die Flüssigkeit wirkende gesuchte, aber unerwünschte resultierende Moment

$$\bar{M}_A = m_f \left[-\bar{\kappa}_1 \frac{B}{2} \ddot{u} + \bar{\kappa}_1 \frac{1}{2H} (H^2 + u^2) \ddot{w}_t - \bar{\kappa} u \ddot{v}_t \right] \bar{e}_y . \quad (3-42)$$

Das Auftreten eines unerwünschten Momentes ist allgemein bekannt, es existiert auch im Falle eines klassischen mechanischen Schwingungstilgers (TMD, wie in Abb. 3.8 illustriert), da auch hier der momentane Massenmittelpunkt der bewegten Tilgermasse und des zugehörigen Geschoßes nicht in einem Punkt zusammenfallen.

An dieser Stelle soll noch erwähnt werden, dass außer den oben genannten Beiträgen zum resultierenden Moment \bar{M}_A noch ein drittes unerwünschtes Moment existiert. Hervorgerufen durch die im momentanen Massenmittelpunkt C_F exzentrisch angreifende resultierende Gewichtskraft $\bar{G} = -m_f g \bar{e}_z$ entsteht ein zusätzliches pulsierendes, ebenfalls unerwünschtes Moment. Im allgemeinen ist es üblich jegliche Art von Reaktionsmomenten die auf das Hauptssystem einwirken, zu vernachlässigen, insbesondere bei Anwendung von Schwingungstilgern in Hochbaukonstruktionen. Im Hinblick auf die Anwendung von Flüssigkeitsstilgern für weitgespannte Brücken verliert diese, womöglich gewagte Argumentation jedoch ihre Gültigkeit. Hierzu wird auf die Ausführungen in Kapitel 4 verwiesen.

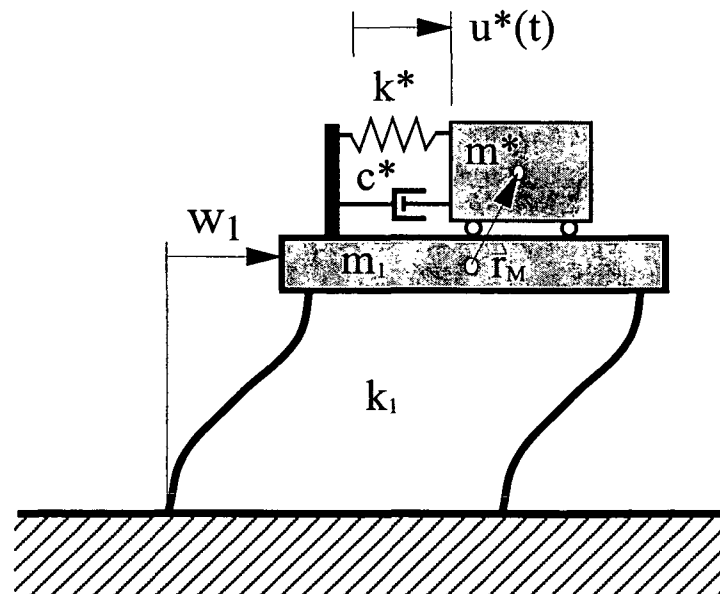


Abb. 3.8: Auftreten des unerwünschten Momentes bei einem klassischen Schwingungstilger, TMD

3.2.5 Vertikale Anregung

Die Bewegungsgleichung des horizontal erregten Flüssigkeitstilgers ist eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten, Gl. (3-16) mit $\ddot{v}_t = 0$. Bei Berücksichtigung einer vertikalen Anregung \ddot{v}_t des freigeschnittenen Tilgers entsteht der zusätzliche Term $\omega_A^2 \frac{\ddot{v}_t}{g} u$ auf der linken Seite von Gl. (3-16), welcher eine Zeitabhängigkeit der Systemsteifigkeit zur Folge hat. In Abwesenheit einer horizontalen Anregung, mit $\ddot{w}_t = 0$, und der Annahme offener Rohrenden, d.h. die Druckdifferenz $\Delta p \approx 0$, weiters unter Vernachlässigung von turbulenter und/oder viskoser Dämpfung, degeneriert Gl. (3-16) zur bekannten Gleichung des Einmassenschwingers mit zeitlich veränderlichem Systemparameter,

$$\ddot{u} + \omega_A^2 \left[1 + \frac{\ddot{v}_t}{g} \right] u = 0 . \quad (3-43)$$

Tritt der zeitlich veränderliche Parameter in Gl. (3-43) als periodische Funktion der Zeit auf, dann spricht man von der Hill'schen Differentialgleichung, wie z.B. in Magnus¹² analysiert. Unter der Annahme einer zeitlich harmonischen Schwankung der vertikalen Anregung, $v_t = v_{t0} \cos v_z t$, geht Gl. (3-43) in einen Spezialfall der Hill'schen Gleichung, in die Mathieu'schen Differentialgleichung über

$$\ddot{u} + \omega_A^2 \left[1 - v_z^2 \frac{v_{t0}}{g} \cos v_z t \right] u = 0 . \quad (3-44)$$

Die Mathieu'sche Gleichung ist ihrer Form nach eine lineare Differentialgleichung mit zeitlich harmonisch veränderlicher Systemsteifigkeit. Die Gleichung ist in geschlossener Form nicht lösbar, ihr Stabilitätsverhalten jedoch - d.h. die Aussage über Beschränktheit bzw. Unbeschränktheit der Lösungsfunktionen - ist z.B. von Merkin¹³, Wittenburg¹⁴ oder Klotter [4] genauestens untersucht. Die Gl. (3-44) besitzt Koeffizienten, in denen die unabhängige Veränderliche, die Zeit t , explizit in der harmonisch Anregung, $v_t = v_{t0} \cos v_z t$, auftritt. Gleichungen dieser Art beschreiben

sogenannte parametererregte Schwingungen für welche die Tatsache kennzeichnend ist, dass sich die Erregung nicht auswirken kann, wenn der Schwinger in seiner Gleichgewichtslage verharrt. Jedoch kann die Gleichgewichtslage unter bestimmten Verhältnissen der Eigenfrequenz zur Erregerfrequenz instabil werden, so dass eine beliebig kleine Anfangsstörung die Aufschaukelung parametererregter Schwingungen auslösen kann (=Parameterresonanz, instabile Lösung). Die Notwendigkeit des Vorhandenseins einer Störung bildet einen weiteren wesentlichen Unterschied zu den erzwungenen Schwingungen. Klassisches Beispiel für einen parametererregten Schwinger ist das Schwebpendel mit vertikal periodisch bewegtem Aufhängepunkt, wie in Abb. 3.9 illustriert und z.B. in Ziegler [7, Seite 445] vorgestellt, vergleichbar mit dem TMD-Pendeltyp.

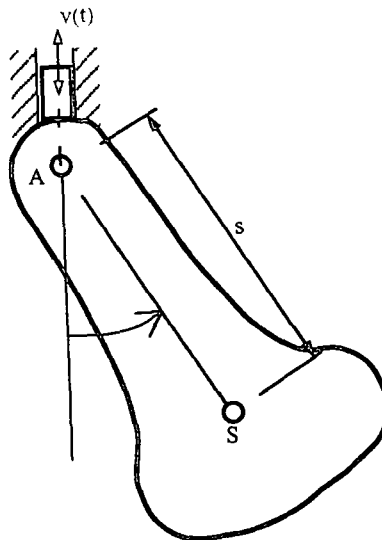


Abb. 3.9: Schwebpendel mit vertikal bewegtem Aufhängepunkt, „Parametererregung“, vorgestellt auch in Ziegler [7, Seite 445]

Zum Zwecke der Untersuchung der Mathieu'schen Gleichung, wird Gl. (3-44) noch in die übliche, mathematisch leichter zu handhabende Normalform übergeführt. Nach Einführen der dimensionslosen Zeit

$$\tau = \nu_z t, \quad (3-45)$$

erhält man die Normalform der Mathieu'schen Gleichung, Klotter [4],

$$u'' + [\lambda + \gamma \cos \tau]u = 0, \quad u' = \frac{du}{d\tau}, \quad (3-46)$$

wo λ und γ zwei wie folgt definierte dimensionslose Parameter darstellen

$$\lambda = \frac{\omega_A^2}{v_z^2}, \quad \gamma = -\frac{v_{t0}}{g} \omega_A^2. \quad (3-47)$$

In Abhängigkeit von der Wahl der beiden Parameter λ und γ erhält man entweder stabile oder instabile Lösungen für die Mathieu'sche Gleichung, wobei auf die Notwendigkeit einer Anfangsstörung hinzuweisen ist. Die Berechnung der Stabilitätsbereiche und deren Grenzlinien lässt sich mit Hilfe der Störungsrechnung, ausgeführt z.B. in Merkin [13], oder mit Hilfe der Methode der langsam veränderlichen Amplitude und Phase nach Krylow und Bogoljubow¹⁵, näherungsweise durchführen, wobei die Resultate in einer λ, γ - Ebene aufgetragen werden. Eine derartige, erstmals von Ince und Strutt ausgerechnete Stabilitätskarte für ein ungedämpftes mechanisches System, zeigt die Abb. 3.10. Die Gebiete der λ, γ - Ebene welche zu stabilen Lösungen der Mathieu-Gleichung führen sind dabei schraffiert dargestellt.

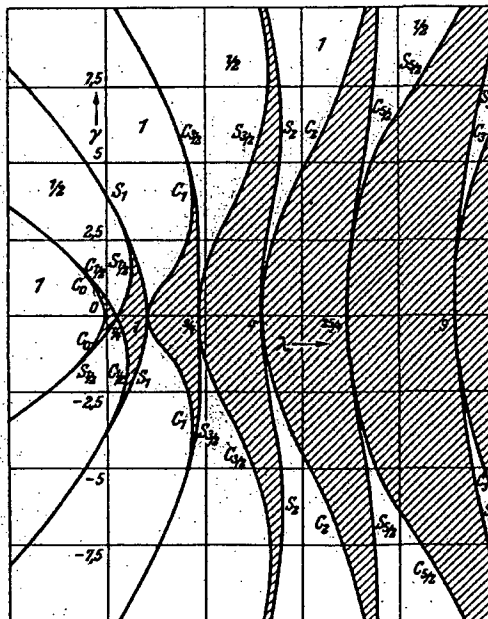


Abb. 3.10: Ince-Strutt'sche Stabilitätskarte für ein parametererregtes ungedämpftes System, Quelle: Klotter [4, Seite 294]

Das physikalische Phänomen des instabilen Verhaltens einer Bewegung für bestimmte Wertepaare λ, γ wird als Parameterresonanz bezeichnet. Aus Abb. 3.10 erkennt man, dass Parameterresonanz für eine unendliche Anzahl von Erregerkreisfrequenzen ν_z in Erscheinung treten kann. Durchschreitet man die Stabilitätskarte für kleine Werte von γ , d.h. kleine vertikale Erregeramplituden ν_{g0} , entlang der λ -Achse, so trifft man an den Stellen $\lambda = n^2/4$, wobei n eine ganze Zahl ist, immer wieder auf Punkte der Instabilität. Die Tatsache, dass sich Parameterresonanz an einer unendlichen Anzahl von Sub- und Superharmonischen Frequenzen ausbildet, ist ebenfalls ein gravierender Unterschied zum konventionellen Resonanzproblem, dass nur für den Fall der Gleichheit von Eigenkreisfrequenz ω_A und Erregerkreisfrequenz ν_z entsteht, ($\lambda = 1$). Weiters soll ausdrücklich darauf hingewiesen werden, dass Parameterresonanz, unabhängig vom Wert der vorhandenen linearen Strukturdämpfung, zu einem unbegrenztem Anwachsen der Schwingungsamplitude des linearen Schwingers führt. Im Falle der Berücksichtigung von Dämpfungseinflüssen, die bei realen Schwingern stets vorhanden sind, verkleinert sich das instabile Gebiet in der Ince-Strutt'schen Karte, wie in Abb. 3.11 illustriert.

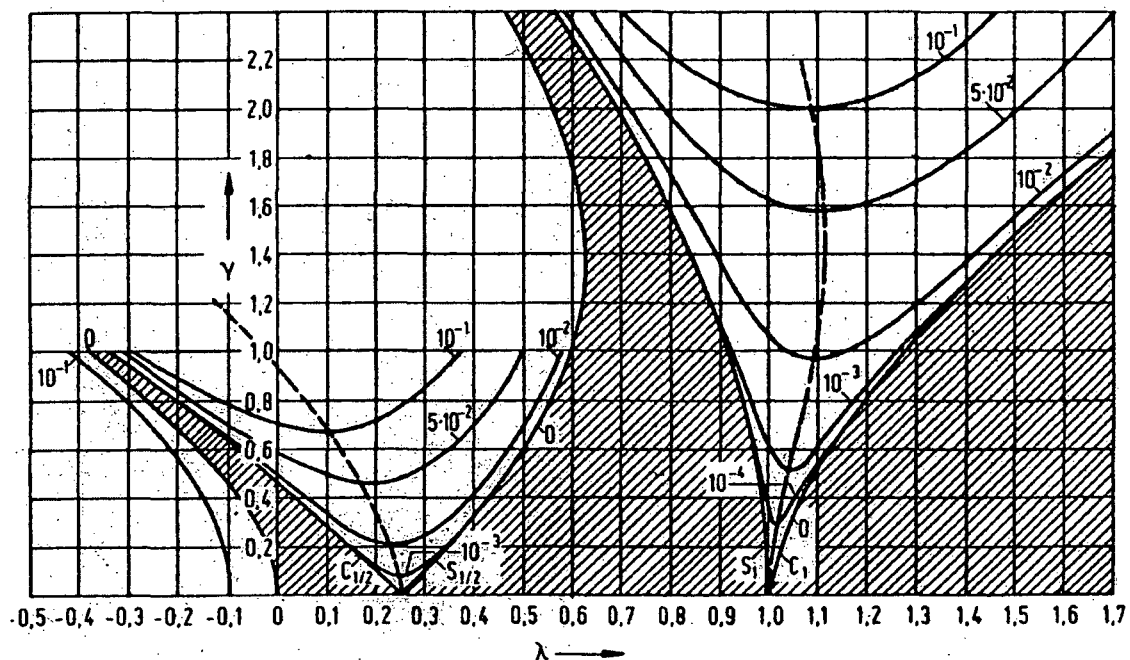


Abb. 3.11: Ince-Strutt'sche Stabilitätskarte für ein parametererregtes linear viskos gedämpftes System; Vergrößerung der stabilen Bereiche zufolge der Dämpfung, Quelle: Klotter [4, Seite 301]

Die Auswirkungen des Dämpfungseinflusses auf die Veränderung der Stabilitätsgebiete und Grenzkurven sind in umfassender Weise z.B. von Klotter [4] oder Kotowski¹⁶ dargelegt. Eine interessante Erscheinung der Ince-Strutt'schen Karte, Abb. 3.11, ist die Tatsache, dass auch bei negativen Werten von λ , d.h. negativer Eigenkreisfrequenz ω_A , ein stabiler Bereich vorhanden ist. Dies führt dazu, dass ein auf dem Kopf stehendes Pendel eine stabile Schwingung ausführt ohne herunterzufallen, wenn nur die Parameter λ und γ passend eingestellt sind. Eine umfassende numerische und experimentelle Untersuchung in Bezug auf diese Erscheinung wird von Holl und Irschik¹⁷ dargelegt.

Zurückkehrend zum eigentlichen Problem des Flüssigkeitstilgers unter vertikaler Anregung v_t , kann die experimentell bestätigte Größe des äquivalenten linear viskosen Dämpfungsterms ζ_A ohne zusätzlich eingebauter Blende in den Flüssigkeitsstrom mit ca. 5% der kritischen Dämpfung angenommen werden. Hervorgerufen durch diese doch relativ hohe natürliche Dämpfung wird das in Abb. 3.11 illustrierte Instabilitätsgebiet, insbesondere der Superharmonischen Resonanzstellen ($n \geq 1$), stark eingeschränkt. Man stellt fest, dass die Gefahr für das Entstehen von Parameterresonanz hauptsächlich für die erste Resonanzstelle $\lambda = \omega_A^2 / v_z^2 = 1/4$ vorhanden ist. Die weitere theoretische als auch experimentelle Untersuchung des Einflusses von Parameterresonanz auf das Dämpfungsverhalten des offenen Flüssigkeitstilgers wird sich daher vorwiegend auf diesen Bereich konzentrieren. Bei bekannter vertikaler Erregeramplitude v_{t0} und Eigenkreisfrequenz ω_A , ist die Größe des, für die Gewährleistung einer stabilen Bewegung an der Resonanzstelle $\lambda = 1/4$, erforderlichen linearen viskosen Dämpfungsterms ζ_A , entsprechend Nayfeh¹⁸, wie folgt definiert (für offene Rohrenden),

$$\zeta_{A,0} = \frac{v_{t0}}{g} \omega_A^2 = \frac{2v_{t0}}{L_{eff}} \sin \beta, \quad \omega_A^2 = \frac{2g}{L_{eff}} \sin \beta \quad (3-48)$$

Aus dieser kurzen Darstellung des Phänomens der Parameterresonanz lässt sich erahnen, dass dieser Effekt doch sehr gravierende negative Auswirkungen auf das dynamische Verhalten des Flüssigkeitstilgers haben kann, insbesondere bei kleinen Werten des linearen Dämpfungsterms ζ_A . Treten nämlich vertikale Erreger-

amplituden, an der gefährlichen Resonanzstelle $\lambda = 1/4$, in jener Größenordnung auf die notwendig ist um Parameterresonanz ins Leben zu rufen, führt dies, zumindest rein theoretisch und bei Annahme eines linearen Dämpfermodells, unaufhaltsam zu einem unbegrenzten Anwachsen der Schwingungsamplitude des Flüssigkeitsfadens. In der Natur kann die Amplitude der Flüssigkeitsschwingung natürlich nicht unbegrenzt anwachsen, Nichtlinearitäten im Dämpfungsmodell (Turbulenzdämpfung, Gl. (3-16)) resultierend aus dem raschen Anwachsen der Strömungsgeschwindigkeit bei Parameterresonanz, stabilisieren die Bewegung des Flüssigkeitsfadens. Insbesondere erweist sich das Verschließen der beiden Rohrenden als weiterer Vorteil, da bei großen Schwingungsamplituden des Flüssigkeitstilgers nichtlineare Effekte der Luftfeder in der Rückstellkraft zum Tragen kommen, wie in Abschnitt 3.2.3 ausgeführt. Der erforderliche lineare viskose Dämpfungsterm $\zeta_{A,G}$, Gl. (3-48), ist im Falle von geschlossenen Rohrenden wie folgt definiert,

$$\zeta_{A,G} = \frac{v_{t0}}{g \left(1 + \frac{np_0 / \rho g}{H_L \sin \beta} \right)} \omega_A^2 = \frac{2 v_{t0}}{L_{eff}} \sin \beta, \quad \omega_A^2 = \frac{2g}{L_{eff}} \left(1 + \frac{np_0 / \rho g}{H_L \sin \beta} \right) \sin \beta. \quad (3-49)$$

Man erkennt, dass der in Gl. (3-49) definierte erforderliche Dämpfungsterm $\zeta_{A,G}$ bei gleicher Geometrie des geschlossenen und offen Tilgers identisch zu jenem des offenen Flüssigkeitstilgers $\zeta_{A,0}$, Gl. (3-48), ist. Die Eigenkreisfrequenz ω_A ist im Falle des geschlossenen Flüssigkeitstilgers, bei gleicher Geometrie, aber um ein vielfaches höher, wie in Abschnitt 3.2.3 beschrieben. Für praktische Anwendungen werden daher am Beginn des Optimierungsverfahrens die Parameter des Flüssigkeitstilgers festgelegt und die ermittelte optimale Eigenfrequenz wird dann durch Auslegen einer passenden Luftfeder praktisch realisiert, wie in Abschnitt 3.6.2.2 ausgeführt.

Geschoßes, und durch den linearen Dämpfungskoeffizient r . Letzterer wird nach Wahl von $\xi_s = r/2M\Omega_s$ rückgerechnet. Treten in den Stielen sehr große (gemessen an der Knicklast) Axialkräfte und damit Druckvorspannungen auf, (hervorgerufen durch die statische Last $N = -Mg$), ist die Feldsteifigkeit k nach Theorie II. Ordnung zu korrigieren. Die Berechnung der korrigierten Feldsteifigkeit \bar{k} erfolgt über den Ausdruck der potentiellen Energie $V = W + U$, wobei für die Verlaufsfunktion der Biegelinie der Stiele die passende Hermit'sche Formfunktion angesetzt wird, wie z.B. in Ziegler [7, Seite 470] ausgeführt. Unter Anwendung dieser Methodik erhält man die sogenannte geometrische Korrektur der Biegesteifigkeit, zu

$$\bar{k} = k + k_G, \quad k_G = \frac{6N}{5l}, \quad N = -Mg < 0, \quad (3-50)$$

wo N die Axialkraft aus der statisch wirkenden Last und l die Länge des beidseitig eingespannten Stieles definiert. Die Bewegungsgleichung des Hauptsystems wird nun durch Weiterführung der Substruktur Methode ermittelt. Zu diesem Zweck werden die im Abschnitt 3.2.4 ermittelte resultierende Kraft \bar{F} und das resultierende Momente \bar{M}_A am freigeschnittenen Hauptsystem in gegengleicher Richtung angebracht, wie in Abb. 3.13 illustriert, vergleiche mit Abb. 3.3,

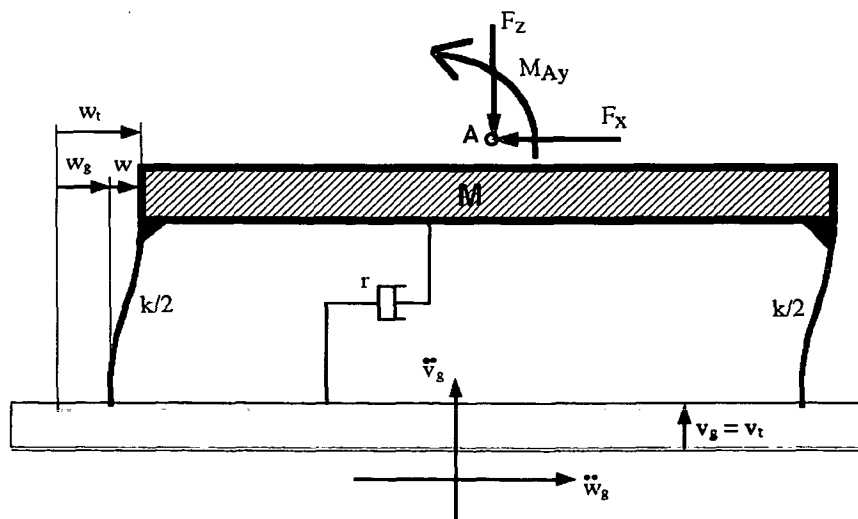


Abb. 3.13: Freigeschnittenes Hauptsystem unter Einwirkung der Tilgerkraftkomponenten F_x , F_z und des Tilgermoments M_{Ay} , vergleiche mit Abb. 3.3

Anwendung des Schwerpunktsatzes in horizontaler Richtung auf die freigeschnittene Riegelmasse liefert,

$$\ddot{w} + 2\zeta_S \Omega_S \dot{w} + \Omega_S^2 w = -\ddot{w}_g - \frac{1}{M} F_x, \quad \zeta_S = \frac{r}{2M\Omega_S}, \quad (3-51)$$

wo Ω_S die Eigenkreisfrequenz des Hauptsystems, $\Omega_S = \sqrt{k/M}$ und ζ_S den linear viskosen Dämpfungskoeffizienten bezeichnen. Der Dämpfungskoeffizient ergibt sich in unserem Fall vorwiegend aus der Materialdämpfung und ist im allgemeinen sehr gering, $\zeta_S < 0.05$. Einsetzen der resultierenden Kraftkomponente F_x , Gl. (3-33), in die Gl. (3-51) liefert gemeinsam mit der bereits bekannten Bewegungsgleichung des Flüssigkeitstilgers, Gl. (3-16), und unter Berücksichtigung von $\Delta p \approx 0$ die folgenden zwei gekoppelten Bewegungsgleichungen, die in ähnlicher Form bereits in Gl. (1-39) für einen konventionellen Schwingungstilger (TMD) ohne vertikaler Anregung, $v_t = 0$, dargelegt sind,

$$\begin{aligned} \ddot{w} + 2\zeta_S \Omega_S \dot{w} + \Omega_S^2 w &= -\ddot{w}_g - \mu \ddot{w}_t - \mu \bar{\kappa} \ddot{u}, \\ \ddot{u} + \delta_L |\dot{u}| \dot{u} + \omega_A^2 \left[1 + \frac{\ddot{v}_t}{g} \right] u &= -\kappa \ddot{w}_t, \quad w_t = w_g + w, \quad v_t \approx v_g, \end{aligned} \quad (3-52)$$

μ definiert dabei das Massenverhältnis von Flüssigkeitsmasse zur totalen Riegelmasse,

$$\mu = \frac{m_f}{M} \ll 1. \quad (3-53)$$

Die mit Hilfe der Substruktur Methode hergeleiteten Bewegungsgleichungen, Gl. (3-52), sind durch die Geometriefaktoren κ und $\bar{\kappa}$ miteinander gekoppelt. Im Falle eines konstanten Rohrquerschnittes, $A_H = A_B = A$, über die gesamte Rohrlänge, degenerieren diese beiden Faktoren zu identischen Ausdrücken, wie aus den Gln. (3-17) und (3-35) ersichtlich ist. Durch eine passende Wahl der Geometriefaktoren

lässt sich die Effizienz des Flüssigkeitstilgers im Hinblick auf seine dämpfende Wirkung außerordentlich steigern. Um nämlich einen möglichst hohen Energietransfer vom Hauptsystem zum Tilger zu erreichen, soll der Geometriefaktor κ maximiert und daher der Neigungswinkel β der beiden geneigten Rohrschenkeln möglichst klein gewählt werden, d.h. die horizontal projizierte Länge vergrößert sich. Natürlich ist zu beachten, dass eine Änderung des Neigungswinkels β die Eigenkreisfrequenz ω_A des Tilgers beeinflusst und daher ein optimaler Wert anzustreben ist. Gleichzeitig soll darauf hingewiesen werden, dass aufgrund der Gefahr des Durchwanderns einer Luftblase über den horizontalen Teil der Flüssigkeitssäule, der Neigungswinkel β nicht kleiner als etwa $\pi/6$ ($=30^\circ$) gewählt wird, (abhängig von der maximalen Schwingungsamplitude des Flüssigkeitsfadens U_{\max}).

3.3 Numerische Analyse – Einfluss einer vertikalen Anregung auf das Dämpfungsverhalten des Flüssigkeitstilgers

Die folgende numerische Analyse wird in Abstimmung mit der experimentellen Untersuchung, Abschnitt 3.4, für zwei verschieden abgestimmte Flüssigkeitstilger durchgeführt. Prinzipiell kann ein Flüssigkeitstilger über die passende Wahl der Eigenkreisfrequenz ω_A und des linearen Dämpfungskoeffizienten ζ_A abgestimmt werden, wie in Kapitel 1, Abschnitt 1.2 dargelegt. Die erste numerische Analyse wird an einem teilweise optimierten Flüssigkeitstilger, optimal abgestimmtes Frequenzverhältnis durchgeführt, hingegen wird bei der zweiten Analyse ein weder im Frequenzverhältnis noch im Dämpfungskoeffizienten abgestimmter Tilger untersucht. Die Weganregung in horizontaler w_g und vertikaler v_g Richtung wird als zeitlich harmonisches Signal in folgender Form

$$\text{Horizontale Anregung:} \quad w_g = w_{g0} \cos v_x t, \quad \ddot{w}_g = -v_x^2 w_{g0} \cos v_x t,$$

$$\text{Vertikale Anregung:} \quad v_g = v_{g0} \cos v_z t, \quad \ddot{v}_g = -v_z^2 v_{g0} \cos v_z t,$$

vorausgesetzt. Im Zuge der gesamten numerischen Studie wird die horizontale Erregerfrequenz ν_x im interessierenden Frequenzbereich variiert und gleichzeitig die vertikale Erregerfrequenz ν_z sowie die vertikale Erregeramplitude ν_{g0} konstant gehalten. Um das Phänomen der Parameterresonanz zu beobachten und deren Einfluss auf das Dämpfungsverhalten des Tilgers zu studieren, wird die vertikale Erregerfrequenz ν_z gleich der zweifachen Eigenkreisfrequenz des Tilgers gewählt, $\nu_z = 2\omega_A$, (entspricht der gefährlichsten Resonanzstelle $\lambda = 1/4$, wie in Abschnitt 3.2.5 erläutert). Die gesamten numerischen Analysen werden mit Hilfe des Computerprogramms „Mathematica Version 4.1.2“ bewerkstelligt. Die erste Version von „Mathematica“ wurde im Jahre 1988 von Stephen Wolfram²⁰ entwickelt und seither immer wieder verbessert. Das Programm eignet sich sowohl für analytische als auch numerische Rechenoperation jeglicher Art. Die in diesem Abschnitt mit Hilfe von „Mathematica“ errechneten numerischen Lösungen werden unter Zuhilfenahme einfacher Tools, angegeben z.B. in Wolfram [20], Blachman²¹ oder Maeder²², als Interpolationsfunktion in einem vordefinierten Lösungsbereich ausgegeben und zeigen eine ausgesprochen gute Qualität.

3.3.1 Teilweise optimierter Flüssigkeitstilger, optimales Frequenzverhältnis

Entgegen der üblichen Vorgehensweise, wo die Eigenkreisfrequenz des Hauptsystems Ω_s vorgegeben ist und eine optimale Eigenkreisfrequenz des Tilgers ω_A gefunden werden soll, wird in der folgenden Studie Ω_s aus einem Optimierungsverfahren ermittelt. Im Experiment kann nämlich die Eigenkreisfrequenz des Hauptsystems wesentlich einfacher abgestimmt und gemessen werden als jene des Flüssigkeitstilgers. Die gewählten Parameter des teilweise optimierten Flüssigkeitstilgers sind in Übereinstimmung mit dem Experiment, Abschnitt 3.4, wie folgt gegeben,

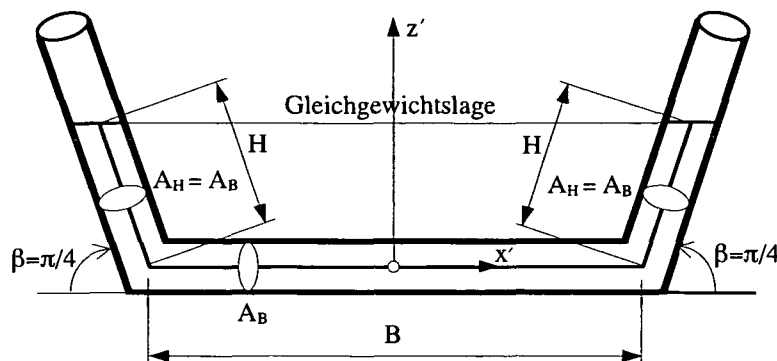


Abb. 3.14: Parameter des Flüssigkeitstilgers in Übereinstimmung mit dem Experiment

$$\beta = \pi/4, \quad A_H = A_B = 5 \times 10^{-4} m^2, \quad L_{eff} = B + 2H = 0.42 m, \quad m_f = 0.21 kg,$$

$$\omega_A = 5.65 rad/s, \quad f_A = \frac{\omega_A}{2\pi} = 0.90 Hz, \quad \zeta_A = 0.045 \rightarrow \text{nicht optimiert (keine Blende),}$$

$$v_z = 2\omega_A = 11.30 rad/s, \quad f_z = 2f_A = 1.80 Hz, \quad v_{g0} = 16 mm,$$

und jene des Hauptsystems, ein SDOF-Stockwerksrahmen,

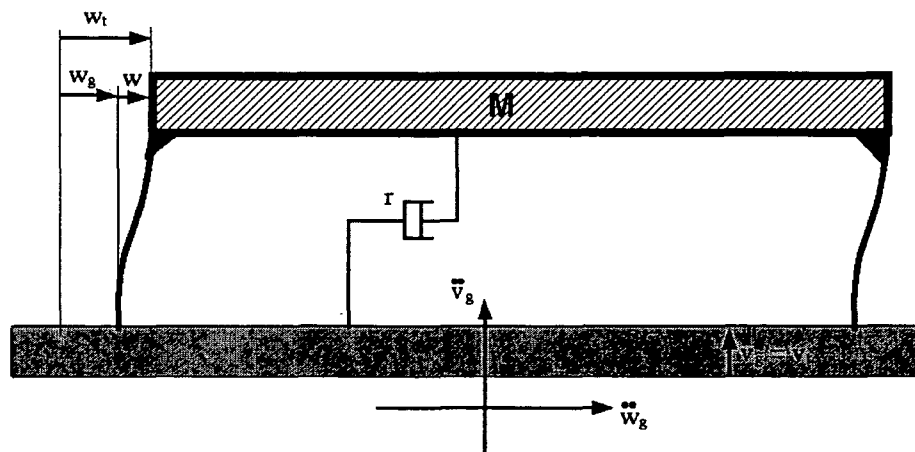


Abb. 3.15: Parameter des Hauptsystems in Übereinstimmung mit dem Modellversuchsstand

$$\zeta_s = \frac{r}{2M\Omega_s} = 0.01, \quad \Omega_s \rightarrow \text{optimal}, \quad w_{g0} = 3mm, \quad M = 2.96kg.$$

Das Masseverhältnis der Flüssigkeitsmasse m_f zur totalen Masse des Hauptsystems ergibt sich zu

$$\mu = \frac{m_f}{M} = 0.071 = 7.1\% .$$

Bei praktischen Anwendungen im Hochbau wird ein Masseverhältnis im Bereich von $\mu = 0.5 - 3\%$ angestrebt. Die Ermittlung der Werte für den äquivalenten linearen viskosen Dämpfungskoeffizienten ζ_A des Flüssigkeitstilgers und des linearen viskosen Dämpfungsterms ζ_S des Hauptsystems erfolgten hierbei versuchstechnisch mit Hilfe von Ausschwingversuchen, wie in Abschnitt 3.4 dargelegt. Dabei wurde der lineare Dämpfungskoeffizient ζ_A als Mittelwert mehrerer Ausschwingversuchen in einem Amplitudenbereich von $U_0 = 40.00 - 60.00 \text{ mm}$ gefunden. Der Querschnitt des Rohrleitungssystems ist über die gesamte Rohrlänge konstant, $A_H = A_B = A$, und konsequenter Weise, sind die Geometriefaktoren $\kappa = \bar{\kappa} = 0.81$, wie aus Gl. (3-17) und Gl. (3-35) ersichtlich. Die folgende teilweise Optimierung setzt sich zum Ziel, einen optimalen Wert für die Eigenkreisfrequenz Ω_S des Hauptsystems zu finden. Für die optimale Abstimmung eines konventionellen mechanischen Schwingungstilgers (TMD), Masse mit Kelvin-Voigt'schem Modellkörper unter harmonischer Kraftanregung, müssen die Entwurfparameter $\delta^* = \omega^* / \Omega_S^*$ und ζ^* passend gewählt werden, wie von Den Hartog²³ [Seite 91] ausgeführt und in Kapitel 1, Abschnitt 1.2 dargelegt. Aufgrund der Tatsache, dass die linearisierte Bewegungsgleichung des Flüssigkeitstilgers, Gl. (3-21), jener des konventionellen mechanischen Schwingungstilgers sehr ähnlich ist und sich lediglich durch die zusätzlichen Geometriefaktoren κ und $\bar{\kappa}$ unterscheidet, wie z.B. in Soong und Dargush²⁴ oder Hochrainer [3] angegeben, lässt sich in einfacher Weise eine Analogie zwischen diesen beiden Tilgersystemen herstellen, Abb. 3.16.

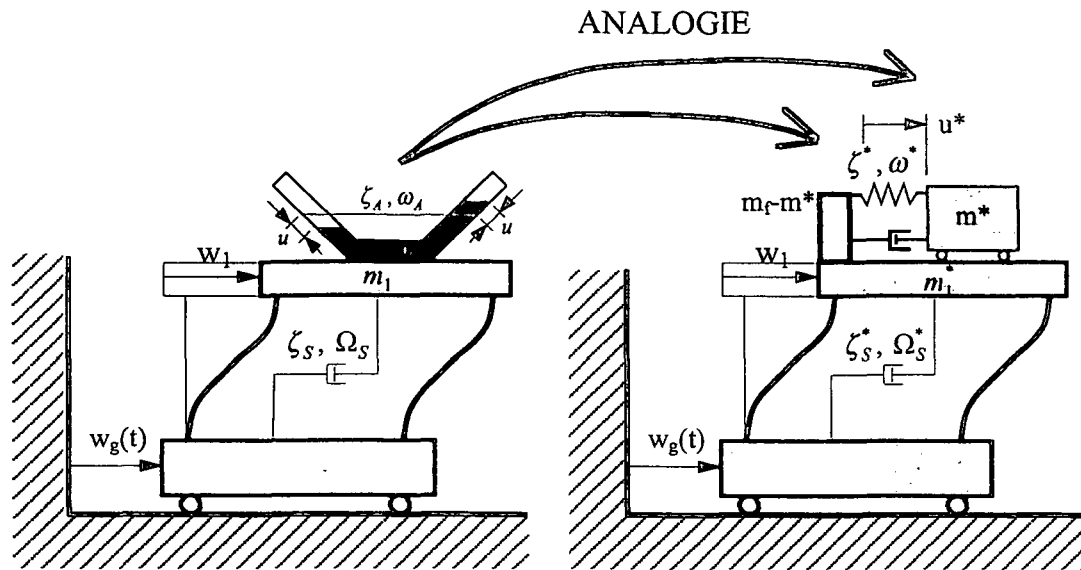


Abb. 3.16: Analogie zwischen Flüssigkeitstilger und konventionellen Schwingungstilger, Hochrainer [3]

Nach Transformation der Bewegungsgleichung m_1^* des Flüssigkeitstilgers, durch geeignete Multiplikation, in eine dem konventionellen Schwingungstilger analoge Form, wie in Hochrainer [3, Seite 97] angegeben, ergibt sich der mit einem Stern gekennzeichnete konjugierte Entwurfparameter des Frequenzverhältnisses δ^* zu,

$$\delta^* = \frac{\omega^*}{\Omega_S^*} = \delta \sqrt{1 + \mu(1 - \kappa^2)} \quad , \quad \delta = \frac{\omega_A}{\Omega_S} \quad . \quad (3-54)$$

Der konjugierte optimale Dämpfungskoeffizient ζ^* hingegen bleibt ungeändert,

$$\zeta^* = \zeta_A \quad . \quad (3-55)$$

In unserem Fall wird das Hauptsystem harmonisch Wegerregt, daher ergeben sich bei gewünschter Optimierung der Auslenkung des Hauptsystems (Lagekoordinate: Deformation w) folgende konjugierte Entwurfparameter, wie in Kapitel 1, Tabelle 1.1 (Fall 3) gelistet,

$$\delta_{opt}^* = \frac{\sqrt{1 - \mu^*/2}}{1 + \mu^*}, \quad \zeta_{opt}^* = \sqrt{\frac{3\mu^*}{8(1 + \mu^*)(1 - \mu^*/2)}}, \quad (3-56)$$

wo μ^* das, einem konventionellen mechanischen Schwingungstilger zugeordnete, konjugierte Massenverhältnis angibt,

$$\mu^* = \frac{m^*}{M^*} = \frac{\kappa^2 \mu}{1 + \mu(1 - \kappa^2)}, \quad \mu = \frac{m_f}{M}, \quad \kappa = \frac{B + 2H \cos \beta}{L_{eff}}. \quad (3-57)$$

Nach Auswertung von Gl. (3-57), unter Verwendung der gewählten Modellparameter, und Einsetzen des so erhaltenen Wertes für μ^* in die Gl. (3-56) ergeben sich die optimalen Entwurfparameter des konjugierten konventionellen mechanischen Schwingungstilger Problems zu

$$\delta_{opt}^* = 0.95, \quad \zeta_{opt}^* = 0.11. \quad (3-58)$$

Mit Hilfe dieser beiden errechneten und durch einen Stern gekennzeichneten konjugierten Größen, kann nun aus Gl. (3-54) das optimale Frequenzverhältnis δ_{opt} des Flüssigkeitstilger Problems berechnet werden,

$$\delta_{opt} = \frac{\delta_{opt}^*}{\sqrt{1 + \mu(1 - \kappa^2)}} = 0.94, \quad \Omega_{S,opt} = 6.01 \text{ rad/s}, \quad f_{S,opt} = \frac{\Omega_{S,opt}}{2\pi} = 0.96 \text{ Hz}. \quad (3-59)$$

Verwendet man nun dieses errechnete optimale Frequenzverhältnis δ_{opt} für die numerische Analyse des Hauptsystems mit Flüssigkeitstilger, so erkennt man aus dem Verlauf des Amplitudenfrequenzganges den Erfolg dieser Methodik, wie in Abb. 3.19 illustriert wird. Die zwei Resonanzspitzen des gekoppelten Systems sind in Ihrer Größe, gegenüber dem System ohne Tilger, stark reduziert und annähernd gleich hoch. Bei optimaler Wahl des linearen Dämpfungskoeffizienten $\zeta_{opt}^* = \zeta_{A,opt} = 0.11$,

durch Einbau einer passenden Blende, würden sich die beiden Resonanzspitzen auf gleicher Höhe befinden und außerdem eine waagrechte Tangente im Schnittpunkt mit dem Frequenzgang des System ohne Tilger aufweisen, wie in Abb. 3.20 dargestellt und in Kapitel 1, Abschnitt 1.2 ausführlich erläutert. Es ist jedoch wichtig darauf hinzuweisen, dass dieser bereits errechnete Wert, weder für die numerische Studie noch im Experiment (durch Einbau einer Blende) angestrebt wird. Der Grund für diese sogenannte sub-optimale Annahme liegt in den vorhandenen experimentellen Grenzen: Um nämlich das Phänomen der Parameterresonanz beobachten und studieren zu können ist eine hinreichend große vertikale Erregeramplitude v_{g0} notwendig. Der Wert dieser Amplitude ist jedoch im Experiment mit einer Größe von $v_{g0} \leq 16 \text{ mm}$ limitiert. Zudem ist bekannt, dass die Größe des Dämpfungskoeffizienten ζ_A maßgebend das Erscheinen von Parameterresonanz beeinflusst. Insbesondere lässt sich zeigen, dass für den hier betrachteten offenen Flüssigkeitstilger die hinreichende Bedingung zur sicheren Vermeidung von Parameterresonanz, Gl. (3-48), nicht erfüllt ist,

$$\zeta_{A,0} = \frac{2v_{g0}}{L_{eff}} \sin \beta = 0.054 > \zeta_A = 0.045 . \quad (3-60)$$

Eine Erhöhung des Dämpfungskoeffizienten auf den optimalen Wert, $\zeta_{A,opt} = 0.11$, würde eine Anfachung von Parameterresonanz verhindern. Aufgrund dieser Tatsache wird für diese Versuchsserie der Dämpfungskoeffizient des Flüssigkeitstilgers möglichst gering gehalten, d.h. es folgt kein Einbau einer querschnittsverengenden Blende in den Flüssigkeitsstrom.

Für die gesamten numerischen Studien wird die parametererregte Bewegungsgleichung des Flüssigkeitstilgers mit Turbulenzdämpfung, Gl. (3-16), betrachtet.

3.3.2 Numerische Analyse des Hauptsystems mit teilweise optimiertem Flüssigkeitstilger

Das numerische Ergebnis des stationären Schwingungsverhaltens des Hauptsystems unter Verwendung des teilweise optimierten Flüssigkeitstilgers, optimales Frequenzverhältnis, bei horizontaler Erregung in der Nähe der zweiten Eigenfrequenz, $f_x = 1.00\text{Hz}$, ist in Abb. 3.17 dargestellt.

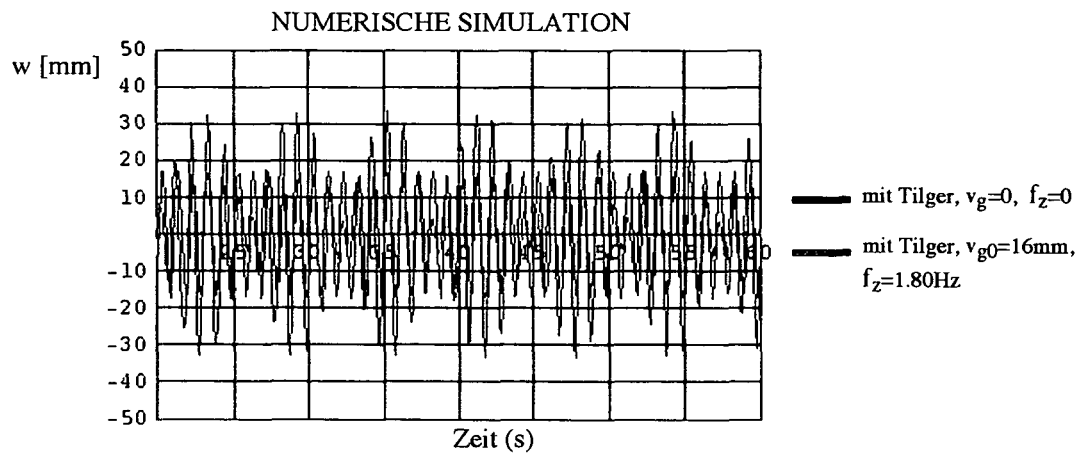


Abb. 3.17: Numerisches Ergebnis des stationären Schwingungsverhaltens des Hauptsystems mit teilweise optimierten Flüssigkeitstilger; horizontale lineare Erregerfrequenz $f_x = 1.00\text{Hz}$; nichtlineares Dämpfermodell $\delta_L = 1.325$

Die blaue Linie in Abb. 3.17 kennzeichnet die stationäre Schwingungsantwort des Hauptsystems mit installiertem Flüssigkeitstilger unter rein horizontaler Anregung \ddot{w}_g . Hingegen veranschaulicht die rote Linie den Einfluss einer zugeschalteten vertikalen Anregung \ddot{v}_g . Der betrachtete nichtlineare Dämpfungsterm δ_L ergibt sich aus Gl. (3-20) mit dem linearen Dämpfungskoeffizienten ζ_A zu

$$\delta_L = \frac{3\pi\zeta_A}{4U_0}, \quad (3-61)$$

wo U_0 die Schwingungsamplitude des Flüssigkeitsfadens definiert und für die numerische Studie $U_0 = U_{\max}$ (abhängig von der horizontalen linearen Erregerfrequenz f_x) gewählt wird. Im hier betrachteten Fall $f_x = 1.00\text{Hz}$, ergibt sich $U_{\max} = 80.00\text{ mm}$ aus einer numerischen Simulation des Hauptsystems mit

linearisiertem Flüssigkeitstilger. Auswerten von Gl. (3-61) ergibt den gesuchten nichtlinearen Dämpfungsterm zu $\delta_L = 1.325$.

Würde man die zeitliche Antwort des Hauptsystems unter Betrachtung des äquivalenten linear viskosen Dämpfungsterms $2\xi_A\omega_A\dot{u}$, mit $\xi_A = 0.045$ als innerhalb eines definierten Amplitudenbereiches, $U_0 = 40.00 - 60.00\text{mm}$, gemittelten Dämpfungskoeffizienten berechnen, so wächst die Schwingungsamplitude mit fortschreitender Zeit t über alle Grenzen, wie in Abb. 3.18 illustriert. Diese Tatsache weist auf ein instabiles Verhalten zufolge Parameterresonanz hin, wie in Abschnitt 3.2.5 ausführlich dargelegt.

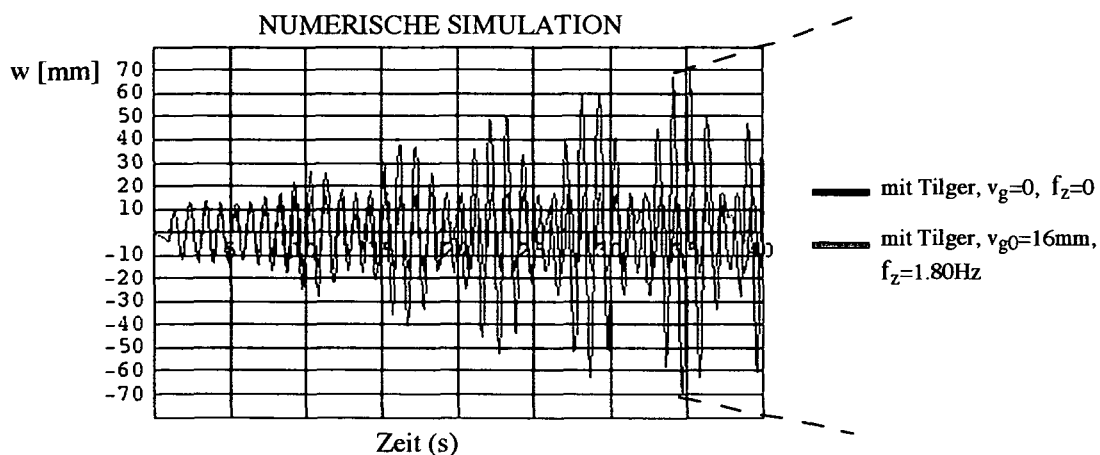


Abb. 3.18: Numerisches Ergebnis des zeitlichen Schwingungsverhaltens des Hauptsystems mit teilweise optimierten Flüssigkeitstilger; horizontale lineare Erregerfrequenz $f_x = 1.00\text{Hz}$; lineares Dämpfermodell $\xi_A = 0.045$

Befindet sich die Lage eines aus den Parametern λ und γ zugeordneten Bildpunktes im instabilen Gebiet der Ince-Strutt'schen Karte, Abb. 3.11, so entsteht Parameterresonanz. Wird nun der Dämpfungskoeffizient ξ_A , wie es im linearen Modell der Fall ist, als über die Schwingungsamplitude konstant angenommen, besteht für das mechanische System keine Möglichkeit der Stabilisierung, wodurch ein unbegrenztes Anwachsen der Schwingungsantwort hervorgerufen wird. Das nichtlineare Modell wirkt sich hingegen stabilisierend auf eine anfangs in Parameterresonanz versetzte Schwingung aus, da mit Zunahme der Schwinggeschwindigkeit der nichtlineare Dämpfungsterm $\delta_L|\dot{u}|\dot{u}$ quadratisch wächst und daher die maximal auftretende Antwort des Hauptsystems limitiert. Mit der

amplitudenabhängigen linearen Dämpfung, Gl. (3-20), wird vermutlich bei ständiger Adaptierung des Wertes für ξ_A , ein ähnliches Ergebnis erreicht. Aus Abb. 3.17 ist weiters ein Schwebungseffekt erkennbar der sich erst nach Zuschaltung der vertikalen Anregung v_g einstellt. Schwebungseffekte werden bei einer Vielzahl von mechanischen Systeme beobachtet und entstehen immer dann, wenn zwei Frequenzen (z.B. Biege- und Torsionseigenfrequenz eines elastisch gelagerten Fundamentes, wie z.B. in Ziegler [7, Seite 440] dargelegt) nur wenig voneinander verschieden sind. Die Schwebung ist ein sehr ungünstiges Phänomen welches unbedingt vermieden werden soll, da sie zu einem Hin- und Herwandern der Energie führt. Verbunden damit ist das Auftreten von maximal möglichen Ausschlägen in beiden Schwingungsformen. Ist die Eigenkreisfrequenz des Flüssigkeitstilgers ω_A nur wenig verschieden von der Eigenkreisfrequenz des Hauptsystems Ω_s , kann bereits in der freien Schwingung ein Schwebungseffekt beobachtet werden. Eine umfangreiche Studie des Schwebungseffektes von gekoppelten Systemen, mit Konzentration auf Flüssigkeitstilger, wird von Yalla²⁵ durchgeführt.

Die Abb. 3.19 zeigt den Verlauf des numerisch errechneten Dynamischen Vergrößerungsfaktor (DVF) des Hauptsystems unter Verwendung des teilweise optimierten Flüssigkeitstilgers.

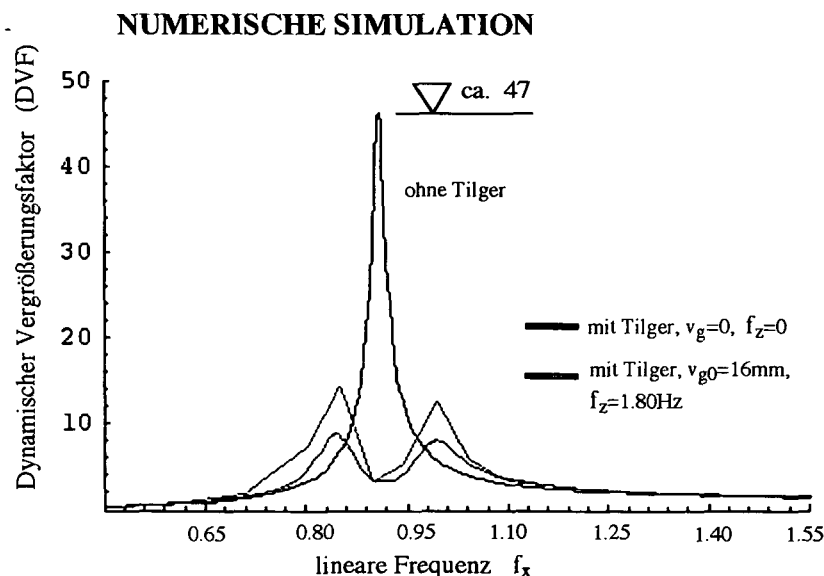


Abb. 3.19: Numerisches Ergebnis des Dynamischen Vergrößerungsfaktors (DVF) des Hauptsystems mit teilweise optimierten Flüssigkeitstilger; horizontale lineare Erregerfrequenz f_x ; nichtlineares Dämpfermodell δ_L ; Tilger ohne Blende (schwach gedämpft)

Die Ermittlung des DVF für das parametererregte gekoppelte System, $v_g \neq 0$, erfolgt an diskreten Frequenzstellen $f_{x,i}$. Dazu muss in einem ersten Schritt an der betrachteten diskreten Frequenzstelle $f_{x,i}$ die zugehörige maximale Schwingungsantwort des linearisierten Flüssigkeitstilgers $U_{\max,i}$ im eingeschwungenen Zustand aus einer numerischen Simulation ermittelt werden. Einsetzen des erregerefrequenzabhängigen Wertes $U_{\max,i}$ in Gl. (3-61) ergibt den gesuchten nichtlineare Dämpfungsterm $\delta_{L,i}$ an der Frequenzstelle $f_{x,i}$

$$\delta_{L,i} = \frac{3\pi\zeta_A}{4U_{\max,i}}. \quad (3-62)$$

Die Gl. (3-52) liefert dann unter Verwendung von Gl. (3-62) die zeitliche Antwort des parametererregten, gekoppelten Systems unter zusätzlicher vertikaler Anregung, für die lineare Erregerfrequenz $f_{x,i}$. Die Suche nach der maximalen Antwort des Hauptsystems $w_{\max,i}$ wird mit Hilfe des numerischen Simulationsprogramms Mathematica 4.1.2 durchgeführt. Der dynamische Vergrößerungsfaktor (DVF) an der Frequenzstelle $f_{x,i}$ ergibt sich dann zu

$$DVF_{x,i} = \left| \frac{w_{\max,i}}{w_{g0}} \right|. \quad (3-63)$$

Die schwarze Linie in Abb. 3.19 zeigt den Frequenzgang des Hauptsystems ohne Aktivierung des Tilgers, (tote Flüssigkeitsmasse). Die Resonanzspitze bildet sich sehr stark aus und wird durch die Dämpfung, $\zeta_s = 0.01$, auf einen Wert des dynamischen Vergrößerungsfaktors (DVF) von rund 47 beschränkt, (entspricht $\approx 1/2\zeta$). Aus dem Verlauf der blauen Linie ist der Einfluss des Flüssigkeitstilgers zufolge seiner tilgenden Eigenschaft ersichtlich. Die rote Linie veranschaulicht wiederum den Einfluss einer zugeschalteten vertikalen Anregung v_g auf das Dämpfungsverhalten des Tilgers. Aus der Abb. 3.19 erkennt man sehr deutlich die Auswirkung der Parameterresonanz. Die beiden Resonanzspitzen werden in ihrer Höhe nahezu verdoppelt. Im Vergleich zum Resonanzfall ohne Flüssigkeitstilger wo

DVF ≈ 47 , ergibt sich noch immer, trotz Parameterresonanz, eine wirkungsvolle dämpfende Eigenschaft des Tilgers. Außerdem ist darauf hinzuweisen, dass der Optimierungsprozess nur teilweise durchgeführt wurde und bei vollständiger Optimierung der Wert des linearen Dämpfungskoeffizienten ξ_A optimal gewählt werden muss, d.h. $\xi_{A,opt} = 0.11$, (bzw. dessen zugeordneter, von der Erregerfrequenz f_x abhängiger, nichtlinearer Dämpfungsterm δ_L , Gl.(3-61)). Bei Betrachtung des optimalen Dämpfungskoeffizienten ergibt sich der Verlauf des DVF wie in Abb. 3.20 dargestellt.

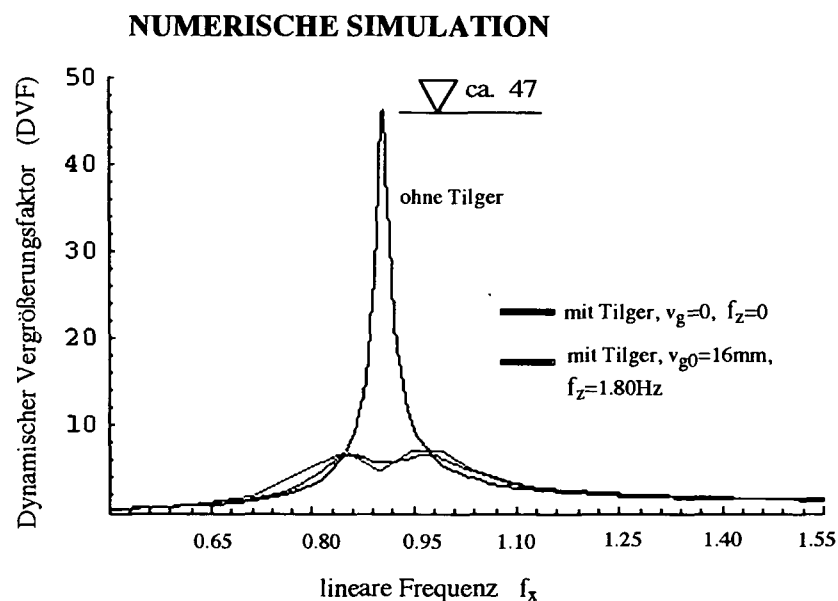


Abb. 3.20: Numerisches Ergebnis des Dynamischen Vergrößerungsfaktors (DVF) des Hauptsystems mit optimalen Frequenzverhältnis δ_{opt} und optimaler linearisierter Dämpfung $\xi_{A,opt}$ bzw. zugeordneter nichtlinearer Dämpfungsterm $\delta_{L,opt}$; horizontale lineare Erregerfrequenz f_x ; Tilger mit passend eingebauter Blende (optimal gedämpft)

Man erkennt deutlich das Verschwinden des anfachenden Einflusses von Parameterresonanz. Der erforderliche lineare Dämpfungskoeffizient des Flüssigkeitstilgers zur sicheren Vermeidung von Parameterresonanz ist in Gl. (3-60) mit $\xi_{A,0} = 0.052$ definiert. Die optimale Dämpfung des Flüssigkeitstilgers, $\xi_{A,opt} = 0.11$, liegt also weit über den erforderlichen Wert, $\xi_{A,0} = 0.052$, Gl. (3-60). Die hier gewonnene Erkenntnis untermauert das Bestreben, den Flüssigkeitstilger trotz

vorhandener zusätzlicher vertikaler Erregungen für die Tilgung von bebenereigten Gebäudeschwingungen und sogar von Brückenschwingungen einzusetzen. Insbesondere wird auf die Möglichkeit einer eventuellen Erhöhung der Flüssigkeitsdämpfung auf den zur Vermeidung von Parameterresonanz erforderlichen Wert, $\zeta_{A,0}$ in Gl. (3-48), hingewiesen, wie in Kapitel 6, Abschnitt 6.1 ausgeführt.

3.3.3 Numerische Analyse des Hauptsystems mit nicht optimiertem Flüssigkeitstilger

Der nicht optimale Flüssigkeitstilger wird weder im Frequenzverhältnis noch im linearen Dämpfungskoeffizienten optimiert. Die Parameter werden gleich jenen des teilweise optimierten Tilgers gewählt. Durch alleinige Veränderung der totalen Masse M des Hauptsystems, auf den neuen Wert $M = 2.06 \text{ kg}$, ergibt sich die Eigenkreisfrequenz Ω_s und daraus das nicht optimale Frequenzverhältnis zu

$$\Omega_s = 6.60 \text{ rad/s} , \quad f_s = \frac{\Omega_s}{2\pi} = 1.05 \text{ Hz} , \quad \delta = \frac{\omega_A}{\Omega_s} = 0.857 .$$

Das numerische Ergebnis des stationären Schwingungsverhaltens des Hauptsystems unter Verwendung des nicht optimierten Flüssigkeitstilgers bei horizontaler Erregung in der Nähe der ersten Eigenfrequenz, $f_x = 0.85 \text{ Hz}$, ist in Abb. 3.21 dargestellt. Die Berechnung des nichtlinearen Dämpfungsterms δ_L erfolgt hier analog zum teilweise optimierten Flüssigkeitstilger, Abschnitt 3.3.2, und liefert unter Verwendung der Gl. (3-61) mit $U_{\max} = 60.00 \text{ mm}$ den Wert $\delta_L = 1.77$. Die rote Linie verdeutlicht wiederum den Einfluss der Parameterresonanz auf die stationäre Schwingungsantwort des Hauptsystems.

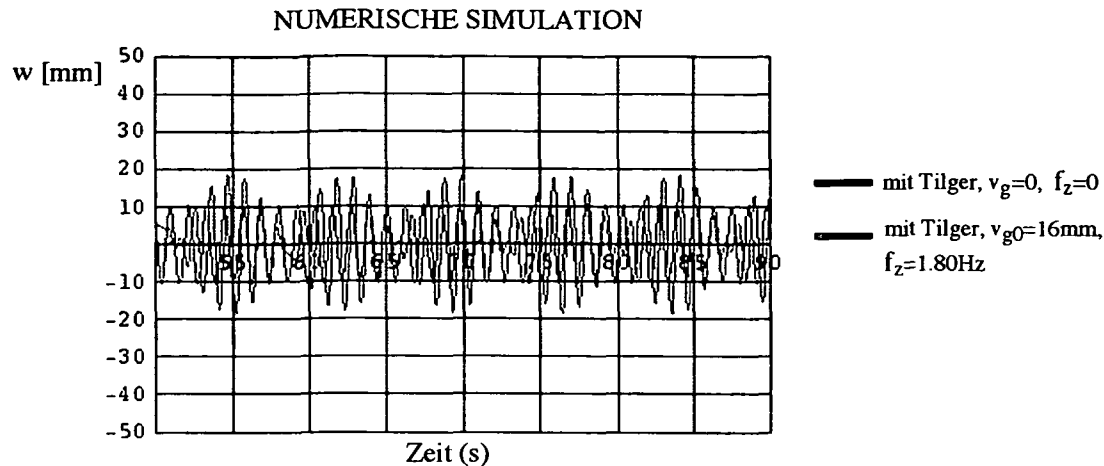


Abb. 3.21: Numerisches Ergebnis des stationären Schwingungsverhaltens des Hauptsystems mit nicht optimierten Flüssigkeitstilger; horizontale lineare Erregerfrequenz $f_x = 0.85\text{Hz}$; nichtlineares Dämpfermodell $\delta_L = 1.77$

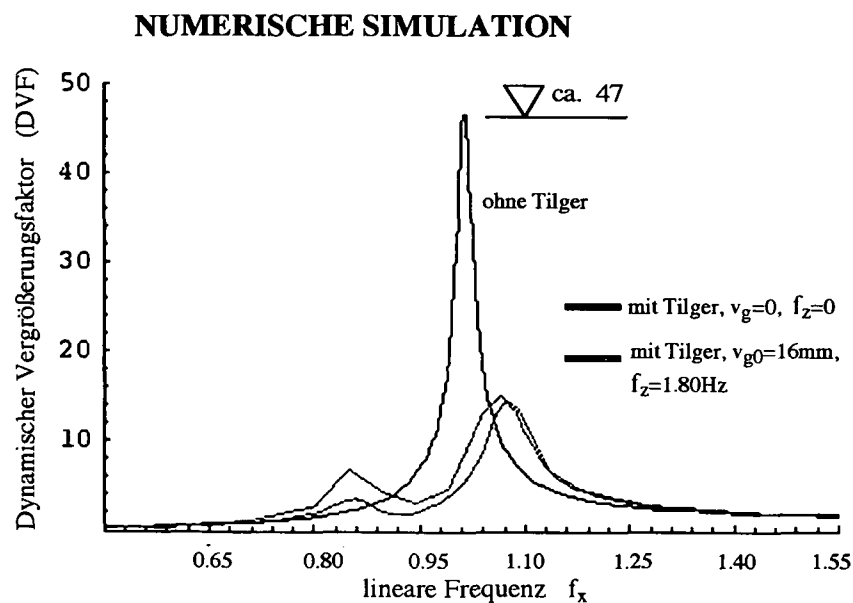


Abb. 3.22: Numerisches Ergebnis des Dynamischen Vergrößerungsfaktors (DVF) des Hauptsystems mit nicht optimierten Flüssigkeitstilger; horizontale lineare Erregerfrequenz f_x ; nichtlineares Dämpfermodell δ_L ; Tilger ohne Blende (schwach gedämpft)

Die Abb. 3.22 zeigt das numerische Ergebnis des dynamischen Vergrößerungsfaktors (DVF) des Hauptsystems für den Fall des nicht optimierten Flüssigkeitstilgers, wobei die Ermittlung des zugeordneten nichtlinearen Dämpfungsterms δ_L analog zu Abschnitt 3.3.2 erfolgt. Die erste kleinere

Resonanzspitze des Hauptsystems wird zufolge Parameterresonanz verdoppelt, hingegen tritt an der zweiten Resonanzspitze nahezu keine Überhöhung des stationären Wertes auf. Die Erklärung für dieses anfangs unverständliche Verhalten kann wie folgt gegeben werden: Bei der ersten Resonanzspitze weist die stationäre Lösung einen relativ geringen Wert für den DVF auf, Parameterresonanz kann hier ihre maximal mögliche Auswirkung erreichen. Hingegen ist die zweite Resonanzspitze, in diesem nicht optimalen Fall, relativ stark überhöht und weist in der Antwort des Hauptsystems und damit auch des Flüssigkeitstilgers große Amplituden und damit hohe Schwinggeschwindigkeiten auf. Diese hohen Schwinggeschwindigkeiten führen beim nichtlinearen Modell zu einem raschen Anstieg der Dämpferkraft und dadurch zu einer Limitierung der maximal erreichbaren Schwingungsamplituden zufolge Parameterresonanz.

3.4 Experimentelle Untersuchung

Um das Phänomen der Parameterresonanz und deren Auswirkung auf das Dämpfungsverhalten von Flüssigkeitstilgern ausführlich studieren zu können bzw. die Ergebnisse aus der numerischen Analyse mit jenen aus dem Experiment zu vergleichen, wurde im Labor für Modelldynamik des Instituts für Allgemeine Mechanik, (Leitung: a.o.Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Rudolf Heuer^{*}), ein geeigneter Modellversuchsstand konstruiert, wie von Reiterer und Hochrainer²⁶ dargelegt. Ein Bild dieses Versuchsstandes ist in Abb. 3.23 illustriert, weiters zeigt die Abb. 3.24 eine Vorderansicht des Modells. An dieser Stelle sei der Hochschuljubiläumsstiftung der Stadt Wien, für die finanzielle Unterstützung recht herzlich gedankt^{**}.

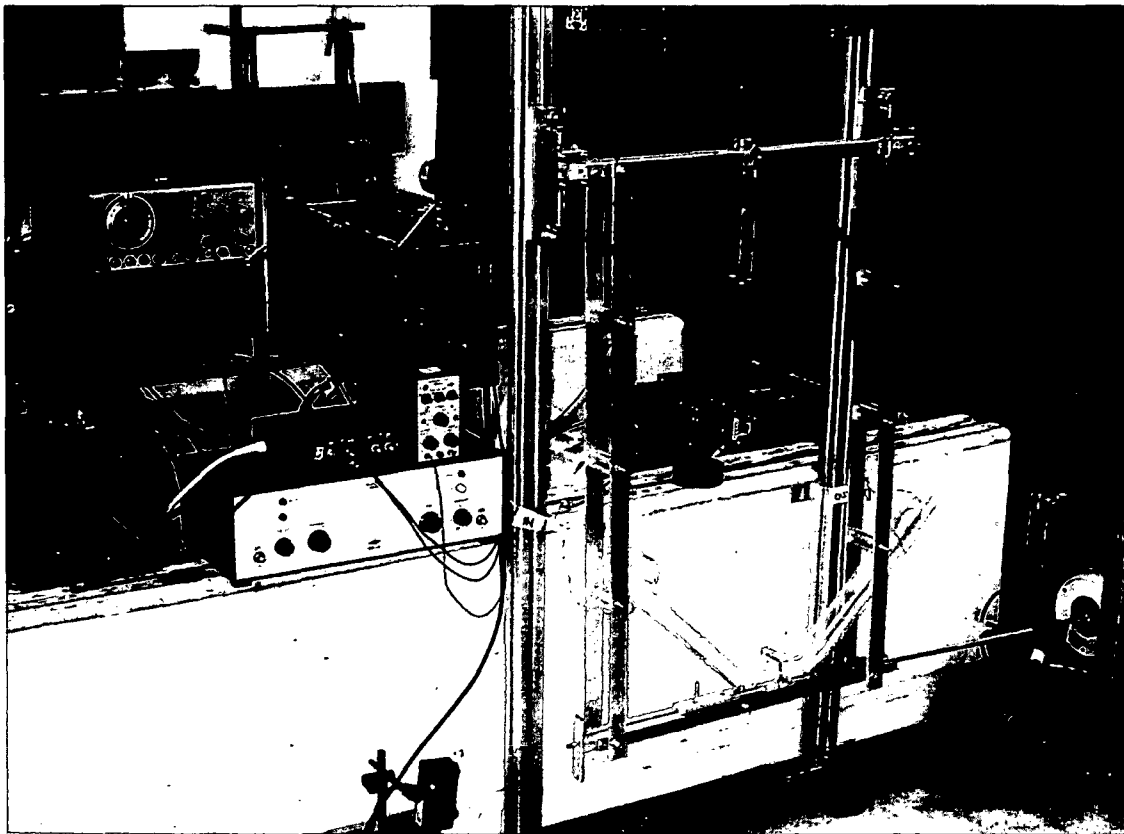


Abb. 3.23: Modellversuchsstand zur Untersuchung von Parameterresonanz bei Flüssigkeitstilgern, im Labor für Modelldynamik des Instituts für Allgemeine Mechanik, E201; photographische Aufnahme

Das Hauptsystem des entwickelten Modellversuchsstandes ist als ebenes, translatorisch bewegtes Pendel konstruiert, dass aus zwei starren, horizontal

angeordneten Aluminiumriegel besteht. Diese Aluminiumriegel sind durch paarweise angeordnete, abgehängte Aluminiumflachprofile miteinander zur Parallelführung verbunden. Da die Systemdämpfung einen möglichst niedrigen Wert aufweisen soll ist an jeder Verbindungsstelle ein Wälzlager angebracht. Um einer möglichen Schwingung des ebenen Pendels in Querrichtung (aus seiner Ebene heraus) entgegenzuwirken, sind die paarweisen Abhängungen entsprechend ausgesteift.

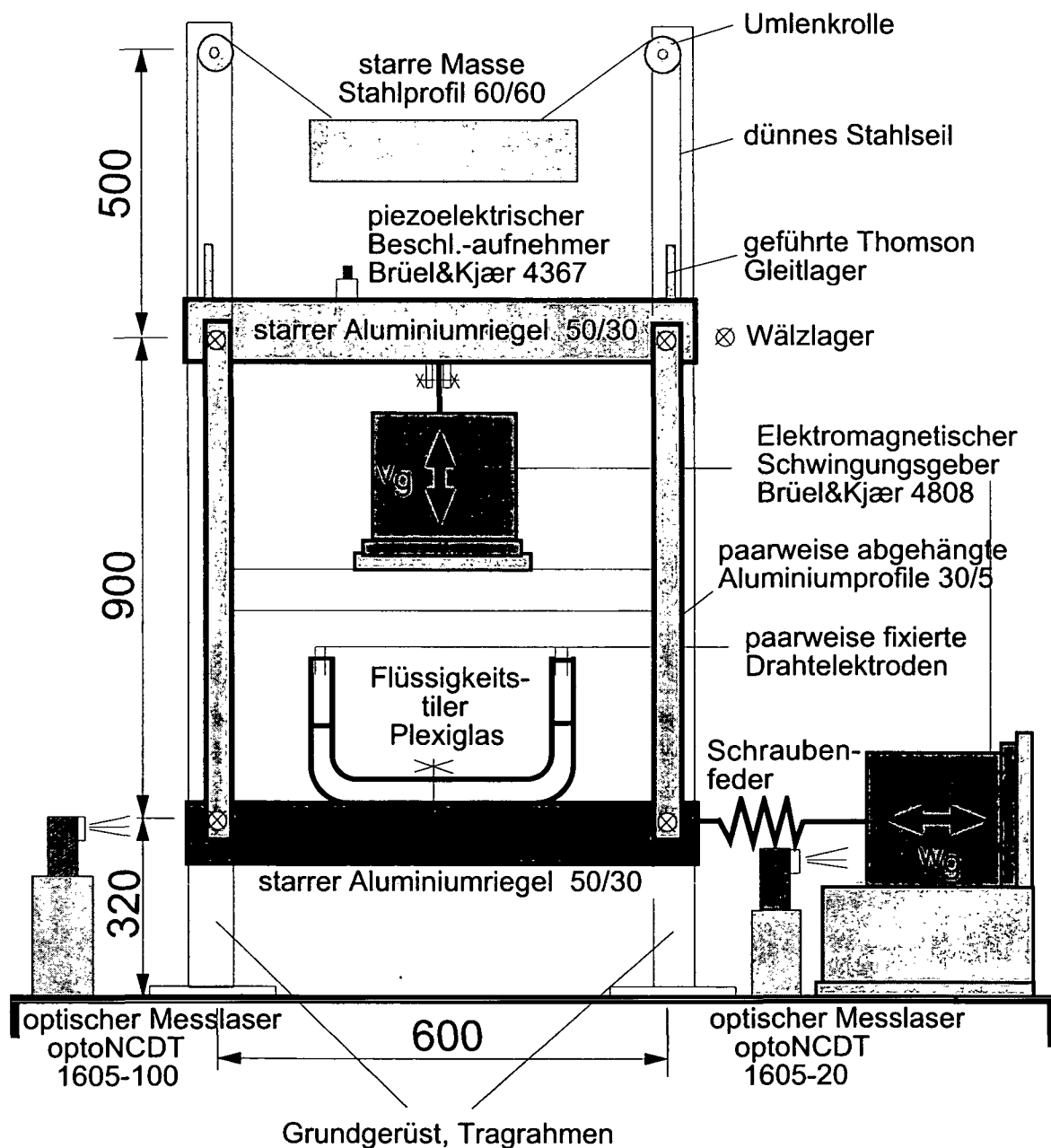


Abb. 3.24: Vorderansicht des Modellversuchstandes im Labor für Modelldynamik des Instituts für Allgemeine Mechanik, E201

Der obere starre Aluminiumriegel ist mittels Thomson Gleitlagern auf dem Grundgerüst befestigt. Diese Gleitlager erzwingen, zufolge ihrer lotrechten Anordnung, eine rein vertikale, nahezu reibungslose Bewegung des ebenen Pendels. Die Schwingungsanregung erfolgt über zwei gleichzeitig aktivierte Schwingungsgeber, Typ Brüel&Kjaer 4808. Der erste Schwingungsgeber ist über eine Schraubenfeder, mit definierter Federsteifigkeit, an den unteren Riegel angeschlossen und erregt diesen in horizontaler Richtung. Gleichzeitig erfolgt eine vertikale Anregung durch einen zweiten Schwingungsgeber der unter dem oberen Riegel, mittig positioniert ist. Die Größe der vertikalen Erregeramplitude ist bei diesem Typ des Schwingungsgebers mit ca. $v_{g0} = 6 - 8 \text{ mm}$ begrenzt. Das Phänomen der Parameterresonanz tritt jedoch erst bei Erregeramplituden in der Größenordnung von ca. $v_{g0} = 16 \text{ mm}$ auf, (für die Parameter des hier betrachteten Flüssigkeitstilgers, wie in Abb. 3.14 illustriert). Aus diesem Grund wird ein Hebelsystem eingesetzt und damit die Erregeramplitude in ausreichendem Maße vergrößert. Zur Reduzierung der dynamischen Kräfte in vertikaler Richtung wird das Gesamtgewicht des ebenen Pendels über eine, an umgelenkten Stahlseilen befestigte, Zusatzmasse ausbalanciert.

Aus der in Abb. 3.25 dargestellten Übersicht erkennt man den gesamten Aufbau mit der Erregerkette und den Auswerte- und Dokumentationsgeräten. Das harmonische Signal zur Ansteuerung des horizontal erregenden elektromagnetischen Schwingungsgebers wird mit Hilfe der Computersoftware LabVIEW 3.1.1. generiert, hingegen gibt ein Signalgenerator, Typ F74/F77, das vertikale harmonische Erregersignal vor. Beide Signale werden im Leistungsverstärker zur Ansteuerung des entsprechenden Schwingungsgebers umgeformt. Die Signalerfassung der horizontalen Erregung w_g und der Gesamtantwort des translatorisch bewegten Pendels, $w_t = w_g + w$, erfolgt durch zwei an geeigneten Stellen positionierte optische berührungslose Mess-Laser, Typ Micro-Epsilon optoNCDT 1605. Das vertikale Erregersignal v_g wird weiters über einen entsprechend befestigten konventionellen Beschleunigungsaufnehmer, Typ Brüel&Kjaer 4367, erfasst.

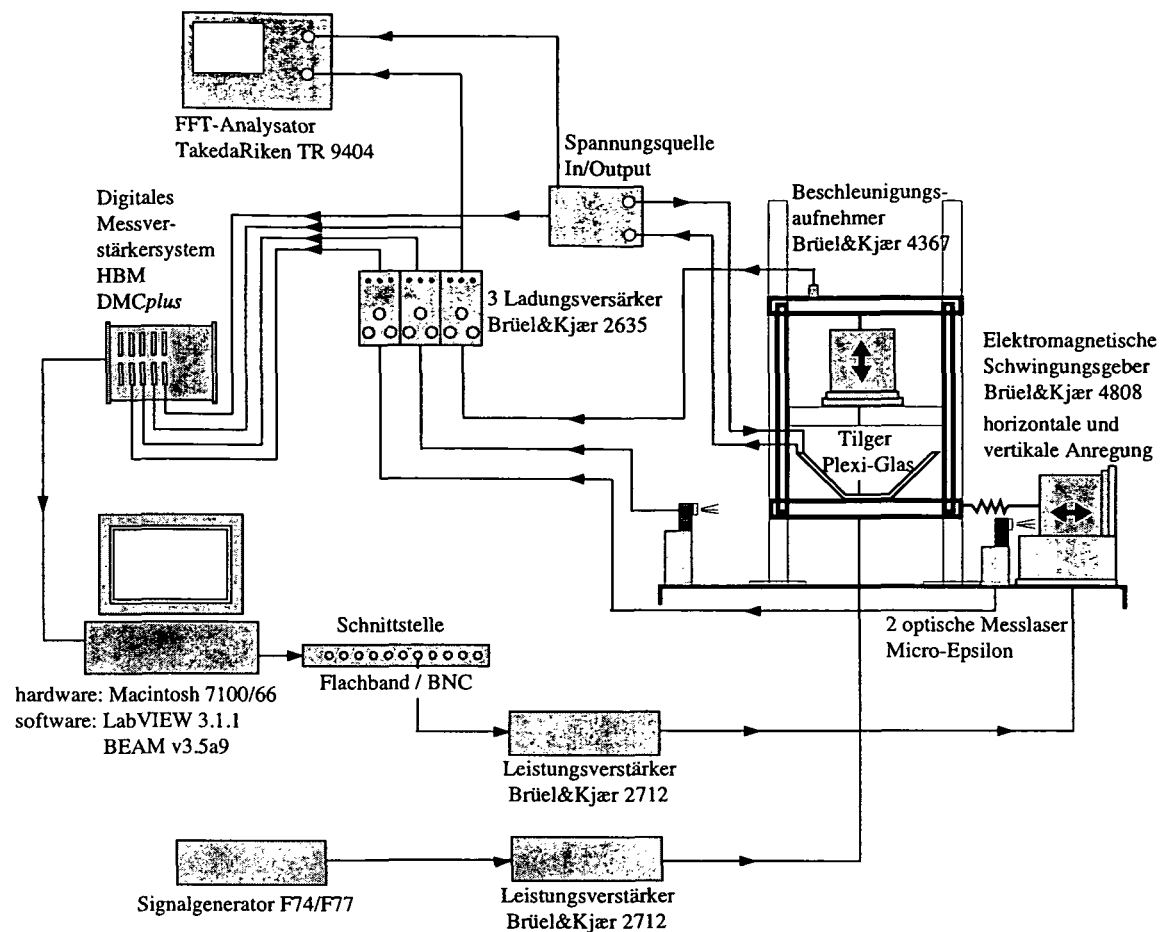


Abb. 3.25: Messgeräteketten; Signalfluss im System

Die gemessenen Beschleunigungssignale gelangen zu einem Ladungsverstärker und können dort, durch zweimalige Integration, in Verschiebungsgrößen ausgegeben werden. Ein FFT-Analysator, Typ TakedaRiken TR 9404, wird zugleich als Oszilloskop benutzt und auch zur Auswertung des Zeitsignals in Form eines Amplitudenspektrums verwendet. Die gemessenen Zeitsignale werden, nach Umwandlung in digitale Größen, über das Messverstärkersystem HBM, DMCplus (Hottinger Baldwin Messtechnik), mit Hilfe der Software BEAM ausgewertet und graphisch dargestellt.

Der im Experiment untersuchte Flüssigkeitstilger, aus Plexiglas mit Rechteckquerschnitt $20/25\text{mm}$, wie in Abb. 3.26 dargestellt, wird auf dem unteren starren Riegel fixiert. Die Parameter des Flüssigkeitstilgers und des Hauptsystems sind im Abschnitt 3.3.1 gelistet.

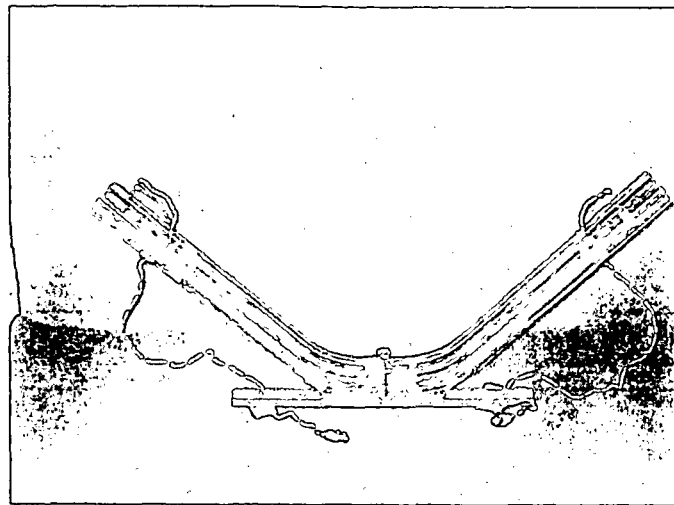


Abb. 3.26: Flüssigkeitstilger aus Plexiglas, Rechtecksquerschnitt 20 / 25 mm, photographische Aufnahme

Um die Auslenkung der freien Flüssigkeitsoberfläche, Lagekoordinate $u(t)$, möglichst genau beschreiben zu können, wurde im Zuge der Dissertation ein neues elektronisches Widerstandsmessinstrument in Zusammenarbeit mit M.J. Hochrainer entwickelt, Abb. 3.27. Dafür sei ihm an dieser Stelle recht herzlich gedankt***.

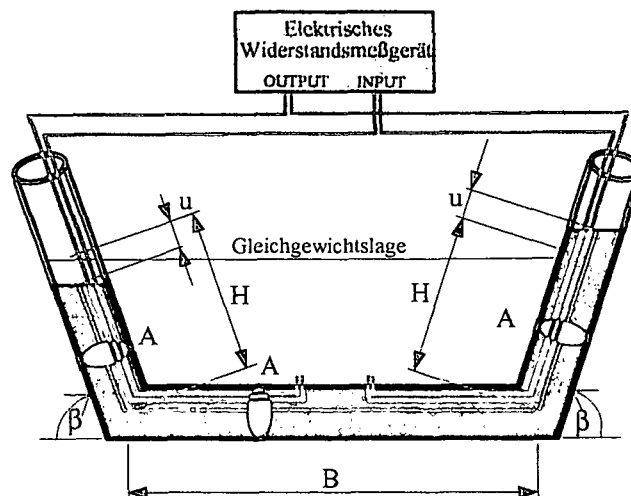


Abb. 3.27: Neues elektronisches Widerstandsmessinstrument; paarweise und symmetrisch angeordnete Drahtelektroden; Konstrukteur: M. Reiterer und M.J. Hochrainer (Wien, 2003)

Bei dieser sogenannten konduktiven Messmethode wird die elektrische Leitfähigkeit des Füllmediums, in unserem Fall von Wasser, zwischen zwei Elektroden

herangezogen, dieses Prinzip ist z.B. in Hoffmann²⁷ näher erläutert. Zu diesem Zweck wird der Flüssigkeitstilger mit zwei paarweise angeordneten Drahtelektroden ausgestattet, wie in Abb. 3.27 eingetragen. Sobald diese mit Wasser benetzt sind, wird der Stromkreis über Elektroden und Flüssigkeit geschlossen. Als Spannungsquelle wird niederfrequente Wechselspannung verwendet, um eine Elektrolyse an den Elektroden zu verhindern. Die zeitliche Änderung des elektrischen Widerstandes ist abhängig von der mit Wasser benetzten Oberfläche der Elektroden und wird mit Hilfe der Software BEAM aufgezeichnet. Um eventuell auftretende Nichtlinearitäten und Messungenauigkeiten zu kompensieren, werden die Elektroden für die Widerstandsmessung in Serie geschaltet, d.h. symmetrisch angeordnet. Um sehr hohe Frequenzbereiche zu unterdrücken bzw. andere bevorzugt zu übertragen und die statischen Schwankungen um die Gleichgewichtslage des Flüssigkeitsfadens zu minimieren wird das elektronische Signal Bandpass gefiltert. Diese Verbesserungsmaßnahme wurde dankenswerter Weise ebenfalls von M.J. Hochrainer vorgenommen, (Wien, 2003). Die Software BEAM zeichnet das gemessene elektronische Signal auf und transformiert dieses mit Hilfe einer nichtlinearen Übertragungsfunktion, die aus einer Kalibrierung des Flüssigkeitstilgers gewonnen wird, in eine äquivalente Auslenkung der freien Flüssigkeitsoberfläche, Lagekoordinate $u(t)$. In Abb. 3.28 ist das experimentell ermittelte Ergebnis der freien Schwingung des Flüssigkeitstilgers dargestellt.

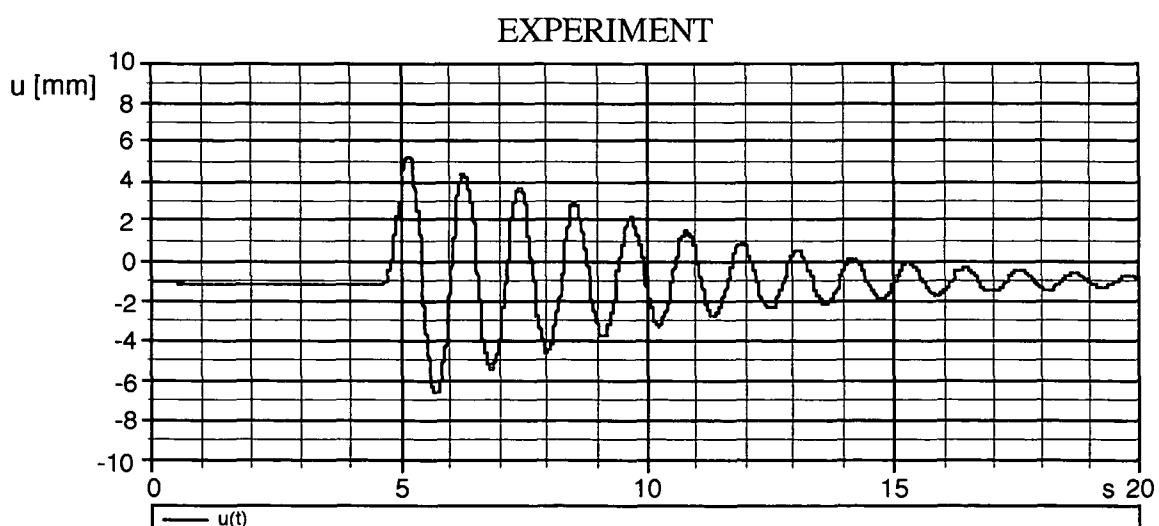


Abb. 3.28: Experimentelles Ergebnis der freien Schwingung des Flüssigkeitstilgers

Aus der Abb. 3.28 kann der mittlere lineare Dämpfungskoeffizient $\zeta_A = 0.045$, für den Amplitudenbereich $U_0 = 40.00 - 60.00 \text{ mm}$, über das logarithmische Dämpfungsdekrement, $\delta_k = \ln(U_n / U_{n+k})$, ermittelt werden, angegeben z.B. in Clough und Penzien²⁸. In analoger Weise erhält man aus einem Ausschwingversuch des Hauptsystems den linearen Dämpfungskoeffizienten $\zeta_s = 0.01$ welcher als annähernd konstant über den gesamten betrachteten Amplitudenbereich angenommen werden kann, wie in Abb. 3.29 illustriert.

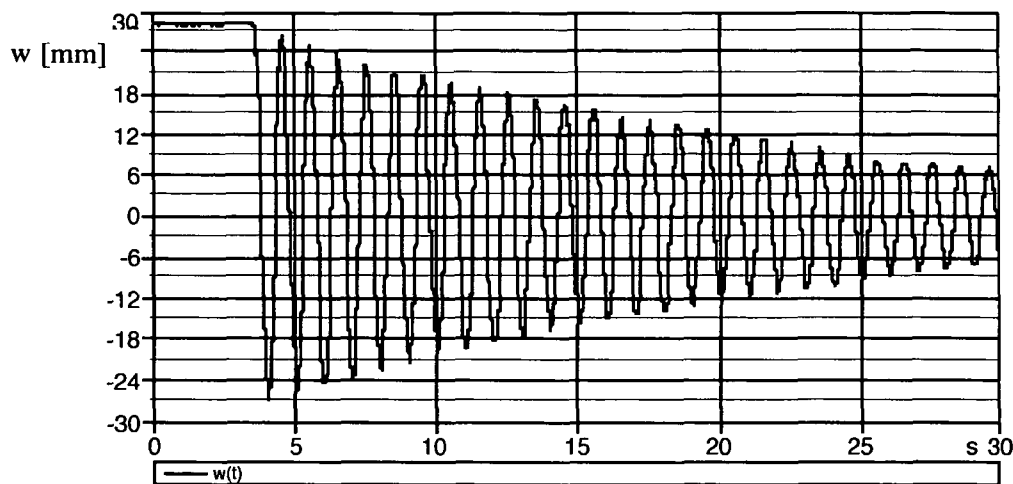


Abb. 3.29: Experimentelles Ergebnis der freien Schwingung des Hauptsystems

Neben den Ausschwingversuchen werden in der folgenden experimentellen Studie erzwungene Schwingungsversuche mit zwei unterschiedlichen Tilgerkonfigurationen, in Übereinstimmung mit der numerischen Analyse, Abschnitt 3.3, durchgeführt. Die experimentellen Ergebnisse des zeitlichen Schwingungsverhaltens und des dynamischen Vergrößerungsfaktors (DVF) des Hauptsystems mit teilweise optimierten und nicht optimierten Flüssigkeitstilger, sowie der Vergleich mit den Ergebnissen aus der numerischen Analyse, wird im folgenden Abschnitt 3.5 vorgelegt.

3.5 Vergleich der experimentellen und numerischen Ergebnisse

3.5.1 Ergebnisse des Hauptsystems mit teilweise optimiertem Flüssigkeitstilger

Das experimentelle und im Vergleich dazu numerisch erzielte Ergebnis des stationären Schwingungsverhaltens des Hauptsystems mit teilweise optimiertem Flüssigkeitstilger, bei horizontaler Erregung in der Nähe der ersten Eigenfrequenz, $f_x = 1.00\text{Hz}$, ist in Abb. 3.30 dargestellt.

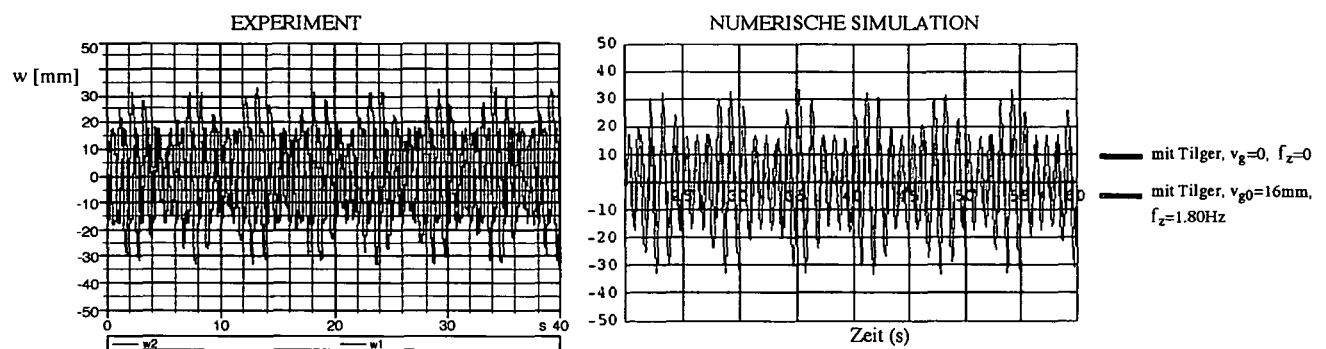


Abb. 3.30: Experimentelles und numerisches Ergebnis des stationären Schwingungsverhaltens des Hauptsystems mit teilweise optimiertem Flüssigkeitstilger; horizontale Erregerfrequenz $f_x = 1.00\text{Hz}$; nichtlineares Dämpfermodell $\delta_L = 1.325$

Die blaue Linie in Abb. 3.30 kennzeichnet die stationäre Schwingungsantwort des Hauptsystems mit installiertem Flüssigkeitstilger unter rein horizontaler Anregung \ddot{w}_g . Hingegen verdeutlicht die rote Linie den Einfluss einer zugeschalteten vertikalen Erregung. Die Abb. 3.30 zeigt eine ausgezeichnete Übereinstimmung der experimentellen Ergebnisse mit jenen aus der numerischen Analyse mit Turbulenzdämpfung, wie in Abschnitt 3.3.2 ausführlich erläutert. Das im Experiment auftretende Schwebungsphänomen wird anhand der numerischen Analyse bestätigt. Sowohl die maximale Antwort dieser sogenannten modulierten Schwingung als auch die Modulationsfrequenz, $f_M \approx 0.08\text{Hz}$, stimmen in Theorie und Experiment sehr gut überein. Die Abb. 3.31 zeigt den experimentellen und im Vergleich dazu numerisch erzielten Verlauf des DVF des Hauptsystems unter Verwendung des teilweise optimierten Flüssigkeitstilgers. Der DVF wird im Experiment an diskreten Stellen der

horizontalen Erregerfrequenz f_x durch Zuschalten der vertikalen Anregung v_g ermittelt. Die mit Hilfe der Software BEAM aufgezeichnete Schwingungsantwort, wie in Abschnitt 3.4 ausgeführt, wird über einen Zeitraum von $t = 60s$ beobachtet und daraus der maximal auftretende Wert w_{\max} abgelesen. Aus der Größe von w_{\max} ergibt sich dann der $DVF = |w_{\max} / w_{g0}|$ für die betrachtete diskrete Frequenzstelle f_x .

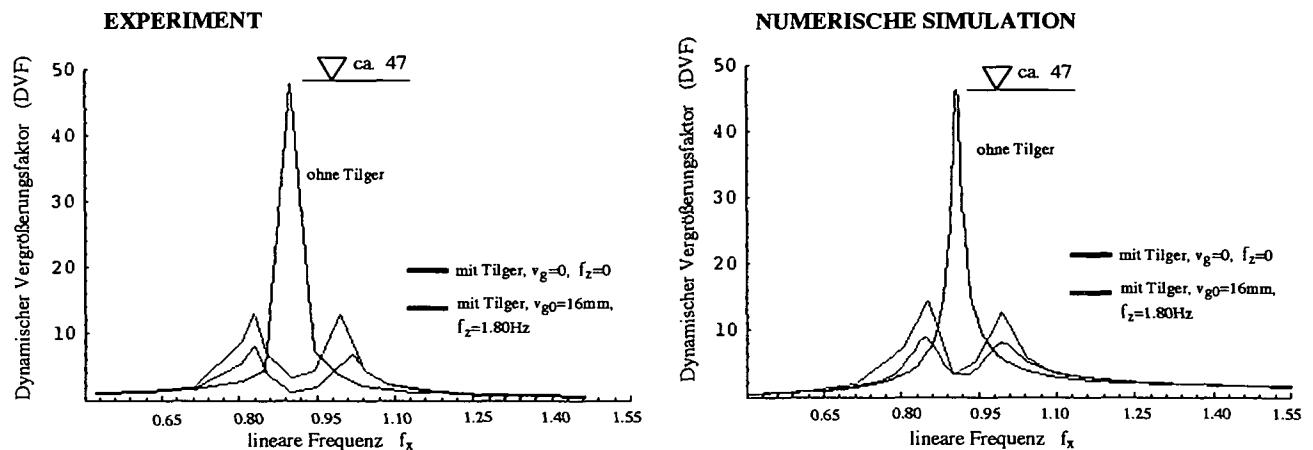


Abb. 3.31: Experimentelles und numerisches Ergebnis des Dynamischen Vergrößerungsfaktors (DVF) des Hauptsystems mit teilweise optimiertem Flüssigkeitstilger; horizontale lineare Erregerfrequenz f_x ; nichtlineares Dämpfermodell δ_L ; Tilger ohne Blende (schwach gedämpft)

Der in Abb. 3.31 dargestellte Vergleich von Experiment mit numerischer Simulation mit Turbulenzdämpfung zeigt eine außerordentlich gute Übereinstimmung. Die schwarze Linie in Abb. 3.31 zeigt den Frequenzgang des Hauptsystems ohne Wirkung des Tilgers. Aus dem Verlauf der blauen Linie ist die tilgende Wirkung des Flüssigkeitstilgers erkennbar und die rote Linie veranschaulicht wiederum den negativen Einfluss der zugeschalteten vertikalen Anregung v_g .

3.5.2 Ergebnisse des Hauptsystems mit nicht optimiertem Flüssigkeitstilger

Das experimentelle und im Vergleich dazu numerisch erzielte Ergebnis des stationären Schwingungsverhaltens des Hauptsystems mit nicht optimiertem Flüssigkeitstilger bei horizontaler Erregung in der Nähe der ersten Eigenfrequenz, $f_x = 0.85Hz$, ist in Abb. 3.32 dargestellt.

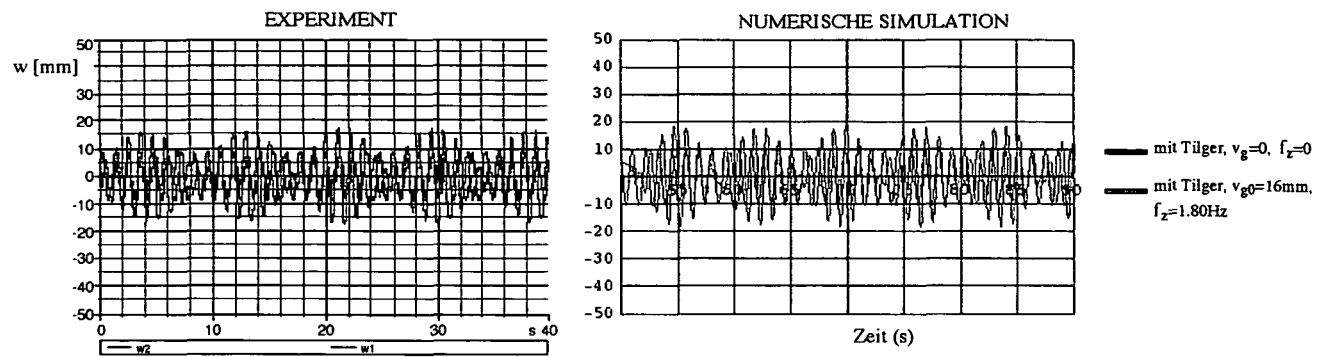


Abb. 3.32: Experimentelles und numerisches Ergebnis des stationären Schwingungsverhaltens des Hauptsystems mit nicht optimiertem Flüssigkeitstilger; horizontale Erregerfrequenz $f_x = 0.85\text{Hz}$; nichtlineares Dämpfermodell $\delta_L = 1.77$

Der Vergleich von Experiment und Numerik zeigt wiederum eine sehr gute Übereinstimmung. Die rote Linie veranschaulicht den Einfluss der entstehenden Parameterresonanz auf die stationäre Schwingungsantwort des Hauptsystems. Die Abb. 3.33 zeigt das experimentelle und numerische Ergebnis des DVF des Hauptsystems für den Fall des nicht optimierten Flüssigkeitstilgers. Auch hier wird eine exzellente Übereinstimmung von Experiment und numerischer Studie erreicht wobei die Ermittlung der experimentellen Werte analog zu Abschnitt 3.5.1 erfolgt.

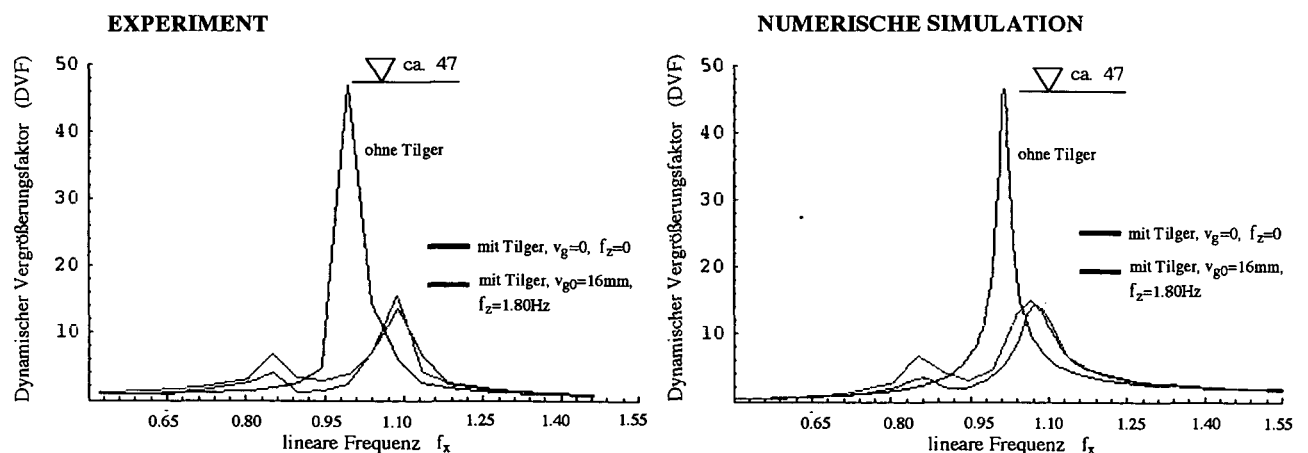


Abb. 3.33: Experimentelles und numerisches Ergebnis des Dynamischen Vergrößerungsfaktors (DVF) des Hauptsystems mit nicht optimiertem Flüssigkeitstilger; horizontale lineare Erregerfrequenz f_x ; nichtlineares Dämpfermodell δ_L ; Tilger ohne Blende (schwach gedämpft);

3.6 Anwendung von Flüssigkeitstilgern im Hochbau - Numerische Simulation eines dreigeschossigen Gebäudes unter Erdbebenanregung

3.6.1 Allgemeines

Das dargelegte Gebäudemodell mit optimiertem Flüssigkeitstilger liegt einer Benchmark Studie von Spencer et al.²⁹ zugrunde und wird in der Dissertation von Hochrainer [3, Seite 188] zufolge einer horizontalen Bebenanregung \ddot{w}_g numerisch untersucht, Abb. 3.34.

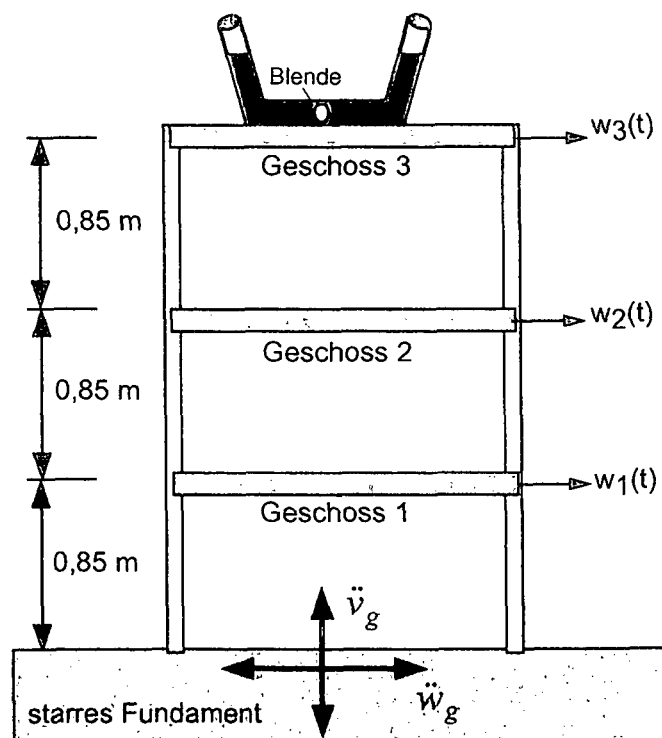


Abb. 3.34: Dreigeschossiges Gebäudemodell, Flüssigkeitstilger fixiert im dritten Geschoss, Quelle: Hochrainer [3, Seite 188]

Zum Zwecke der Verallgemeinerung dieser Arbeit wird in weiterer Folge eine kombinierte horizontale \ddot{w}_g und vertikale \ddot{v}_g Erdbebeneinwirkung, die in der Realität mehr oder weniger ausgeprägt vorhanden ist, betrachtet. Insbesondere soll in Ergänzung zu den Abschnitten 3.3 und 3.4, wo ein SDOF-Stockwerksrahmen mit Flüssigkeitstilger unter Vorgabe einer kombinierten harmonischen Anregung

umfassend numerisch und experimentell analysiert wurde, die eventuell schädliche Auswirkung der vertikalen Bebenanregung untersucht werden.

Die Gesamtmasse aller Geschosse und Stützen, ohne Flüssigkeitstilger, beträgt 2943 kg und die Gesamthöhe 2.55 m . Die Massen- und Steifigkeitsmatrix des Gebäudemodells wurden von Prof. T.T. Soong, State University von New York in Buffalo, Department of Civil Engineering, im Zuge der Dissertation von Hochrainer [3] zur Verfügung gestellt,

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 981 & 0 & 0 \\ 0 & 981 & 0 \\ 0 & 0 & 981 \end{bmatrix} [\text{kg}] , \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 3.9 & -1.94 & 0.38 \\ -1.94 & 3.13 & -1.52 \\ 0.38 & -1.52 & 1.18 \end{bmatrix} \times 10^6 [\text{N/m}] . \quad (3-64)$$

Mit Hilfe der angegebenen Massen- und Steifigkeitsmatrix ergeben sich die Eigenvektoren durch Lösen des zugehörigen Eigenwertproblems, wie in Kapitel 1, Abschnitt 1.1.1 dargelegt, zu

$$\bar{\phi}_1 = \begin{pmatrix} 0.2123 \\ 0.5597 \\ 0.8011 \end{pmatrix} , \quad \bar{\phi}_2 = \begin{pmatrix} 0.6763 \\ 0.5076 \\ -0.5338 \end{pmatrix} , \quad \bar{\phi}_3 = \begin{pmatrix} -0.7054 \\ 0.6551 \\ -0.2708 \end{pmatrix} . \quad (3-65)$$

Dabei wurde die Orthogonalität der Eigenvektoren bezüglich der Massenmatrix \mathbf{M} , wie in Kapitel 1, Abschnitt 1.1.2 ausgeführt, überprüft. Aufgrund der Abbildung des „großen“ Benchmark Problems in ein verkleinertes Modell werden die folgenden Transformationsgrößen (Maßstäbe) angegeben: Kraft=1:16, Masse=1:16, Zeit=1:2, Verschiebung=1:4 und Beschleunigung=1:1. Unter Berücksichtigung dieser Maßstäbe ergeben sich die ungedämpften linearen Eigenfrequenzen des skalierten Gebäudemodells zu

$$f_{s1} = 2.38\text{ Hz} , \quad f_{s2} = 7.44\text{ Hz} , \quad f_{s3} = 12.29\text{ Hz} , \quad (3-66)$$

und weiters sind die modalen linear viskosen Dämpfungskoeffizienten wie folgt vorgegeben,

$$\zeta_{s1} = 0.01, \quad \zeta_{s2} = 0.02, \quad \zeta_{s3} = 0.03. \quad (3-67)$$

Der Entwurf und die optimale Abstimmung des Flüssigkeitstilgers erfolgt hier, analog zu den Ausführungen von Hochrainer [3, Seite 188] auf die Grundfrequenz f_{s1} . Als günstigste Installationsposition des Tilgers ergibt sich dann, aufgrund der Form des ersten Eigenvektors, definiert in Gl. (3-65), die dritte Geschossebene, wie in Abb. 3.34 eingezeichnet.

3.6.2 Optimale Abstimmung des geschlossenen Flüssigkeitstilgers mit Luftfeder

Prinzipiell ist in einem ersten Schritt die Geometrie und Masse des Flüssigkeitstilgers festzulegen. Das Verhältnis von Flüssigkeitsmasse zur modalen (bewegten) Gebäudemasse der zu tilgenden Schwingungsform wird im Allgemeinen mit $\mu \approx 0.5 - 3\%$ festgelegt, die Auswirkung ist dann durch Gl. (1-44) beschrieben. In unserem Fall beträgt die in der ersten Schwingungsform bewegte modale Gebäudemasse $M_1^* = 1531 \text{ kg}$, berechnet durch Vergleich der kinetischen Energie, wie z.B. in Ziegler [7, Seite 461] angegeben, woraus sich bei Wahl von $\mu = 2\%$ eine Flüssigkeitsmasse von $m_f = 30 \text{ kg}$ ergibt. Zur Festlegung der Geometrie des geschlossenen Tilgers mit Luftfeder werden die folgenden Größen gewählt, die auch von Hochrainer [3, Seite 189] angegeben werden: Effektive Länge $L_{eff} = 2.5 \text{ m}$, Rohrquerschnitte $A_H = A_B = 0.012 \text{ m}^2$, horizontale und schräge Länge des Flüssigkeitsfadens $B = 1.5 \text{ m}$ und $H = 0.5 \text{ m}$ sowie der Neigungswinkel $\beta = 40^\circ$. Damit ergeben sich die Geometriefaktoren $\kappa = \bar{\kappa} = (B + 2H \cos \beta) / L_{eff} = 0.91$ aus den Gln. (3-17) und (3-35).

In einem zweiten Schritt erfolgt die Bestimmung der optimalen ungedämpften Eigenkreisfrequenz ω_A und des optimalen äquivalenten linearen Dämpfungskoeffizienten ζ_A des geschlossenen Flüssigkeitstilgers. Dazu wird in einem ersten Entwurfsschritt das Kriterium von Den Hartog [23, Seite 91] für den konventionellen

Schwingungstilger (TMD), mit Hilfe einer Analogie, wie von Hochrainer [3, Seite 97] dargelegt und in Abschnitt 3.3.1 ausgeführt, modal angewendet. Im zweiten Entwurfsschritt erfolgt dann eine Überprüfung dieser optimalen Entwurfparameter unter Verwendung des Gütekriteriums im Zustandsraum. Im Fall einer Hauptstruktur mit mehr als einem schwingungsfähigen Freiheitsgrad zeigt sich nämlich, dass Eigenfrequenzen die sich in Nachbarlagen der zu tilgenden Eigenfrequenz f_{s1} befinden, sehr wohl Auswirkung auf das Ergebnis der Entwurfparameter haben, wie bereits in Kapitel 1, Abschnitt 1.3 angemerkt wurde. Die Entwurfparameter von Den Hartog sind dann erforderlichenfalls Nachzubessern. Insbesondere wird an dieser Stelle darauf hingewiesen, dass für die praktische Optimierung mit Hilfe des Gütekriteriums im Zustandsraum, lediglich die zwei benachbarten Schwingungsformen zu berücksichtigen sind.

3.6.2.1 Optimierung mit Hilfe der Analogie zu Den Hartog

Für die hier durchzuführende modale Optimierung des Flüssigkeitstilgers auf die erste Schwingungsform des skalierten Gebäudemodells wird auf Abschnitt 3.3.1 verwiesen. Das konjugierte Masseverhältnis μ^* ergibt sich aus Gl. (3-57) unter Verwendung der vorgelegten Parameter des Flüssigkeitstilgers, zu $\mu^* = 0.0165$. Einsetzen von μ^* in Gl. (3-56) und anschließend Auswerten der Gl. (3-59) liefert zwanglos die folgenden optimalen Entwurfparameter,

$$f_A = \frac{\omega_A}{2\pi} = 2.33 \text{ Hz} , \quad \zeta_A = 0.08 . \quad (3-68)$$

3.6.2.2 Optimierung mit Hilfe des Gütekriteriums im Zustandsraum

Die eventuelle Nachbesserung der ermittelten Entwurfparameter, Gl. (3-68), erfolgt mit Hilfe des Gütekriteriums im Zustandsraum. Dieses soll die Amplitudenspitzen des Frequenzganges bei erzwungenen Schwingungen möglichst klein halten. Die

Zustandsraumdarstellung erfordert eine Transformation der gekoppelten linearen Differentialgleichungen 2. Ordnung, modifizierte Gl. (3-52), in ein System von Differentialgleichungen 1. Ordnung. Eine derartige Transformation wurde bereits in Kapitel 1, Abschnitt 1.3, für einen konventionellen Schwingungstilger (TMD) ausgeführt. Unter der vorerst allgemeinen Annahme eines Hauptsystems mit N Freiheitsgraden und n installierten Flüssigkeitstilgern ergibt sich die zeitliche Ableitung des Zustandsvektors identisch zu Gl. (1-52),

$$\dot{\bar{z}} = (\mathbf{A} + \mathbf{BR}) \bar{z} - \bar{e}_g \ddot{w}_g + \bar{b}(t), \quad \bar{b} = \mathbf{E}_F \bar{F}(t), \quad (3-69)$$

wobei die Hypermatrizen, analog zu Gl. (1-53), wie folgt definiert sind,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}_S^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} & -\mathbf{M}_S^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}_S^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix} & -\mathbf{M}_S^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix} \end{bmatrix}, \quad (3-70)$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_f & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{C}_f \end{bmatrix}, \quad \bar{e}_g = \begin{bmatrix} \bar{0} \\ \bar{0} \\ \mathbf{M}_S^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{M} \bar{r}_S + \mathbf{L} \mathbf{M}_f \bar{i} \\ \mathbf{K} \bar{i} \end{pmatrix} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E}_F = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{M}_S^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \end{bmatrix}.$$

Die Massenmatrix \mathbf{M}_S ist hier mit

$$\mathbf{M}_S = \begin{bmatrix} \mathbf{M} + \mathbf{L} \mathbf{M}_f \mathbf{L}^T & \mathbf{L} \mathbf{M}_f \bar{\mathbf{K}} \\ \mathbf{K} \mathbf{L}^T & \mathbf{I} \end{bmatrix}, \quad (3-71)$$

angegeben und die Positionsmatrix \mathbf{L} , Gl. (1-48), bleibt unverändert. Die Matrizen \mathbf{M}_f , \mathbf{C}_f , \mathbf{K}_f , \mathbf{K} und $\bar{\mathbf{K}}$ beziehen sich auf die installierten Flüssigkeitstilger, Lagekoordinaten $u_n(t)$, und sind wie folgt definiert,

$$\mathbf{M}_f = \text{diag}[m_{f1}, m_{f2}, \dots, m_{fn}], \quad \mathbf{C}_f = \text{diag}[2\zeta_{A1}\omega_{A1}, 2\zeta_{A2}\omega_{A2}, \dots, 2\zeta_{An}\omega_{An}], \quad (3-72)$$

$$\mathbf{K}_f = \text{diag}[\omega_{A1}^2, \omega_{A2}^2, \dots, \omega_{An}^2], \quad \mathbf{K} = \text{diag}[\kappa_1, \dots, \kappa_n], \quad \bar{\mathbf{K}} = \text{diag}[\bar{\kappa}_1, \dots, \bar{\kappa}_n].$$

Der gewünschte Amplitudenfrequenzgang des Hauptsystems mit Flüssigkeitstilger wird durch Transformation der Zustandsgleichung, Gl. (3-69), in den Frequenzbereich erhalten. Dazu wird in Gl. (3-69) der harmonische Lösungsansatz $\bar{z}(t) = \bar{z} e^{i\nu t}$ substituiert. Dieser liefert unter der Annahme einer harmonischen Krafterregung $\bar{b}(t) = \bar{b} e^{i\nu t}$ und Berücksichtigung von $w_g = 0$ den folgenden komplexen Amplitudenvektor

$$\bar{z}(\nu) = [i\nu \mathbf{I} - (\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{R})]^{-1} \bar{b}. \quad (3-73)$$

Das Gütekriterium ist dann, wie z.B. in Müller und Schiehlen³⁰ [Seite 249] oder von Hochrainer [3, Seite 131] angegeben, über eine Zielfunktion J wie folgt definiert,

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{z}_S^T(\nu) \mathbf{S} \bar{z}_S(\nu) d\nu = 2\pi \bar{b}^T \mathbf{P} \bar{b} \rightarrow \text{Minimum}. \quad (3-74)$$

wobei \mathbf{P} der Ljapunov'schen Matrizengleichung genügt:

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{R})^T \mathbf{P} + \mathbf{P}(\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{R}) = -\mathbf{S}. \quad (3-75)$$

Die Matrix $\mathbf{S} = \text{diag}[s_1, s_2, \dots, s_N]$ bezeichnet dabei eine diagonale, positiv semidefinite Bewertungsmatrix (Gewichtsmatrix), die eine unterschiedliche Gewichtung der einzelnen Zustandsgrößen erlaubt. Die Berechnung der Matrix \mathbf{P} erfolgt numerisch mit Hilfe des Computerprogramms Matlab 6.5. Das gesuchte Minimum der Funktion $J = J(\omega_{An}, \zeta_{An})$ wird schließlich mit dem in Matlab 6.5 integrierten Zusatzmodul, Matlab Optimisation Toolbox, und dem darin enthaltenen Befehl $x = \text{fminsearch}(J, x_0)$ numerisch ermittelt. x und x_0 bezeichnen dabei den

Lösungsvektor $\bar{x} = [\omega_{An}, \zeta_{An}]^T$ und den vorgegebenen Startpunkt der Minimumsuche in vektorieller Form $\bar{x}_0 = [\omega_{An0}, \zeta_{An0}]^T$. Insbesondere erweist es sich hier als günstig, als Startwerte die optimalen Entwurfparameter nach Den Hartog, Gl. (3-68), zu verwenden.

In Bezugnahme auf das gegebene Gebäudemodell, wie in Abb. 3.34 illustriert, wo die Schwingungsantwort des Hauptsystems, Vektor der unbekannten Lagekoordinaten $\bar{w} = [w_1 \ w_2 \ w_3]^T$, zufolge einer Erdbebeneinwirkung durch die Installation eines Flüssigkeitstilgers im dritten Geschöß optimal minimiert werden soll, hat das Gütekriterium die aus Gl. (3-74) folgende Form,

$$J = 2\pi \bar{e}_g^T \mathbf{P} \bar{e}_g \rightarrow \text{Minimum} . \quad (3-76)$$

Der komplexe Zustandsvektor $\bar{z}_S = [w_1 \ w_2 \ w_3 \ \dot{w}_1 \ \dot{w}_2 \ \dot{w}_3]^T$ enthält nur die zu minimierenden Verschiebungs- und Geschwindigkeitsgrößen des Hauptsystems. Der Einfluss des Flüssigkeitstilgers auf die Dynamik des Hauptsystems ist aufgrund der Kopplung des Differentialgleichungssystems, modifizierte Gl. (3-52), im Zustandsvektor \bar{z}_S weiterhin enthalten. Für die Gewichtsmatrix wird $\mathbf{S} = \text{diag} [10 \ 10 \ 10 \ 1 \ 1 \ 1]$ gewählt, wodurch eine Gewichtung der Verschiebungsgrößen des Hauptsystem erfolgt. Die dargelegte Wahl der Gewichtsmatrix hat sich in den nachfolgenden numerischen Simulation als äußerst günstig erwiesen. Nach Berechnung der Matrix \mathbf{P} ergibt die Minimumsuche der Funktion $J = J(\omega_A, \zeta_A)$ mit Hilfe von Matlab 6.5, Befehl $x = \text{fminsearch}(J, \bar{x}_0)$, wobei die Startwerte mit $\omega_{A0} = 2\pi \cdot 2.33$ und $\zeta_{A0} = 0.08$ aus Gl. (3-68) gewählt werden, folgende Lösung für die optimalen Entwurfparameter des Flüssigkeitstilgers,

$$f_A = \frac{\omega_A}{2\pi} = 2.33 \text{ Hz} , \quad \zeta_A = 0.07 . \quad (3-77)$$

Vergleicht man nun die Entwurfparameter aus der modalen Optimierung nach Den Hartog, Gl. (3-68), mit jenen des hier dargelegten Gütekriteriums, so ist lediglich ein geringe Abweichung im linearen Dämpfungskoeffizienten ζ_A feststellbar. Der

Einfluss der benachbarten Eigenfrequenzen ist in diesem Fall sehr gering. Eine Nachbesserung wird trotzdem vorgenommen. In der Abb. 3.35 ist der Amplitudenfrequenzgang der gewichteten Zustandsvariablen $\sum_{i=1}^6 s_i |z_i(\nu)|$ mit und ohne linearisiertem Flüssigkeitstilger im Dezibel Maßstab, $z_i[dB] = 20 \log z_i$, dargestellt, wobei die in Gl. (3-77) angegebenen Entwurfparameter aus dem Gütekriterium verwendet werden.

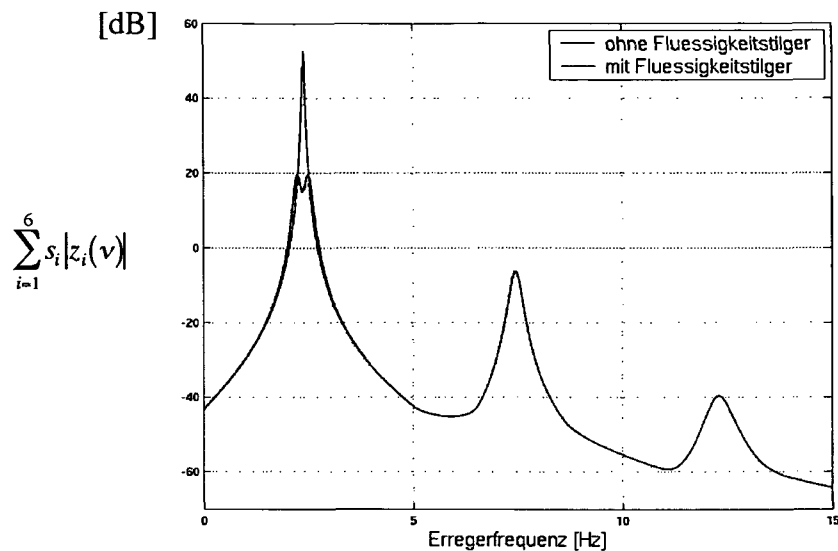


Abb. 3.35: Amplitudenfrequenzgang der gewichteten Zustandsvariablen $\sum_{i=1}^6 s_i |z_i(\nu)|$ des Hauptsystems mit und ohne linearisiertem Flüssigkeitstilger; optimale Entwurfparameter aus Gl. (3-77)

Man erkennt, dass der optimal abgestimmte Flüssigkeitstilger die erste Amplitudenspitze stark reduziert. Die praktische Realisierung der optimalen Eigenfrequenz $f_A = \omega_A / 2\pi = 2.33 \text{ Hz}$ erfolgt durch Verschließen der Rohrenden, wie in Abschnitt 3.2.3 ausgeführt. Die erforderliche Luftfederhöhe $H_L = V_0 / A_H$ ergibt sich mit dem Polytropenexponenten $n = 1.2$ und dem Ausgangsdruck $p_0 = 10^5 \text{ Pa}$ aus Gl. (3-29) zu,

$$H_L = \frac{2n p_0}{\rho \omega_A^2 \Delta L_{eff}} = 0.46 \text{ m} , \quad \Delta L_{eff} = L_{eff} - \frac{2g \sin \beta}{\omega_A^2} = 2.44 \text{ m} , \quad (3-78)$$

wobei ΔL_{eff} die Differenz der effektiven Länge des Flüssigkeitsfadens mit und ohne Wirkung der Luftfeder definiert. Das eingeschlossene Luftvolumen über der freien Flüssigkeitsoberfläche beträgt dann $A_H H_L = 0.0055 m^3$, wie in Abb. 3.36 maßstäblich dargestellt. Im oberen Viertel des Luftvolumens wird beidseitig eine Luftstromdrossel eingebaut, die bei großen Schwingungsamplituden des Flüssigkeitstilgers druckabbauend wirkt und dadurch die Gefahr eines möglichen Flüssigkeitsschlages verhindert.

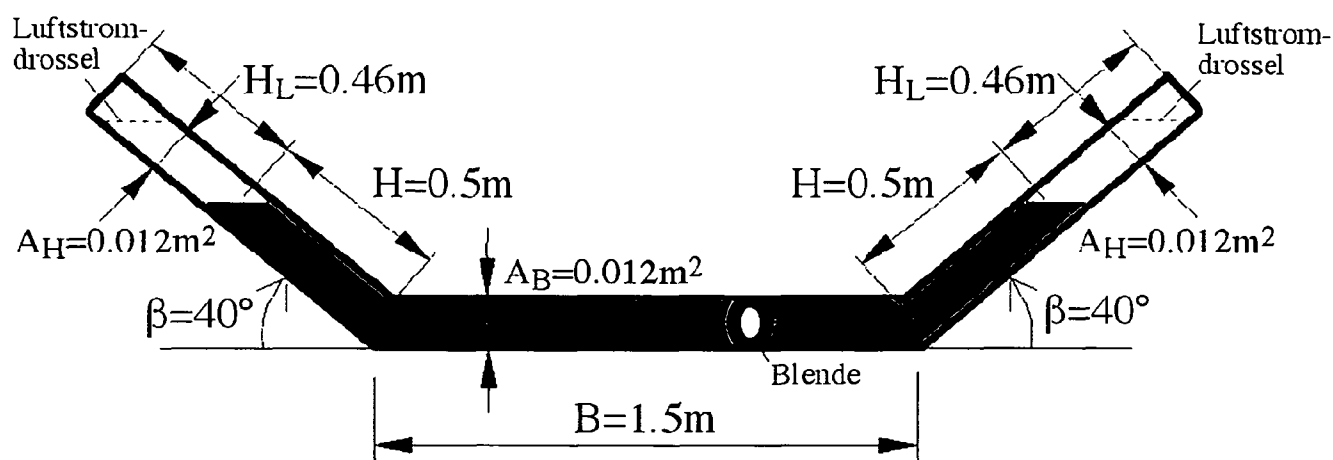


Abb. 3.36: Maßstäbliche Skizze des geschlossenen Flüssigkeitstilgers mit Luftfeder; dreigeschossiges Gebäudemodell; Luftstromdrossel auf beiden Seiten der Luftvolumina; $U_{max}/H_L = 0.30$

Für den in Abb. 3.36 illustrierten Flüssigkeitstilger ergibt sich $U_{max}/H_L = 0.30$, wobei $U_{max} = 140 mm$ aus der nachfolgenden numerischen Simulation des skalierten Gebäudemodells mit Flüssigkeitstilger in nichtlinearer Modellierung ermittelt wird. Der Wert $U_{max}/H_L = 0.30$ entspricht genau der vorgeschlagenen Grenze des Anwendungsbereiches von Flüssigkeitstilgern mit Luftfeder, wie in der Abb. 3.7 dargestellt.

3.6.3 Numerische Studie des dreigeschossigen Gebäudemodells - Erdbebeneinwirkung

Zu Beginn der numerischen Studien wird der Beschleunigungsverlauf des historisch bedeutungsvollen El Centro Bebens (horizontal und vertikal in gleicher Stärke = maßgebender Fall) betrachtet, wie in Abb. 3.37 illustriert. Dabei ist zu beachten, dass die Zeitinkremente des Bebens auf $\Delta t/2$, gemäß Abschnitt 3.6.1, zu reduzieren sind.

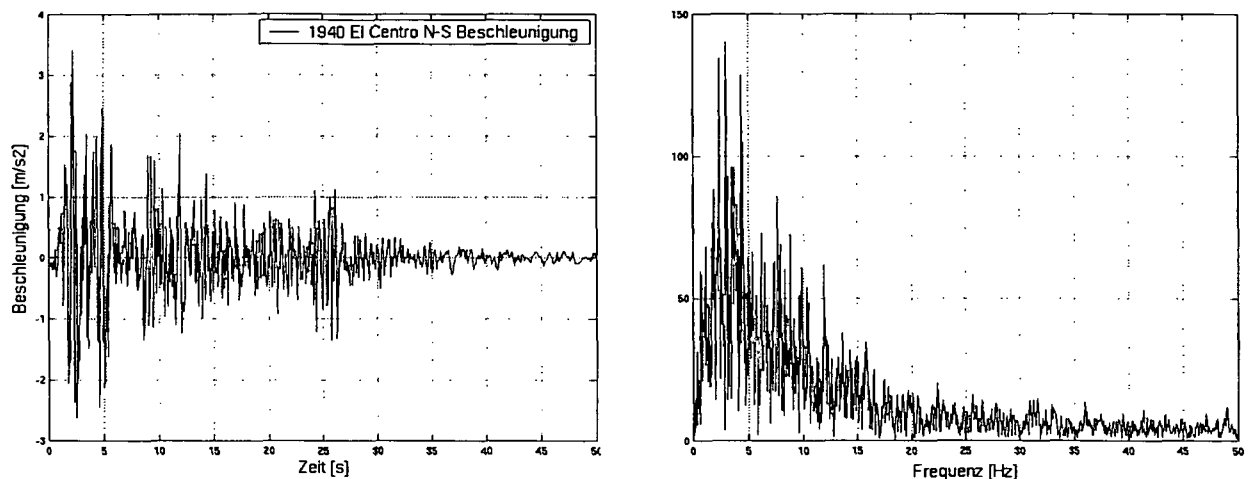


Abb. 3.37: Beschleunigungsverlauf des skalierten El Centro Bebens (Nord-Süd Komponente, 1940) im Zeit- und Frequenzbereich; Maximale Bodenbeschleunigung $\ddot{w}_{g,max} = 0.35g$; Quelle: University of Notre Dame, <http://www.nd.edu/~quake/>

Für die numerische Simulation des Flüssigkeitstilgers wird die parametererregte Bewegungsgleichung mit nichtlinearer Turbulenzdämpfung δ_L , Gl. (3-16), betrachtet. Dabei errechnet sich $\delta_L = 1.10$ aus dem optimalen, linearen Dämpfungskoeffizienten, $\zeta_A = 0.07$, mit Hilfe Gl. (3-61), wobei $U_0 = U_{max} = 150 \text{ mm}$ abgeschätzt wird, (dieser Wert folgt aus einer numerischen Simulation des skalierten Gebäudemodells mit linearisiertem Flüssigkeitstilger). Die Lösung des gekoppelten nichtlinearen parametererregten Differentialgleichungssystems, modifizierte Gl. (3-52), erfolgt mit Hilfe des Computerprogramms Matlab 6.5 / Simulink.

Das numerische Ergebnis des zeitlichen Schwingungsverhaltens des Hauptsystems mit und ohne Flüssigkeitstilger, Verschiebung $w_3(t)$, zufolge einer kombinierten horizontalen und vertikalen Bebenanregung (El Centro, 1940), ist in der Abb. 3.38 dargestellt.

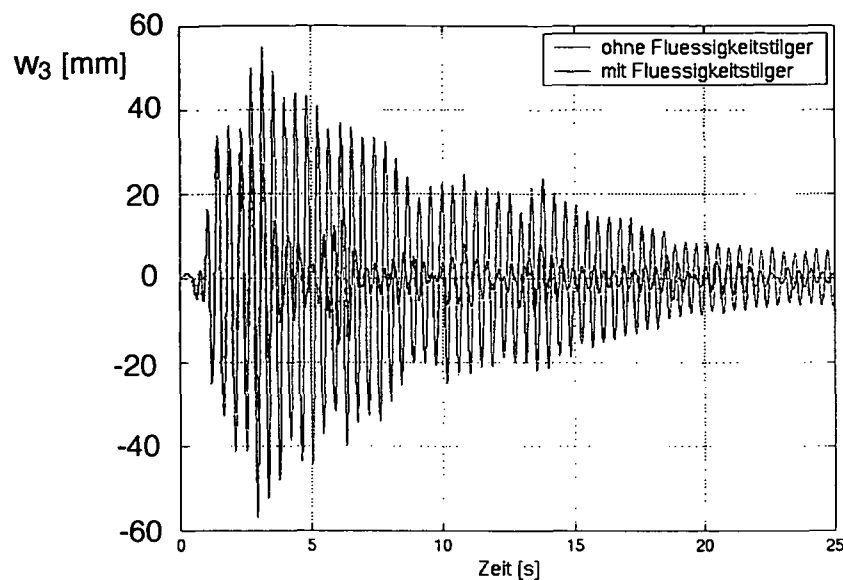


Abb. 3.38: Numerisches Ergebnis des zeitlichen Schwingungsverhaltens des skalierten Hauptsystems mit und ohne optimierten Flüssigkeitstilger; Verschiebung $w_3(t)$; kombinierte horizontale und vertikale Bebenanregung (skaliertes El Centro Beben, 1940); nichtlineares Dämpfermodell $\delta_L = 1.10$

In der Abb. 3.38 ist eine deutliche Reduktion der Schwingungsspitzen zufolge des installierten Flüssigkeitstilger sichtbar. Es soll im weiteren noch gezeigt werden, ob die vertikale Bebenanregung des Hauptsystems mit Flüssigkeitstilger, eventuell schädliche Auswirkungen auf das Dämpfungsverhalten hat.

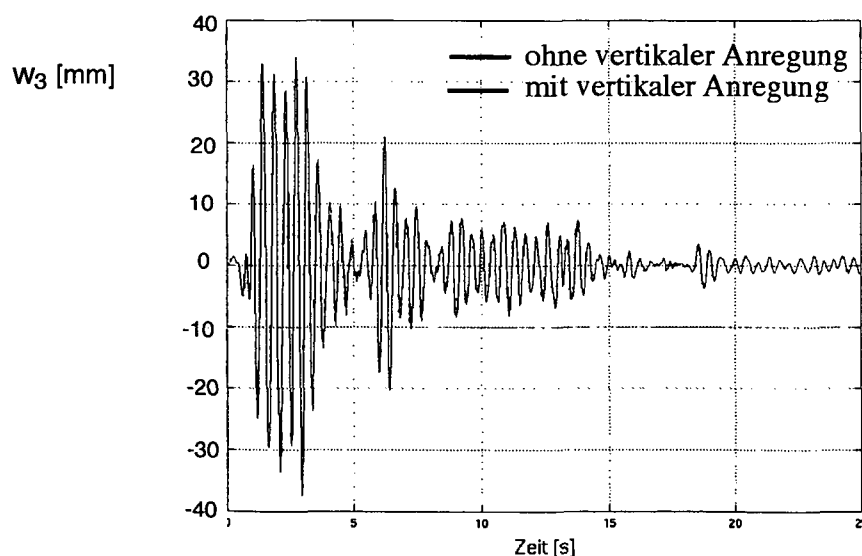


Abb. 3.39: Numerisches Ergebnis des zeitlichen Schwingungsverhaltens des skalierten Hauptsystems mit Flüssigkeitstilger; Verschiebung $w_3(t)$; mit und ohne vertikaler Bebenanregung (skaliertes El Centro Beben, 1940); nichtlineares Dämpfermodell $\delta_L = 1.10$

Dazu ist in der Abb. 3.39 das zeitliche Schwingungsverhalten des Hauptsystems mit Flüssigkeitstilger, Verschiebung $w_3(t)$, mit und ohne vertikaler Bebenanregung illustriert. Man erkennt, dass die vertikale Anregung, innerhalb des Beobachtungszeitraumes, keine schädlichen Auswirkungen auf die Verschiebung $w_3(t)$ des Hauptsystems mit optimierten Flüssigkeitstilger hat. Das in Abschnitt 3.2.5 ausführlich diskutierte unerwünschte Parameterresonanzphänomen kommt hier also nicht zustande. Die hinreichende Stabilitätsbedingung für geschlossene Flüssigkeitstilger, Gl. (3-49), kann im Falle von Erdbebeneinwirkungen an der kritischen Resonanzstelle $\lambda = 1/4$ ($v_z = 2\omega_A$), Gl. (3-47), in folgender Form angeschrieben werden,

$$\zeta_{A,G} = \frac{\ddot{v}_{g,\max}}{4g \left(1 + \frac{np_0 / \rho g}{H_L \sin \beta} \right)} \quad (3-79)$$

Man erkennt, dass zufolge des Verschließens der Rohrenden ein Korrekturterm im Nenner der Gl. (3-79) vorhanden ist, welcher die erforderliche Flüssigkeitsdämpfung $\zeta_{A,G}$ gegenüber einem offenen Flüssigkeitstilger, $\zeta_{A,0} = \ddot{v}_{g,\max} / 4g$, wesentlich verkleinert. In Bezugnahme auf das skalierte Gebäudemodell liefert die Auswertung der Gl. (3-79) mit den vorweggenommen Parametern des Flüssigkeitstilgers,

$$\zeta_{A,G} = 0.0021 < \zeta_A = 0.07, \quad (3-80)$$

wobei die maximale vertikale Bodenbeschleunigung des skalierten El Centro Bebens, Abb. 3.37, mit $\ddot{v}_{g,\max} = \ddot{w}_{g,\max} = 0.35g$ angegeben ist.

Als eine weitere Erdbebeneinwirkung wird der auf europäischer Ebene relevante Beschleunigungsverlauf des Friauler Bebens (Nord-Süd Komponente, 1976) betrachtet, wie in Abb. 3.40 illustriert. Hierbei ist zu beachten, dass die gegebenen Zeitinkremente wiederum, gemäß Abschnitt 3.6.1, zu adaptieren sind.

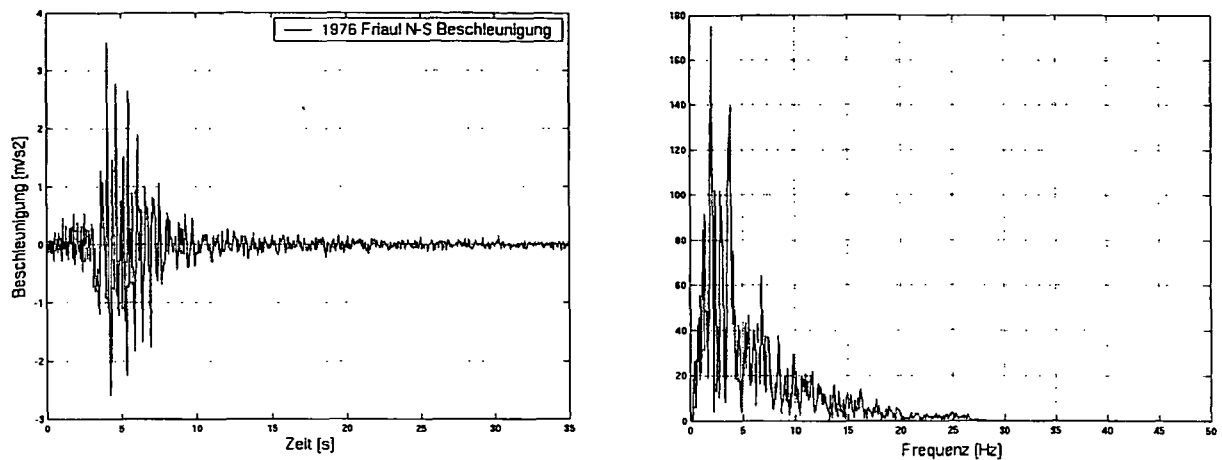


Abb. 3.40: Beschleunigungsverlauf des skalierten Friauler Bebens (Nord-Süd Komponente, 1976) im Zeit- und Frequenzbereich; Maximale Bodenbeschleunigung $\ddot{w}_{g,\max} = 0.36g$; Quelle: European Strong-Motion Database, <http://www.isesd.cv.ic.ac.uk/>

Die Erdbebeneinwirkung erfolgt dabei horizontal und vertikal in gleicher Stärke (=maßgebender Fall). Das numerische Ergebnis des zeitlichen Schwingungsverhaltens des Hauptsystems mit und ohne optimierten Flüssigkeitstilger, Verschiebung $w_3(t)$, zufolge kombinierter Bebenanregung (Friaul, 1976), ist in der Abb. 3.41 dargestellt.

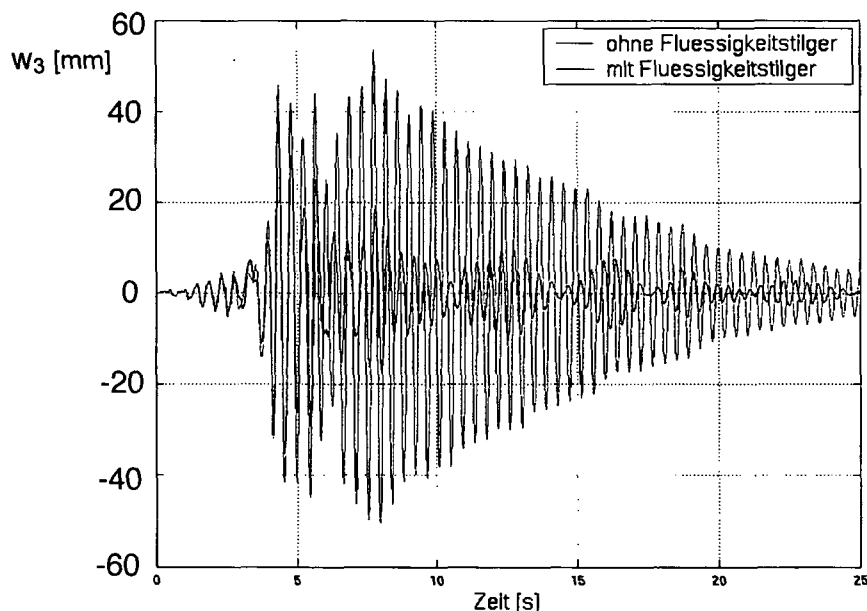


Abb. 3.41: Numerisches Ergebnis des zeitlichen Schwingungsverhaltens des Hauptsystems mit und ohne optimierten Flüssigkeitstilger; Verschiebung $w_3(t)$; kombinierte horizontale und vertikale Bebenanregung (skaliertes Friauler Beben, 1976); nichtlineares Dämpfermodell $\delta_L = 1.10$

Aus der Abb. 3.41 ist eine starke Reduktion der Schwingungsspitzen zufolge des installierten Flüssigkeitstilgers sichtbar. Nach Einsetzen der Starkbebenphase nach dem Vorläufer bei $t \approx 4\text{ s}$, dargestellt in Abb. 3.40, benötigt der passive Flüssigkeitstilger eine gewisse Zeitdauer zur Aktivierung, daher rühren die anfänglich wenig gedämpften Schwingungsspitzen. In der Dissertation von Hochrainer [3, Seite 140] wird daher die Anwendung eines aktiv geregelten Flüssigkeitstilgers vorgeschlagen. Das Prinzip ist im Kapitel 2, Abschnitt 2.2, skizziert. In der Abb. 3.42 ist weiters das zeitliche Schwingungsverhalten des Hauptsystems mit Flüssigkeitstilger, Verschiebung $w_3(t)$, mit und ohne vertikaler Bebenanregung dargestellt. Man erkennt, dass die vertikale Anregung praktisch keinen Einfluss auf die Verschiebung $w_3(t)$ des Hauptsystems mit optimierten Flüssigkeitstilger hat, Parameterresonanz tritt somit nicht auf.

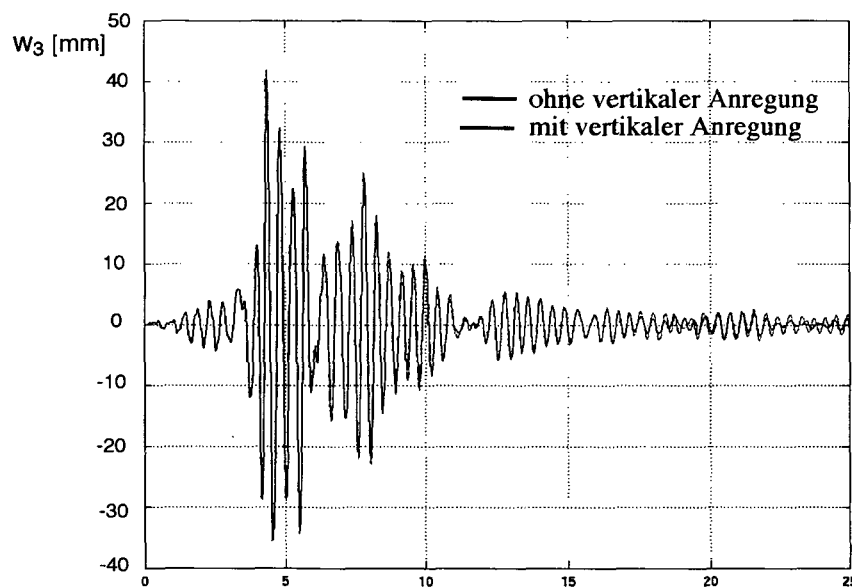


Abb. 3.42: Numerisches Ergebnis des zeitlichen Schwingungsverhaltens des Hauptsystems, Verschiebung $w_3(t)$; optimierter Flüssigkeitstilger mit und ohne vertikaler Bebenanregung (skaliertes Friauler Beben, 1976); nichtlineares Dämpfermodell $\delta_L = 1.10$

Die modifizierte Stabilitätsbedingung, Gl.(3-79), liefert im Falle des Friauler Bebens

$$\zeta_{A,G} = \frac{\ddot{v}_{g,\max}}{4g \left(1 + \frac{np_0 / \rho g}{H_L \sin \beta} \right)} = 0.0022 < \zeta_A = 0.07, \quad (3-81)$$

wobei die maximale vertikale Bodenbeschleunigung des skalierten Friauler Bebens, Abb. 3.41, mit $\ddot{v}_{g,\max} = \ddot{w}_{g,\max} = 0.36 g$ gegeben ist.

Die dargelegten numerischen Studien bestätigen, dass eine zusätzliche vertikale Erdbebeneinwirkung, innerhalb des Beobachtungszeitraumes, keine schädlichen Auswirkungen auf das Dämpfungsverhalten des ausreichend gedämpften Flüssigkeitstilgers hat. Abschließend ist noch anzumerken, dass auch im Falle einer Erdbebeneinwirkung, die hinreichende Bedingung zur sicheren Vermeidung von Parameterresonanz, $\zeta_A > \zeta_{A,G}$ aus Gl. (3-49), an der gefährlichen Resonanzstelle, $\lambda = 1/4$, nachzuweisen ist.

3.6.4 Numerische Studie des dreigeschossigen Gebäudemodells - harmonische Anregung

Um den Einfluss bzw. die Gefahr von Parameterresonanz zu verdeutlichen wird in weiterer Folge eine zeitlich harmonische Anregung des Hauptsystems mit optimierten Flüssigkeitstilger in horizontaler $w_g = w_{g0} \cos 2\pi f_x t$ und vertikaler $v_g = v_{g0} \cos 2\pi f_z t$ Richtung betrachtet. Dabei werden die Erregeramplituden und Erregerfrequenzen wie folgt gewählt: $w_{g0} = 5 \text{ mm}$, $v_{g0} = 150 \text{ mm}$ und $f_x = f_{s1} = 2.38 \text{ Hz}$ bzw. $f_z = 2 f_A = 4.66 \text{ Hz}$. Aus der speziellen Wahl von f_z folgt dann zwanglos das Frequenzverhältnis $\lambda = f_A^2 / f_z^2 = 1/4$, d.h. der kritische Wert für das Entstehen von Parameterresonanz, wie in Abschnitt 3.2.5, erläutert. Weiters folgt aus Gl. (3-49) die zur sicheren Vermeidung von Parameterresonanz erforderliche lineare Flüssigkeitsdämpfung $\zeta_{A,G} = 2 v_{g0} \sin \beta / L_{\text{eff}} = 0.077$, die in unserem Fall nicht vorhanden ist, da die optimale Dämpfung des Flüssigkeitstilgers in Gl. (3-77) mit $\zeta_A = 0.07$ gegeben ist. Dem zur Folge wird Parameterresonanz angefacht. Die Abb. 3.43 illustriert das zeitliche Schwingungsverhalten des Hauptsystems, Verschiebung $w_3(t)$, einerseits ohne Flüssigkeitstilger und andererseits bei optimal abgestimmten

Flüssigkeitstilger, mit und ohne vertikaler harmonischer Anregung. Es zeigt sich, dass die vertikale harmonische Anregung einen unerwünschten Schwebungseffekt hervorruft, der das optimale Dämpfungsverhalten des Flüssigkeitstilgers beeinträchtigt, wie bereits durch numerische Simulationen in Abschnitt 3.3.2 erkannt wurde. Im Vergleich mit dem Schwingungsverhalten des Hauptsystems ohne Flüssigkeitstilger, grüne Linie in Abb. 3.43, ist aber noch immer eine ausreichend starke Reduktion der maximalen Schwingungsantwort des Hauptsystems, Verschiebung $w_3(t)$, feststellbar.

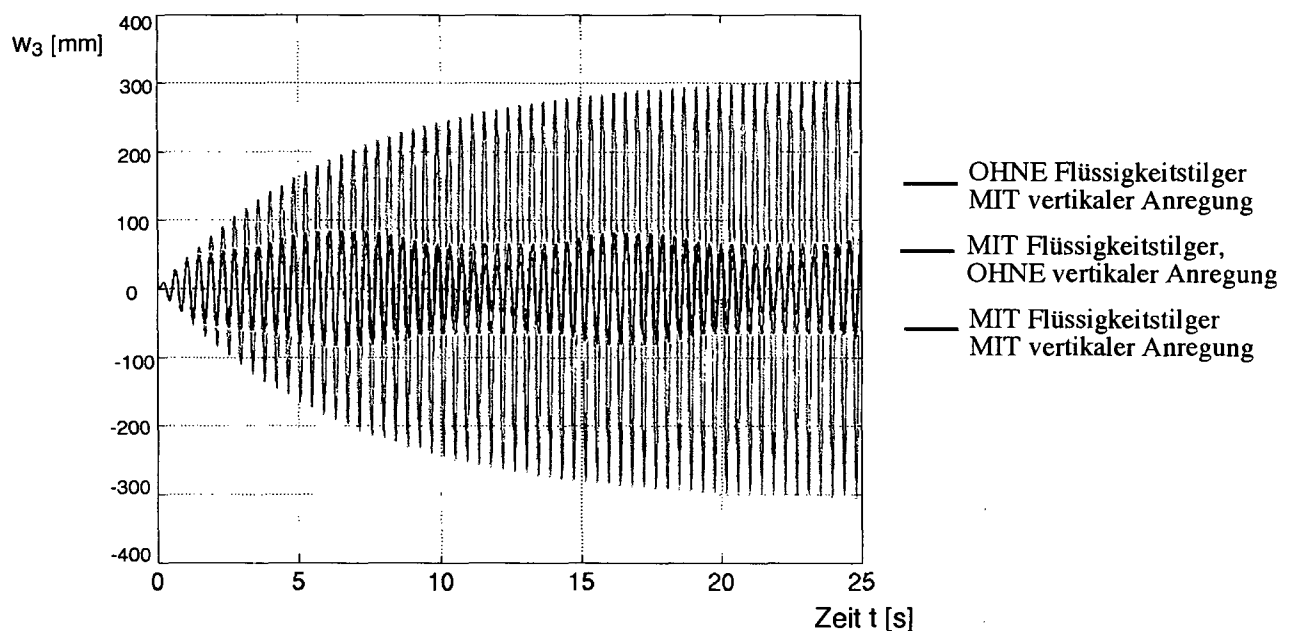


Abb. 3.43: Numerisches Ergebnis des zeitlichen Schwingungsverhaltens des skalierten Hauptsystems mit und ohne Flüssigkeitstilger, Verschiebung $w_3(t)$; Flüssigkeitstilger mit und ohne vertikaler harmonischer Anregung; horizontale Anregung: $w_{g0} = 5\text{mm}$, $f_x = f_{s1} = 2.38\text{Hz}$; vertikale Anregung: $v_{g0} = 150\text{mm}$, $f_z = 2f_A = 4.66\text{Hz}$; nichtlineares Dämpfermodell $\delta_L = 1.10$

Erhöht man die optimale lineare Dämpfung, $\zeta_A = 0.07$, auf den zur sicheren Vermeidung von Parameterresonanz erforderlichen Wert, $\zeta_{A,G} = 0.077$, so ergibt sich die Verschiebung $w_3(t)$ wie in Abb. 3.44 illustriert.

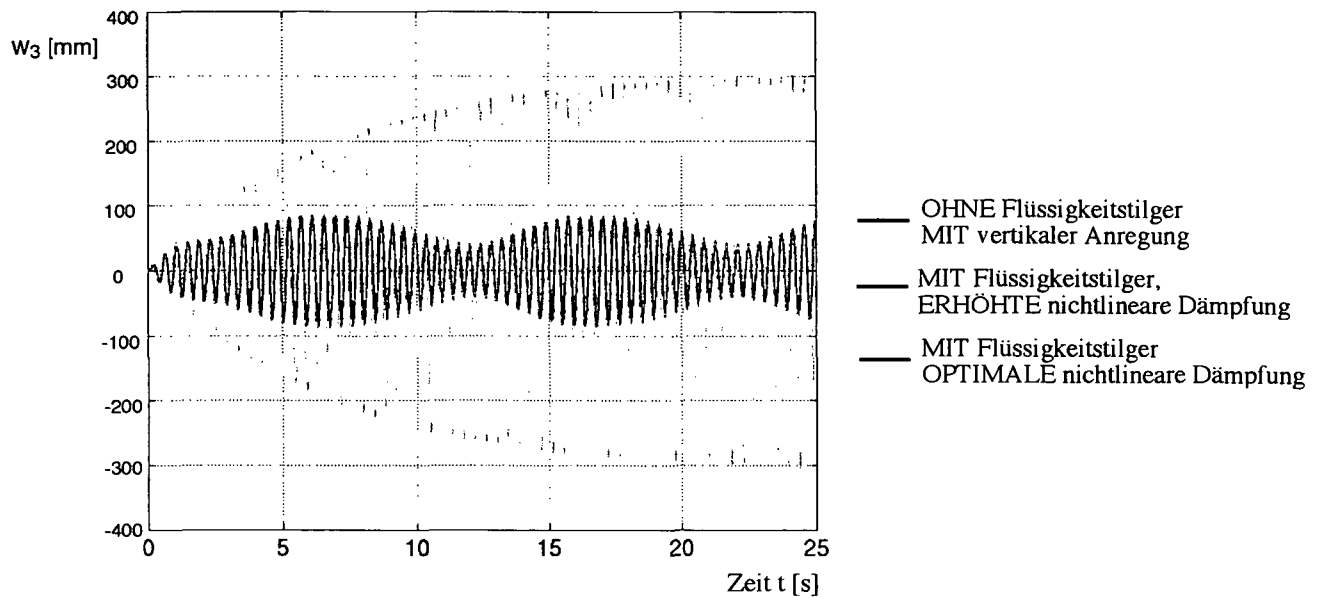


Abb. 3.44: Numerisches Ergebnis des zeitlichen Schwingungsverhaltens des skalierten Hauptsystems mit und ohne Flüssigkeitstilger, Verschiebung $w_3(t)$; Flüssigkeitstilger mit erhöhter und optimaler Dämpfung; horizontale Anregung: $w_{g0} = 5\text{ mm}$, $f_x = f_{S1} = 2.38\text{ Hz}$; vertikale Anregung: $v_{g0} = 150\text{ mm}$, $f_z = 2f_A = 4.66\text{ Hz}$; nichtlineares Dämpfermodell $\delta_{LG} = 1.21$ und $\delta_L = 1.10$

Dabei errechnet sich der turbulente Dämpfungsterm $\delta_{LG} = 1.21$ aus Gl. (3-61), wobei die maximale Schwingungsamplitude $U_{\max} = 150\text{ mm}$ wiederum aus einer numerischen Simulation des Hauptsystems mit linearisiertem Flüssigkeitstilger folgt. Die Abb. 3.44 zeigt sehr ähnliche Ergebnisse für die Verschiebung $w_3(t)$ mit erhöhter und optimaler nichtlinearer Dämpfung des Flüssigkeitstilgers. Einerseits erreicht man durch die Erhöhung zwar eine sichere Vermeidung von Parameterresonanz, andererseits verstimmt man den bereits optimierten Flüssigkeitstilger. Im Falle von $\xi_A < \xi_{A,G}$ ist daher eine detaillierte Untersuchung der vertikalen Anregung und deren eventuellen schädlichen Auswirkungen durchzuführen.

3.7 Schlussbemerkung

In Verallgemeinerung der bisherigen Untersuchungen auf dem Gebiet von Flüssigkeitstilgern wird das gekoppelte System, ein SDOF-Stockwerksrahmen mit Flüssigkeitstilger, zufolge einer kombinierten horizontalen und vertikalen Anregung

betrachtet. Die Bewegungsgleichung des Flüssigkeitstilgers enthält dann eine zeitlich veränderliche Systemsteifigkeit und dem zur Folge entsteht die Gefahr von Parameterresonanz. Dieses Instabilitätsphänomen wird umfassend untersucht und die eventuell schädlichen Auswirkungen der vertikalen Anregung auf das optimale Dämpfungsverhalten des Flüssigkeitstilgers werden diskutiert. Im Zuge der numerischen Simulation zeigt sich, dass im Falle der Parameterresonanzgefahr des Flüssigkeitstilgers, unbedingt die nichtlineare Bewegungsgleichung mit Turbulenzdämpfung, Gl. (3-16), zu betrachten ist. Es gelingt eine hinreichende Stabilitätsbedingung der erforderlichen linearen Flüssigkeitsdämpfung $\zeta_{A,0}$ bzw. $\zeta_{A,G}$, Gl. (3-48) bzw. Gl. (3-49), anzugeben, welche die sichere Vermeidung von Parameterresonanz gewährleistet. Insbesondere ergibt sich im Falle von Erdbebeneinwirkungen für den offenen Flüssigkeitstilger die einfache Formel $\zeta_{A,0} = \ddot{v}_{g,max} / 4g$. Bei Vorliegen einer vertikalen Anregung ist somit die optimale Dämpfung des offenen Flüssigkeitstilgers mit $\zeta_A > \zeta_{A,0}$, Gl. (3-48), nachzuweisen, dann kann die numerische Simulation im Allgemeinen ohne Berücksichtigung der vertikalen Anregung durchgeführt werden.

LITERATUR

- ¹ Sakai, F., Takaeda, S., Tamaki, T., 1989, 'Tuned liquid column damper – new type device for suppression of building vibration', Proc. Int. Conference On High-rise Buildings, Nanjing China, p. 926-931.
- ² Balendra, T. Wang, C.M., Cheong, H.F., 1995, 'Effectiveness of tuned liquid column dampers for vibration control of towers', Engineering Structures, Vol.17, p.668-675.
- ³ Hochrainer, M.J., 2001, 'Control of vibrations of civil engineering structures with special emphasis on tall buildings', Dissertation, Vienna University of Technology, ausgeführt am Institut für Allgemeine Mechanik (E201), TU-Wien, A-1040 Wien.
- ⁴ Klotter, K., 1978, 'Technische Schwingungslehre', Erster Band: Einfache Schwinger, Dritte, völlig neubearbeitete und erweiterte Auflage, Teil A: Lineare Schwinger, Springer Verlag Berlin Heidelberg New York.
- ⁵ Reiterer, M., Hochrainer, M.J., 2003, 'Investigation of Parametric Resonance in Tuned Liquid Column Dampers', PAMM, Vol.3, Issue 1, p. 122.123, <http://www.gamm-proceedings.com>.
- ⁶ Meirovitch, L., 1980, 'Computational methods in structural dynamics', Sijthoff&Noordhoff, Alphen aan den Rijn, The Netherlands Rockville, Maryland, USA.
- ⁷ Ziegler, F., 1998, 'Technische Mechanik der festen und flüssigen Körper', Dritte, verbesserte Auflage, Springer Wien New York.
- ⁸ Idelchik, I.E., 1960, 'Handbook of Hydraulic Resistance', Coefficient of Local Resistance and of Friction, Available from the U.S. Department of Commerce, Springfield.

-
- ⁹ Fried, E., Idelchik, I.E., 1989, 'Flow Resistance: a Design Guide for Engineers', Hemisphere, New York.
- ¹⁰ Blevins, R.D., 1992, 'Applied Fluid Dynamics Handbook, reprint, Krieger Publ., New York.
- ¹¹ Newmark, N.M., Rosenblueth, E., 1971, 'Fundamentals of Earthquake Engineering', Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, USA.
- ¹² Magnus, K., 1961, 'Schwingungen', Eine Einführung in die theoretische Behandlung von Schwingungsproblemen, B.G. Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart.
- ¹³ Merkin, D.R., 1997, 'Introduction to the Theory of Stability', Springer-Verlag New York, Inc.
- ¹⁴ Wittenburg, J., 1996, 'Schwingungslehre', Lineare Schwingungen, Theorie und Anwendung, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York.
- ¹⁵ Bogoljubow, N.N., Mitropolsky, Y.A., 1961, 'Asymptotic Methods in the Theory of Non-Linear Oscillations', Hindustan Publishing Corpn. (India), Dehli-6, Gordon&Breach, Science Publisher, Inc., New York.
- ¹⁶ Kotowski, G., 1943, 'Lösung der inhomogenen Mathieu'schen Differentialgleichung mit periodischen Störfunktionen beliebiger Frequenz (mit besonderer Berücksichtigung der Resonanzlösung), Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik (ZAMM), Bd.23, Nr.4, Seite 213-229.
- ¹⁷ Holl, H.J., Irschik, H., 1996, 'Ein Mehrzweck-Versuchsaufbau zum Studium von Schwingern mit zwei Freiheitsgraden, parametererregter Schwingungen und der Schwingungstilgung', Österreichische Ingenieur- und Architekten-Zeitschrift (ÖIAZ), 141. Jg., Heft 4/1996, Seite 153-156.
- ¹⁸ Nayfeh, A.H., Mook, D.T., 1979, 'Nonlinear Oscillations', A Wiley-Interscience Publication, John Wiley&Sons, New York – Chichester – Brisbane – Toronto.
- ¹⁹ Chopra, A.K., 1995, 'Dynamics of Structures', Theory and Application to Earthquake Engineering, Prentice Hall International, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey.
- ²⁰ Wolfram, S., 1999, 'The Mathematica Book', Fourth Edition, Wolfram Media, Cambridge University Press.
- ²¹ Blachman, N., 1992, 'Mathematica: A Practical Approach', Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
- ²² Maeder, R.E., 2000, 'Computer Science with Mathematica', Theory and Practice for Science, Mathematics and Engineering, Cambridge University Press.
- ²³ Den Hartog, J.P., 1936, 'Mechanische Schwingungen', Verlag von Julius Springer, Berlin.
- ²⁴ Soong, T.T., Dargush, G.F., 1997, 'Passive Energy Dissipation Systems in Structural Engineering', John Wiley&Sons, New York.
- ²⁵ Yalla, S.K., Kareem, M., 2000, 'On the Beat Phenomenon in Coupled Systems', in: 8th ASCE Specialty Conference on Probabilistic Mechanics and Structural Reliability, p. 1-5.
- ²⁶ Reiterer, M., Hochrainer, M.J., 2003, 'Parametric Resonance In Tuned Liquid Column Dampers: An Experimental Investigation', IAZ, 2004, in print.
- ²⁷ Hoffmann, J., 1998, 'Taschenbuch der Messtechnik', Fachbuchverlag Leipzig im Carl Hanser Verlag, Leipzig, S. 192.
- ²⁸ Clough, R.W., Penzien, J., 1975, 'Dynamics of Structures', McGraw-Hill Book Company, Berkeley.
- ²⁹ Spencer, B.F.Jr., Dyke, S.J., Deoskar, H.S., 1997, 'Benchmark Problems in Structural Control, Part II: Active Tendon System, in: Proc. of the 1997 ASCE Structures Congress, Portland, Oregon, April 13-16, 1997, also available: <http://www.nd.edu/~quake>.
- ³⁰ Müller, P.C., Schiehlen, W.O., 1976, 'Lineare Schwingungen', Theoretische Behandlung von mehrfachen Schwingern, Akademische Verlagsgesellschaft, Wiesbaden.

DANKSAGUNG

* Ein besonderer Dank gebührt Herrn ao.Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Rudolf Heuer, für die vielen gemeinsamen Arbeitsstunden im Labor für Modelldynamik. Insbesondere bei der Planung und Entwicklung des, im Zuge dieses Kapitels vorgelegten, ersten Modellversuchsstandes war Herr Prof. Rudolf Heuer maßgebend beteiligt und stand jederzeit für Fragen zur Verfügung. Im weiteren erlernte ich vorwiegend von Herrn Prof. Rudolf Heuer die Bedienung der gesamten Laborgeräte sowie die korrekte Messdatenerfassung und Verarbeitung.

** Ein Dank gebührt der Hochschuljubiläumsstiftung der Stadt Wien, die mit ihrer finanziellen Unterstützung den Ankauf zahlreicher für die durchgeführten Experimente unbedingt notwendiger Geräte ermöglicht haben.

*** Besonders danken möchte ich Herrn Dipl.-Ing. Dr.techn. Markus J. Hochrainer, der die Entwicklung eines neuartigen elektronischen Widerstandmessinstrumentes für den Flüssigkeitstilger geleitet und in gemeinsamer Arbeit realisiert hat. Ebenso für die nachträgliche Verbesserungsmaßnahme dieses Messgerätes sei ihm an dieser Stelle recht herzlich gedankt.

4. EINSATZ VON FLÜSSIGKEITSTILGERN ZUR REDUZIERUNG VON BRÜCKEN- SCHWINGUNGEN

In diesem Kapitel wird die Möglichkeit des Einsatzes von Flüssigkeitstilgern zur Reduzierung von Brückenschwingungen nachgewiesen. Im Kapitel 3 wurde der Tilger im Hinblick auf bebenerregte Hochbauten einer kombinierten translatorischen Anregung ausgesetzt. Es wurde gezeigt, dass bei ausreichend großer optimaler Dämpfung $\zeta_A > \zeta_{A,0}$, Gl. (3-48), des offenen Tilgers, kein unerwünschter Aufschaukelungsprozess der Flüssigkeitsschwingung zu erwarten ist. Im folgenden Abschnitt wird das gekoppelte System Brücke/Tilger einer allgemeinen ebenen Bewegung ausgesetzt. Die Anregung des Flüssigkeitstilgers erfolgt daher sowohl translatorisch als auch rotatorisch. Insbesondere wird die freie und erzwungene schiefe Biegedrillschwingung des kontinuierlichen Brückenträgers mit Berücksichtigung der Wirkung des Flüssigkeitstilgers ausführlich diskutiert. Nach Ermittlung der gekoppelten Bewegungsgleichungen werden numerische Simulationen durchgeführt und der dämpfende Effekt des Tilgers untersucht. Abschließend wird ein zweiter, im Zuge dieser Dissertation entwickelter Modellversuchstand vorgelegt, der die positive Wirkung des Flüssigkeitstilgers für Brückenbauwerke experimentell nachweist. Die aus Messungen am Modell gewonnenen Ergebnisse werden mit der numerischen Simulation verglichen und im Detail diskutiert.

4.1 Einführung

Im Rahmen dieser Dissertation sollen Flüssigkeitstilger für weitgespannte Brückentragwerke, wie z.B. Schrägseilbrücken, dargestellt in Walther¹ und Roik², oder weitgespannte Fußgängerbrücken, dargestellt z.B. bei Petersen³, entwickelt werden. Diese weitgespannten Brücken sind sehr oft in Leichtbauweise hergestellt und dadurch äußerst schwingungsanfällig. Im Gegensatz zu Hochbaukonstruktionen, die in vertikaler Richtung eine sehr hohe Steifigkeit aufweisen, besitzen Brücken eine wesentlich geringere Steifigkeit, wodurch schiefe Biegeschwingungen mit relativ großen Amplituden auftreten können. Ein sehr interessantes Einsatzgebiet, dass von Flüssigkeitstilgern erschlossen werden soll, ist unter anderem der problematische Ausbauzustand von weitgespannten Brücken im Vorbauverfahren, wie in der Abb. 4.1 illustriert.

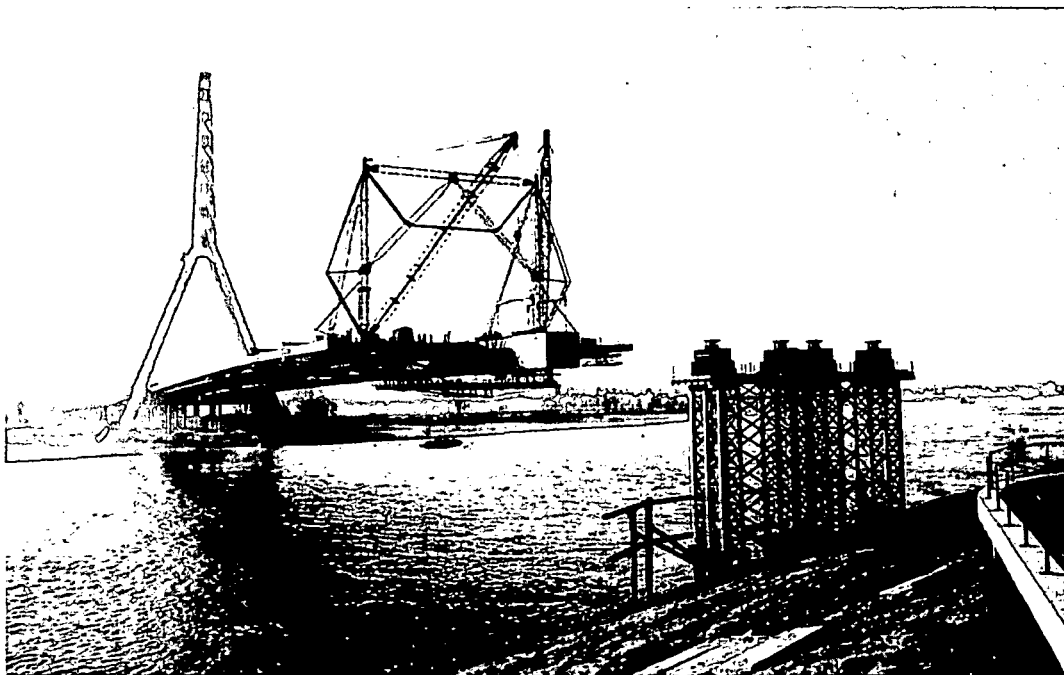


Abb. 4.1: Ausbauzustand einer weitgespannten Schrägseilbrücke in Düsseldorf, Rheinbrücke Flehe,
Quelle: Walther [1, Seite 29]

Im Ausbauzustand wird eine Brücke meist über große Längen freitragend oder wie in Abb. 4.1 dargestellt, an Kabeln abgespannt, vorgeschoben. In diesem

Ausbauzustand weist die Brücke eine sehr geringe Steifigkeit auf und beginnt bei Windbelastung, im tieffrequenten Bereich, Schwingungen mit großen Amplituden auszuführen. Ohne entsprechende Gegenmaßnahmen droht dann die Gefahr einer irreparablen Brückenschädigung. Die Montage eines im Ausbauzustand mitgeführten Flüssigkeitstilgers, der zudem eine einfache Variation (Verkleinerung) und damit Abstimmung seiner Eigenfrequenz auf die Brücke, durch Zugabe von Flüssigkeit erlaubt, würde das Schwingungsproblem im Ausbauzustand weitgehend beseitigen. Eine Anwendung von Flüssigkeitstilgern zur Reduzierung von winderregten Schwingungen wird in Kapitel 7 ausführlich untersucht.

Die Schwingungsprobleme von weitgespannten Brücken sind den planenden Ingenieuren sehr wohl bekannt, trotzdem kommt es immer wieder zu problematischen Schwingungsphänomenen die im Entwurfsstadium nicht ersichtlich waren. Jüngstes und zugleich populärstes Beispiel ist die am 10. Juni 2000 erstmals eröffnete Millennium Bridge in London, Abb. 4.2.



Abb. 4.2: Ansicht der Millennium Bridge in London; Zustand der Brücke zum Zeitpunkt der Eröffnung am 10. Juni 2000; Spannweite 330m; Quelle: www.arup.com/millenniumbridge/

Nachdem eine größere Gruppe von Fußgängern bei der Eröffnung die Millennium Bridge zu überqueren versuchte, wurden unzulässige Schwingungen in horizontaler Richtung mit Amplituden bis zu 70mm angefacht. Bereits zwei Tage nach der Ersteröffnung wurde daher die Brücke vorübergehend gesperrt und einer intensiven dynamischen Analyse unterzogen. Im Zuge dieser Analyse wurde festgestellt, dass die zweite Biegeeigenfrequenz des Brückenmittelfeldes, mit zugehöriger horizontaler Schwingungsform, bei ca. $f = 1.00\text{Hz}$ liegt und mit jener, durch Fußgänger horizontal induzierten Erregerfrequenz annähernd zusammenfällt, wie von Bachmann⁴ und in Kapitel 5 ausführlich dargelegt. Dieses Resonanzphänomen führt zu einer für Fußgänger unangenehmen Aufschaukelung der Schwingungsantwort in horizontaler Richtung. Das Ingenieurbüro Ove Arup & Partners welches mit der Planung und Konstruktion der Millennium Bridge beauftragt war, hat daraufhin eine umfangreiche, äußerst kostenintensive Sanierungsmaßnahme in die Wege geleitet, wie im Planausschnitt des Grundrisses der modifizierten Millennium Bridge illustriert, Abb. 4.3.

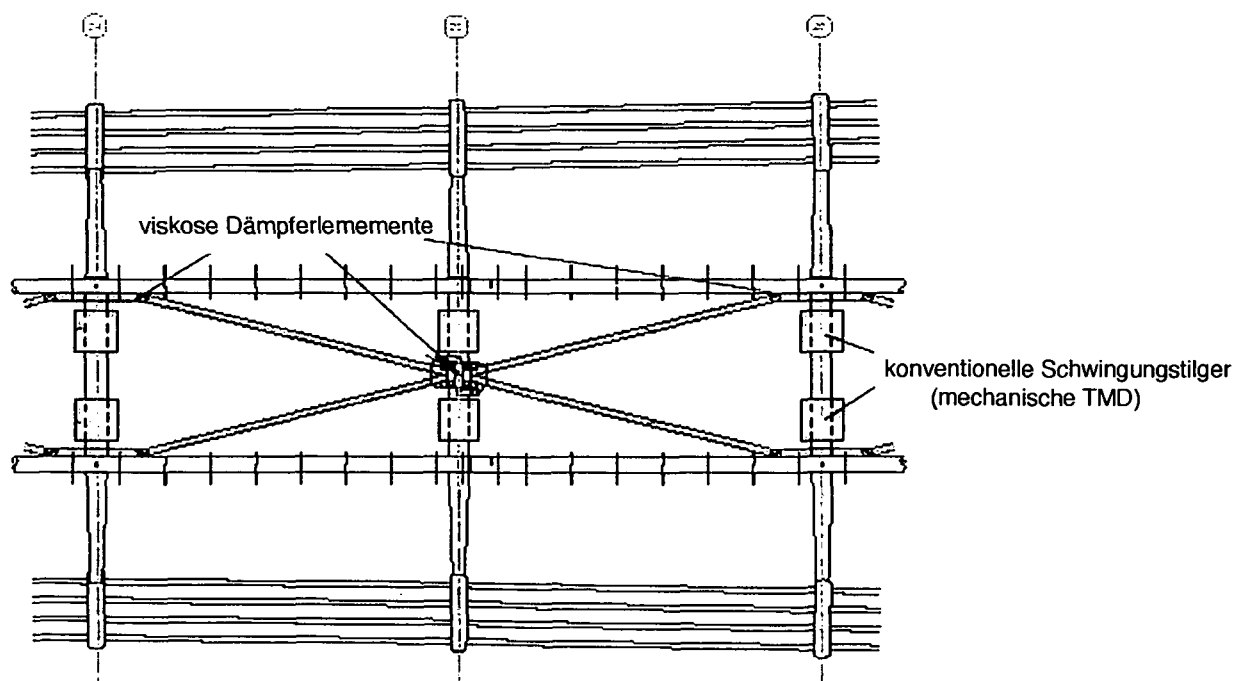


Abb. 4.3: Planausschnitt des Grundrisses der Millennium Bridge in London; Sanierungsmaßnahme durch den Einbau von ca. 100 Dämpferelementen; Quelle: www.arup.com/millenniumbridge/

Insgesamt wurden ca. 40 viskose Dämpferelemente, als Zwischen- und Verbindungsglieder eines ebenen Fachwerkverbandes, und ca. 60 konventionelle mechanische Schwingungstilger, Tuned Mass Damper (TMD), zur Reduzierung der Schwingungsantwort in den Brückenquerschnitt eingebaut. Der Kostenaufwand dieser Sanierungsmaßnahme war in der Größenordnung von ca. 10 Millionen Euro, also extrem hoch. Es stellt sich die Frage ob der Einsatz von Flüssigkeitstilgern denselben positiven Effekt der Schwingungsdämpfung erreichen kann, wobei insbesondere auf die vielen Vorteile dieser Tilgungsart hinzuweisen wäre, (äußerst kostengünstig, annähernd wartungsfrei, einfache Abstimmung der Entwurfsparameter, nur geringe zusätzliche Masse etc.). Eine detaillierte numerische Analyse der Millennium Bridge mit Wirkung von Flüssigkeitstilgern wird in Kapitel 6, Abschnitt 6.1, vorgelegt.

Zum heutigen Zeitpunkt existieren nur sehr wenige Arbeiten über den Einsatz von Flüssigkeitstilgern zur Reduzierung von Brückenschwingungen. Eine Übersicht des derzeitigen Forschungsstandes findet sich in Kapitel 2, Abschnitt 2.3.5. In einer neueren Arbeit von Xue [5] besitzt das gewählte mechanische Modell der Brücke nur einen einzigen Freiheitsgrad (degree-of-freedom, DOF), den Drehwinkel θ und wird durch ein äußeres Moment M_s zu Drehschwingungen angeregt, Abb. 4.4.

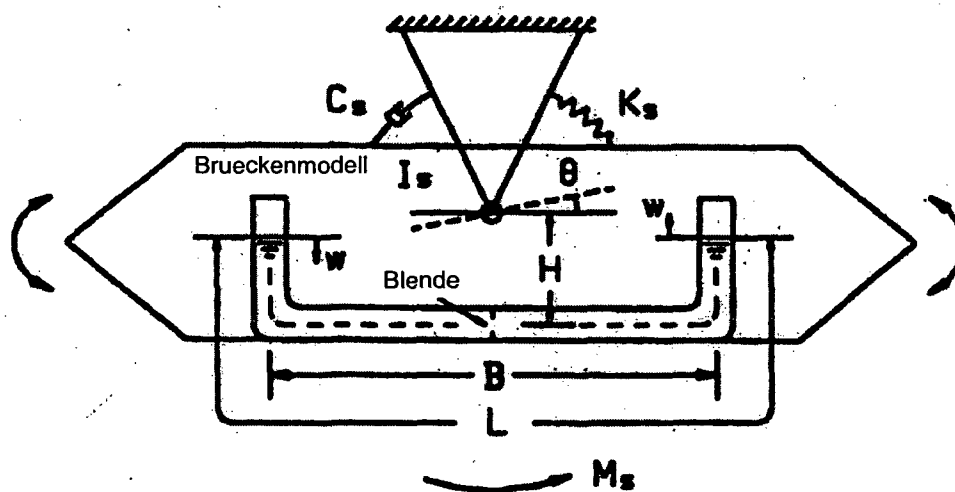


Abb. 4.4: Einsatz von Flüssigkeitstilgern zur Reduzierung von Drehschwingungen einer Brücke,

Quelle: Xue⁵

In Abb. 4.4 wird durch die Wahl eines raumfesten Aufhängepunktes (Punkt entspricht dem Geschwindigkeitspol) die Biege- und Drehschwingung fest miteinander verkoppelt. Eine entkoppelte horizontale und vertikale Bewegung der Brücke wird somit in dem Modell von Xue [5] vollständig behindert. Aufgrund der speziellen Wahl des Geschwindigkeitspoles entstehen nur geringe horizontale und vertikale Schwingungsamplituden des Brückenquerschnittes. Im Vergleich mit dem wirklichen Schwingungsverhalten einer Brücke scheint dieses Modell jedoch nicht ausreichend zu sein, denn die reale Brücke wird zufolge Wind- und/oder Verkehrsbelastung Biege- und Drehschwingungen mit relativ großen horizontalen und vertikalen Schwingungsamplituden ausführen. Letztere können unter Umständen das Dämpfungsverhalten des Flüssigkeitstilgers abschwächen, wie bereits in Kapitel 3, Abschnitt 3.2.5 dargelegt. Um nun alle möglichen Schwingungsphänomene erfassen zu können wird im folgenden Abschnitt ein in der Ebene allgemein bewegtes Brückenmodell mit Flüssigkeitstilger betrachtet, Abb. 4.5, in Verallgemeinerung des Modells nach Abb. 4.4.

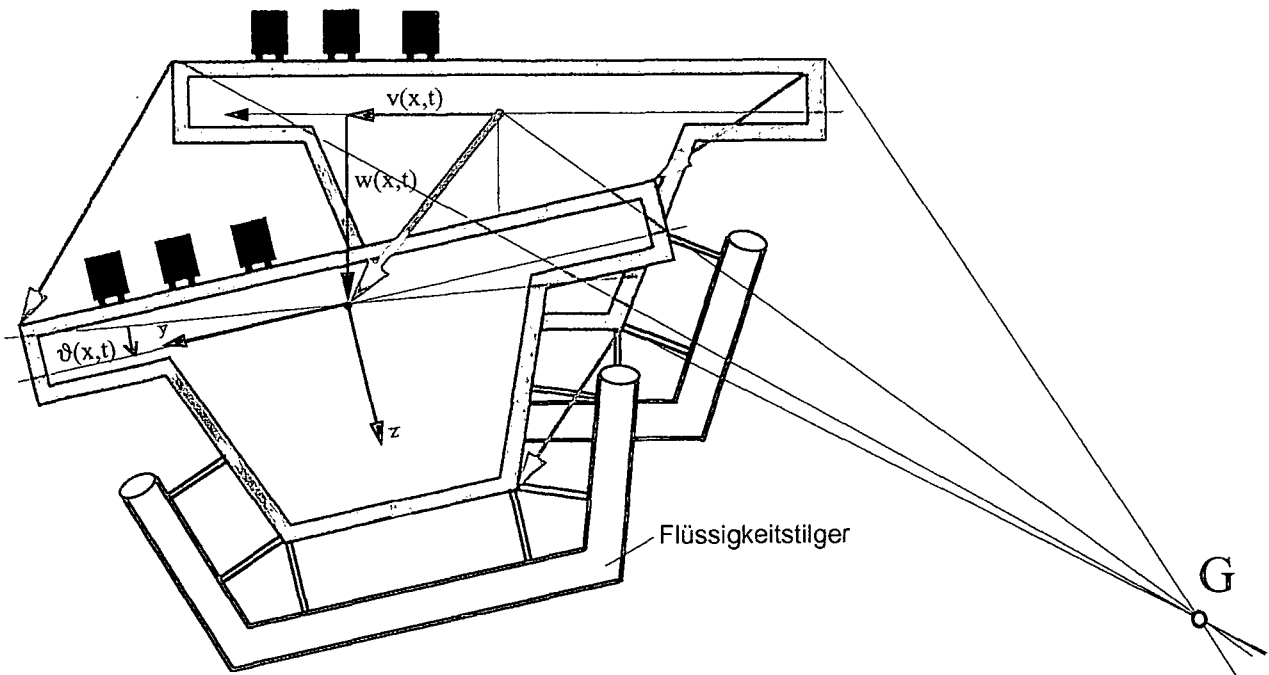


Abb. 4.5: Lage des Geschwindigkeitspoles G bei Betrachtung einer allgemeinen ebenen Bewegung der Brücke; translatorische Verschiebungen $w(x,t)$, $v(x,t)$; Verdrehung $\vartheta(x,t)$; Axiale Koordinate x

Der Geschwindigkeitspol G befindet sich dann in einer allgemeinen Lage und ändert in Abhängigkeit von der jeweiligen Schwingungsform seine Position. Nach Herleitung der gekoppelten Bewegungsgleichungen werden numerische Simulationen durchgeführt und das Dämpfungsverhalten des gekoppelten Systems Brücke/Flüssigkeitstilger bei verschiedenen Anregungsarten studiert. Um die Ergebnisse aus der numerischen Simulation zu Bestätigen wurde im Labor für Modelldynamik des Instituts für Allgemeine Mechanik ein geeigneter Modellversuchsstand entwickelt. Dieser ist in Abschnitt 4.4 ausführlich beschrieben.

4.2 Mechanisches Modell

4.2.1 Flüssigkeitstilger freigeschnitten

Die Bewegungsgleichung des Flüssigkeitstilgers wird, wie bereits in Kapitel 3, Abschnitt 3.2.1 ausgeführt, mit Hilfe einer Substruktur Methode ermittelt. Dazu wird der Flüssigkeitstilger vom Hauptsystem, dem Führungssystem, abgetrennt und im freigeschnittenen Zustand einer allgemeinen ebenen Anregung, nämlich der kombinierten translatorischen w_i , v_i und zusätzlich der rotatorischen φ_i , ausgesetzt, wie in Abb. 4.6 illustriert. Nach Herleitung der Bewegungsgleichung werden die Reaktionskraftkomponenten in Richtung der x' -Achse, $F_{x'}$ und der z' -Achse, $F_{z'}$ des mitgeführten Bezugssystems sowie die Komponente des äußeren Reaktionsmomentes M_{Ay} bezüglich eines bewegten Bezugspunktes A berechnet, wobei die Bewegung der Brücke aus der Ebene heraus, als Folge der Schiefstellung des Querschnittes senkrecht auf die Biegelinie, vernachlässigt wird. Die Reaktionskraft \bar{F} und das Reaktionsmoment \bar{M}_A wirken wieder auf die Flüssigkeit, wie in Abb. 4.6 eingetragen. Nachfolgend wird in Abschnitt 4.3 die freie und erzwungene schiefe Biegedrillschwingung des kontinuierlichen Brückenträgers umfassend dargelegt, wobei die aus der Dynamik des Flüssigkeitstilgers resultierende Kraft \bar{F} und das

Moment \bar{M}_A im bewegten Bezugspunkt A , auf den Brückenträger (an der Stelle $x = \xi$) einwirken.

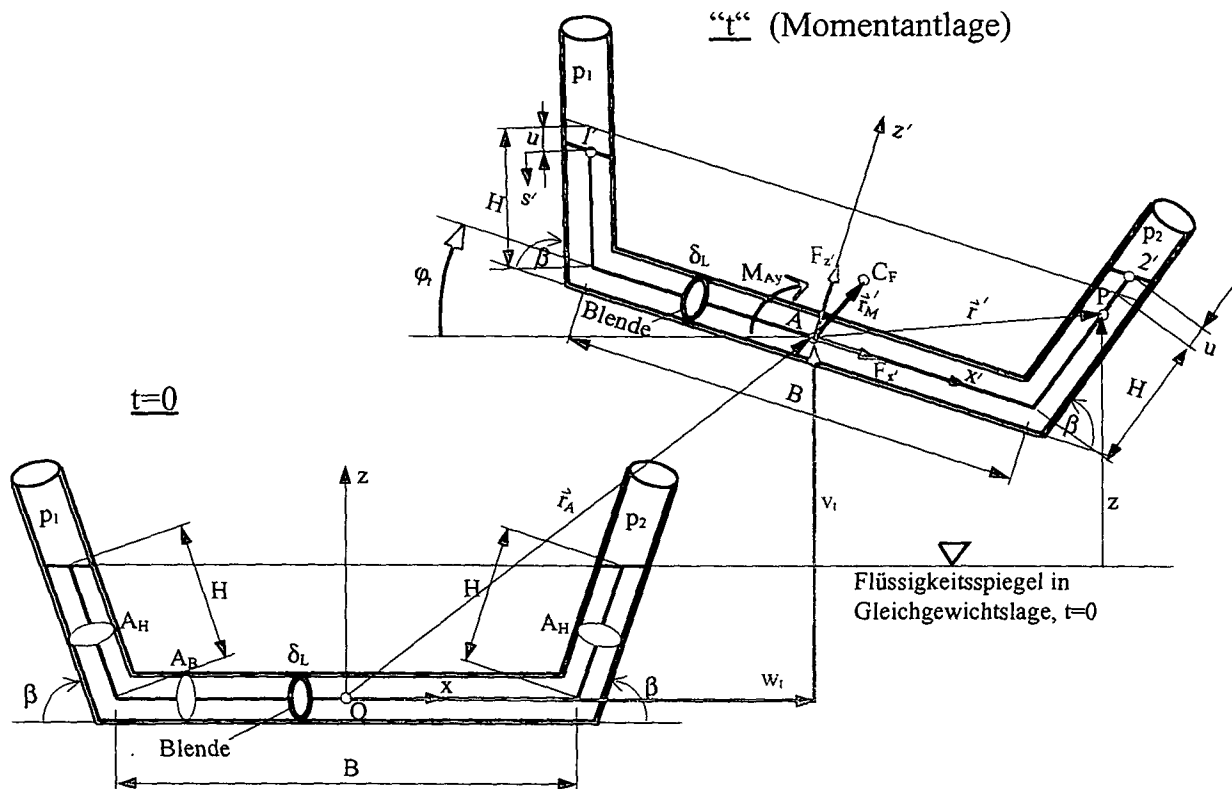


Abb. 4.6: Flüssigkeitstilger unter kombinierter translatorischer w_t , v_t und rotatorischer φ_t ebener Anregung; Lage des Tilgers, $t = 0$; Momentanlage des Tilgers mit ausgelenktem Stromfaden, " \bar{t} "; allgemein in der Ebene bewegtes Führungssystem; resultierende Kraftkomponenten F_x , F_z und Komponenten des Reaktionsmoments M_{Ay} ; $A_H \geq A_B$

Die Parameter des Flüssigkeitstilgers sind, wie in Kapitel 3, Abschnitt 3.2.1, gegeben durch die horizontale Länge des Flüssigkeitsfadens B und die schräge Länge im Gleichgewichtszustand H , mit den Querschnittsflächen A_H in den geneigten Schenkeln und A_B im horizontalen Teil des Rohres. Der Neigungswinkel β der geneigten Rohrteile, gemessen von der Horizontalen, soll im Bereich $\pi/6 < \beta \leq \pi/2$ liegen. Die relative, instationäre, inkompressible Strömung der Flüssigkeit im starren Behälter und im Rahmen der Stromfadentheorie wird über die Lagekoordinate des

freien Flüssigkeitsspiegels $u(t)$ beschrieben. Unter der Annahme eines geschlossenen Rohrleitungssystems ist die Wirkung der Luftfeder zu berücksichtigen, wie in Kapitel 3, Abschnitt 3.2.3 dargelegt. In Abb. 4.6 bezeichnet weiters \vec{r}_M den Vektor vom bewegten Bezugspunkt A zum momentanen Massenmittelpunkt C_F des ausgelenkten Flüssigkeitsfadens, zerlegt in die relativen Koordinaten des mitgeführten Bezugssystems (x', z') .

4.2.2 Instationäre Bernoulli-Gleichung in einem allgemein in der Ebene bewegten Bezugssystem (Führungssystem)

Die Bewegungsgleichung des Flüssigkeitstilgers wird hier durch Formulierung einer verallgemeinerten Bernoulli-Gleichung entlang einer momentanen, relativen, instationären Stromlinie in einem allgemein in der Ebene bewegten Bezugssystem ermittelt, wie in Ziegler⁶, Seite 390, ausgeführt. Ausgangspunkt für die Herleitung bildet die vektorielle Eulersche Bewegungsgleichung der reibungsfrei strömenden Flüssigkeit, Gl. (3-1),

$$\rho \vec{a} = \vec{k} - \text{grad } p, \quad \vec{k} = -\rho g \vec{e}_z. \quad (4-1)$$

Die Gl. (4-1) wird in Relativgeschwindigkeitsrichtung (Tangentenrichtung \vec{e}_t' des Stromfadens) projiziert und anschließend bei fester Zeit t entlang der Relativstromlinie von $1'$ nach $2'$ integriert, wie in Abb. 4.6 dargestellt. Die rechte Seite der Gl. (4-1) ergibt sich unter der voraussetzenden Annahme einer reibungsfreien und inkompressiblen Strömung vorerst identisch zu Gl. (3-2),

$$\frac{1}{\rho} \int_{1'}^{2'} \vec{k} \cdot \vec{e}_t' ds' - \frac{1}{\rho} \int_{1'}^{2'} \frac{\partial p}{\partial s'} ds' = -g(z_2 - z_1) - \frac{p_2 - p_1}{\rho}. \quad (4-2)$$

Die lotrechten Koordinaten z_1 und z_2 ergeben sich nach translatorischer Verschiebung w_t , v_t und Verdrehung φ_t des Flüssigkeitstilgers, in Bezug auf ein raumfestes Bezugsniveau welches im Flüssigkeitsspiegel der Gleichgewichtslage zum Zeitpunkt $t=0$ gewählt wird, wie in Abb. 4.6 eingetragen, zu

$$z_1 = v_t + \frac{B}{2} \sin \varphi_t + (H - u) \sin \beta \cos \varphi_t + (H - u) \cos \beta \sin \varphi_t , \quad (4-3)$$

$$z_2 = v_t - \frac{B}{2} \sin \varphi_t + (H + u) \sin \beta \cos \varphi_t - (H + u) \cos \beta \sin \varphi_t .$$

Daraus ergibt sich die gesuchte Differenz

$$z_2 - z_1 = 2u \sin \beta \cos \varphi_t - (B + 2H \cos \beta) \sin \varphi_t . \quad (4-4)$$

Setzt man in Gl. (4-4) die Verdrehung $\varphi_t = 0$, dann ergibt sich erwartungsgemäß die Gl. (3-3). Der in Tangentenrichtung \vec{e}_t' des relativen Stromfadens zu projizierende absolute Beschleunigungsvektor \vec{a} , Gl. (4-1), muss in seine Anteile aufgegliedert werden. Ausgangspunkt für die Ermittlung der absoluten Beschleunigung ist der zeitlich veränderliche Ortsvektor \vec{r} , gemessen in der x' , z' -Ebene vom raumfesten Bezugspunkt O zu einem betrachteten materiellen Punkt P des relativen Stromfadens, wie in Abb. 4.6 illustriert,

$$\vec{r} = \vec{r}_A + \vec{r}' , \quad \vec{r}' = x' \vec{e}_x' + z' \vec{e}_z' . \quad (4-5)$$

Differentiation des Ortsvektors \vec{r} nach der Zeit t , unter Berücksichtigung der Zeitabhängigkeit der Einheitsvektoren $\vec{e}_x' = \vec{e}_x'(t)$, $\vec{e}_z' = \vec{e}_z'(t)$ des mitgeführten Bezugssystems, liefert

$$\vec{v} = \vec{v}_f + \vec{v}' , \quad \vec{v}_f = \vec{v}_A + \vec{\Omega} \times \vec{r}' , \quad \vec{\Omega} = \Omega \vec{e}_y , \quad \Omega = \dot{\varphi}_t , \quad (4-6)$$

$$\vec{v}_f = \vec{v}_A + \Omega \vec{e}_y \times \vec{r}' = \vec{v}_A + \Omega \hat{\vec{r}}' , \quad \hat{\vec{r}}' = z' \vec{e}_x' - x' \vec{e}_z' ,$$

wo $\vec{v}' = d\vec{r}' / dt$ die Relativgeschwindigkeit definiert und die Führungsgeschwindigkeit \vec{v}_f die Geschwindigkeit desjenigen Punktes des starren Führungssystems angibt, der momentan mit dem betrachteten materiellen Punkt zusammenfällt. Die zeitliche Ableitung der Verdrehung φ_t des Flüssigkeitsstilgers definiert die Winkelgeschwindigkeit Ω , wobei für eine ebene Bewegung $\vec{e}_y' = \vec{e}_y$ gilt. Der Dachvektor \hat{r}' berechnet den Quervektor zu \vec{r}' , (im positiven Drehsinn des Koordinatensystems, also im Uhrzeigersinn, um $\pi/2$ gedreht). Nochmalige Differentiation liefert schließlich die gesuchte absolute Beschleunigung in der Form

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \vec{a}_f + \vec{a}_C + \vec{a}', & \vec{a}_f &= \vec{a}_A + \frac{d\bar{\Omega}}{dt} \times \vec{r}' + \Omega^2 \vec{n}_p, & \vec{n}_p &= -\vec{r}', & \vec{a}_C &= 2\bar{\Omega} \times \vec{v}', & \vec{a}' &= \frac{d\vec{v}'}{dt}, \\ \vec{a}_A &= \ddot{w}_t \vec{e}_x + \ddot{v}_t \vec{e}_z, & \vec{a}_f &= \vec{a}_A + \dot{\Omega} \hat{r}' - \Omega^2 \vec{r}', & \vec{a}_C &= 2\Omega \hat{v}', & \hat{r}' &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ z' \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (4-7)$$

wobei die Führungsbeschleunigung \vec{a}_f die Beschleunigung desjenigen Punktes des starren Führungssystems angibt, der momentan mit dem betrachteten materiellen Punkt zusammenfällt und \vec{a}' die Relativbeschleunigung definiert. Der Vektor \vec{n}_p gibt den Normalabstand des betrachteten materiellen Punktes P , hin zur Momentanachse der Drehung an, wie in Abb. 4.6 eingetragen. Der Ausdruck $-\Omega^2 \vec{r}'$ ist die wesentliche Normalkomponente der Beschleunigung des materiellen Punktes P . Bei raumfester Drehachse und raumfestem Bezugspunkt A wird sie Zentripetalbeschleunigung genannt. Die Coriolis-Beschleunigung $\vec{a}_C = 2\Omega \hat{v}'$ steht senkrecht auf die Relativgeschwindigkeit \vec{v}' , so dass bei Projektion keine Komponente in \vec{e}_t' -Richtung der Relativstromlinie fällt. Die Beschleunigung \vec{a}_A des mitbewegten Bezugspunktes setzt sich wieder aus der horizontalen \ddot{w}_t und der vertikalen \ddot{v}_t Komponente, bezogen auf ein raumfestes Koordinatensystem mit dem Ursprung O , zusammen. Die folgende Projektion der absoluten Beschleunigung \vec{a} in \vec{e}_t' -Richtung des Stromfadens mit anschließender Integration über die relative Stromlinie in Strömungsrichtung bei festgehaltener Zeit t unter Beachtung von

Die Gesamtlänge der Relativstromlinie $\int_1^2 ds' = (H - u) + B + (H + u)$ wird wieder, analog zu Gl. (3-10), aufgespalten

$$\int_1^2 ds' = \int_0^{(H-u)} ds'_1 + \int_0^B ds'_2 + \int_0^{(H+u)} ds'_3, \quad (4-10)$$

weilers wird die translatorische Beschleunigung des Punktes A in die Koordinaten des mitgeführten Bezugssystems zerlegt,

$$\begin{aligned} \bar{a}_A &= \ddot{w}_t \bar{e}_x + \ddot{v}_t \bar{e}_z = \ddot{w}_t (\cos \varphi_t \bar{e}'_x + \sin \varphi_t \bar{e}'_z) + \ddot{v}_t (-\sin \varphi_t \bar{e}'_x + \cos \varphi_t \bar{e}'_z) = \\ &= (\ddot{w}_t \cos \varphi_t - \ddot{v}_t \sin \varphi_t) \bar{e}'_x + (\ddot{w}_t \sin \varphi_t + \ddot{v}_t \cos \varphi_t) \bar{e}'_z, \end{aligned} \quad (4-11)$$

vergleiche auch mit Gl. (3-9), die wieder mit Ausschaltung der Verdrehung $\varphi_t = 0$ aus Gl. (4-11) folgt. Für die einzelnen Bereiche ergeben sich die Einheitsvektoren und die Projektion der Beschleunigung \bar{a}_A im mitgeführten Bezugssystem zu,

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow (H - u): \bar{e}'_t &= \begin{pmatrix} \cos \beta \\ 0 \\ -\sin \beta \end{pmatrix}, & 0 \rightarrow B: \bar{e}'_t &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, & 0 \rightarrow (H + u): \bar{e}'_t &= \begin{pmatrix} \cos \beta \\ 0 \\ \sin \beta \end{pmatrix}, \\ 0 \rightarrow (H - u): \bar{a}_A \cdot \bar{e}'_t &= (\ddot{w}_t \cos \varphi_t - \ddot{v}_t \sin \varphi_t) \cos \beta - (\ddot{w}_t \sin \varphi_t + \ddot{v}_t \cos \varphi_t) \sin \beta, & (4-12) \\ 0 \rightarrow B: \bar{a}_A \cdot \bar{e}'_t &= (\ddot{w}_t \cos \varphi_t - \ddot{v}_t \sin \varphi_t), \\ 0 \rightarrow (H + u): \bar{a}_A \cdot \bar{e}'_t &= (\ddot{w}_t \cos \varphi_t - \ddot{v}_t \sin \varphi_t) \cos \beta + (\ddot{w}_t \sin \varphi_t + \ddot{v}_t \cos \varphi_t) \sin \beta. \end{aligned}$$

Abschnittsweise Integration gemäß Gl. (4-10) unter Benützung der Projektionen, Gl. (4-12), liefert den ersten Anteil der Führungsbeschleunigung \bar{a}_f in Gl. (4-7),

$$\begin{aligned}
\int_1^2 \bar{a}_A \cdot \bar{e}_t' ds' &= \bar{a}_A \cdot \bar{e}_t' \int_0^{(H-u)} ds_1' + \bar{a}_A \cdot \bar{e}_t' \int_0^B ds_2' + \bar{a}_A \cdot \bar{e}_t' \int_0^{(H+u)} ds_3' = \\
&= \ddot{w}_t [\cos \varphi_t (B + 2H \cos \beta) + 2u \sin \varphi_t \sin \beta] + \ddot{v}_t [-\sin \varphi_t (B + 2H \cos \beta) + 2u \cos \varphi_t \sin \beta] ,
\end{aligned} \tag{4-13}$$

vergleiche wiederum mit Gl. (3-11) die mit Ausschaltung der Verdrehung $\varphi_t = 0$ aus Gl. (4-13) zwanglos folgt. Das Integral über den zweiten Anteil der Führungsbeschleunigung in Gl. (4-7), $\dot{\Omega} \hat{\vec{r}}'$, ist gegeben durch

$$\dot{\Omega} \int_1^2 \hat{\vec{r}}' \cdot \bar{e}_t' ds' = \dot{\Omega} \left[\int_0^{(H-u)} \hat{\vec{r}}' \cdot \bar{e}_t' ds_1' + \int_0^B \hat{\vec{r}}' \cdot \bar{e}_t' ds_2' + \int_0^{(H+u)} \hat{\vec{r}}' \cdot \bar{e}_t' ds_3' \right] , \tag{4-14}$$

wo die Vektoren \vec{r}' , $\hat{\vec{r}}'$ und ihre Projektion in \bar{e}_t' -Richtung des relativen Stromfadens wie folgt definiert sind

$$\begin{aligned}
0 \rightarrow (H-u): \quad \vec{r}' &= \begin{pmatrix} -\left(\frac{B}{2} + (H-u) \cos \beta - s' \cos \beta\right) \\ 0 \\ (H-u) \sin \beta - s' \sin \beta \end{pmatrix}, \quad \hat{\vec{r}}' = \begin{pmatrix} (H-u) \sin \beta - s' \sin \beta \\ 0 \\ +\frac{B}{2} + (H-u) \cos \beta - s' \cos \beta \end{pmatrix}, \\
\hat{\vec{r}}' \cdot \bar{e}_t' &= ((H-u) \sin \beta - s' \sin \beta) \cos \beta - \left(\frac{B}{2} + (H-u) \cos \beta - s' \cos \beta\right) \sin \beta = -\frac{B}{2} \sin \beta ,
\end{aligned} \tag{4-15}$$

$$0 \rightarrow B: \quad \vec{r}' = \begin{pmatrix} -\left(\frac{B}{2} - s'\right) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\vec{r}}' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ +\frac{B}{2} - s' \end{pmatrix}, \tag{4-16}$$

$$\hat{\vec{r}}' \cdot \bar{e}_t' = 0 ,$$

$$0 \rightarrow (H+u): \quad \vec{r}' = \begin{pmatrix} +\frac{B}{2} + s' \cos \beta \\ 0 \\ s' \sin \beta \end{pmatrix}, \quad \hat{\vec{r}}' = \begin{pmatrix} s' \sin \beta \\ 0 \\ -\left(\frac{B}{2} + s' \cos \beta\right) \end{pmatrix}, \quad (4-17)$$

$$\hat{\vec{r}}' \cdot \vec{e}_t' = s' \sin \beta \cos \beta - \left(\frac{B}{2} + s' \cos \beta\right) \sin \beta = -\frac{B}{2} \sin \beta.$$

Abschnittsweise Integration in Strömungsrichtung, gemäß Gl. (4-14), liefert unter Beachtung der Gln. (4-15) - (4-17) den einfachen Ausdruck

$$\dot{\Omega} \int_{1'}^{2'} \hat{\vec{r}}' \cdot \vec{e}_t' ds' = -\dot{\Omega} B H \sin \beta. \quad (4-18)$$

Das Ergebnis kann sehr anschaulich als das Doppelte der von den Ortsvektoren \vec{r}' überstrichenen Fläche $A = B H \sin \beta / 2$ gedeutet werden, wie in Abb. 4.8 illustriert. In analoger Form findet sich der zweifache Wert der überstrichenen Fläche in der ersten Bredt'schen Formel für die Berechnung des Torsionsmomentes von dünnwandigen Hohlquerschnitten, dargelegt z.B. in Ziegler [6, Seite 120].

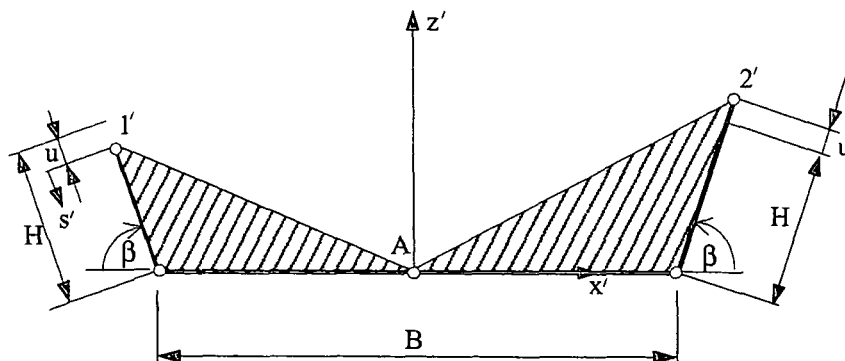


Abb. 4.8: Geometrische Deutung des Ergebnisses aus Gl. (4-18); das Doppelte der von den Ortsvektoren \vec{r}' überstrichenen Fläche $A = B H \sin \beta / 2$ in Analogie zur ersten Bredt'schen Formel

Der letzte Anteil der Führungsbeschleunigung in Gl. (4-7), $-\Omega^2 \vec{r}'$, ist in \vec{e}_t' -Richtung zu projizieren und über die gesamte Länge des relativen Stromfadens zu integrieren. Dabei ergibt sich die Projektion des Ortsvektors \vec{r}' in den jeweiligen Bereichen, aus den Gln. (4-15) - (4-17), zu

$$\begin{aligned}
 0 \rightarrow (H-u): \quad \vec{r}' \cdot \vec{e}_t' &= -\left(\frac{B}{2} \cos \beta + (H-u) - s'\right), \\
 0 \rightarrow B: \quad \vec{r}' \cdot \vec{e}_t' &= -\left(\frac{B}{2} - s'\right), \\
 0 \rightarrow (H+u): \quad \vec{r}' \cdot \vec{e}_t' &= \frac{B}{2} \cos \beta + s',
 \end{aligned} \tag{4-19}$$

und die abschnittsweise Integration in Strömungsrichtung liefert wieder einen einfachen Ausdruck,

$$-\Omega^2 \int_1^{2'} \vec{r}' \cdot \vec{e}_t' ds' = -\Omega^2 u (B \cos \beta + 2H). \tag{4-20}$$

Nach Einsetzen der Ergebnisse aus den Gln. (4-13), (4-18) und Gl. (4-20) in die Gl. (4-9) erhält man die folgende Form der instationären verallgemeinerten Bernoulli-Gleichung

$$\begin{aligned}
 \int_1^{2'} \frac{\partial \dot{v}'}{\partial t} ds' + \frac{1}{2} (v_2'^2 - v_1'^2) &= -g(z_2 - z_1) - \frac{1}{\rho} (p_2 - p_1) - \ddot{w}_t [\cos \varphi_t (B + 2H \cos \beta) + 2u \sin \varphi_t \sin \beta] \\
 &\quad - \ddot{v}_t [-\sin \varphi_t (B + 2H \cos \beta) + 2u \cos \varphi_t \sin \beta] + \dot{\Omega} B H \sin \beta + \Omega^2 u (B \cos \beta + 2H).
 \end{aligned} \tag{4-21}$$

Bei Beachtung der Spiegelgeschwindigkeiten, $v_1' = v_2' = \dot{u}$, und der Differenz der lotrechten Koordinaten $z_2 - z_1$ aus Gl. (4-4), sowie nach Auswerten des Integrales

über die instationäre Geschwindigkeitsverteilung entlang der momentanen Relativstromlinie, mit Hilfe der Kontinuitätsgleichung $\dot{m}(t) = \rho A(s') v'(s', t) = \rho A_H \dot{u}(t)$,

$$\int_1^2 \frac{\partial v'}{\partial t} ds' = \left(2H + B \frac{A_H}{A_B} \right) \ddot{u} = L_{eff} \ddot{u} , \quad (4-22)$$

folgt nach wenigen Schritten der Umordnung, folgender Ausdruck für die nichtlineare, komplexe, parametererregte Bewegungsgleichung des Flüssigkeitstilgers mit Turbulenzdämpfung,

$$\ddot{u} + \delta_L |\dot{u}| \dot{u} + \frac{\Delta p}{\rho L_{eff}} + \omega_A^2 \left[\left(1 + \frac{\ddot{v}_t}{g} \right) \cos \varphi_t + \frac{\ddot{w}_t}{g} \sin \varphi_t - \kappa_2 \frac{\Omega^2}{\omega_A^2} \right] u = -\kappa (\ddot{w}_t \cos \varphi_t - \ddot{v}_t \sin \varphi_t - g \sin \varphi_t) + \kappa_1 \frac{B}{2} \dot{\Omega} ,$$

$$\omega_A^2 = \frac{2g}{L_{eff}} \sin \beta , \quad \Omega = \dot{\varphi}_t , \quad \dot{\Omega} = \ddot{\varphi}_t , \quad \Delta p = p_2 - p_1 , \quad (4-23)$$

Mit $\varphi_t = 0$, $\Omega = \dot{\varphi}_t = 0$ und $\dot{\Omega} = \ddot{\varphi}_t = 0$ geht Gl. (4-23) erwartungsgemäß in Gl. (3-16) über. In Gl. (4-23) sind κ , κ_1 und κ_2 von der Geometrie des Flüssigkeitstilgers abhängige dimensionslose Faktoren und L_{eff} die effektive Länge des Flüssigkeitsfadens, wobei κ und L_{eff} bereits in Gl. (3-17) definiert sind und κ_1 , κ_2 neue, aus der Verdrehung des Flüssigkeitstilgers entstehende, Geometriefaktoren darstellen,

$$\kappa = \frac{B + 2H \cos \beta}{L_{eff}} , \quad \kappa_1 = \frac{2H \sin \beta}{L_{eff}} , \quad \kappa_2 = \frac{B \cos \beta + 2H}{L_{eff}} , \quad L_{eff} = 2H + \frac{A_H}{A_B} B . \quad (4-24)$$

Um Druckverluste zufolge viskoser und turbulenter Effekte in der instationär strömenden Flüssigkeit zu berücksichtigen wurde unter der Annahme eines wesentlichen Turbulenzdämpfungsanteils der nichtlineare Dämpfungsterm

$$F_D = \delta_L |\dot{u}| \dot{u} , \quad (4-25)$$

auf der linken Seite der Gl. (4-23) eingeführt. Die Größe des Verlustkoeffizienten δ_L kann wieder über den Blendendurchmesser festgelegt werden. Eine detaillierte Beschreibung wurde in Kapitel 3, Abschnitt 3.2.2, gegeben. Die lineare Eigenkreisfrequenz ω_A des ungedämpften offenen Flüssigkeitstilgers, $\Delta p = 0$ und $\delta_L = 0$ in Gl. (4-23), ist ungeändert durch die Gl. (3-18) definiert.

Die Bewegungsgleichung des Flüssigkeitstilgers, Gl. (4-23), ist aufgrund der vorhandenen Turbulenzdämpfung $\delta_L |\dot{u}| \dot{u}$ eine nichtlineare Differentialgleichung und zusätzlich parametererregt. Im Hinblick auf den optimalen Entwurf des Flüssigkeitstilgers ist es wiederum notwendig den turbulenten Dämpfungsterm δ_L mit Hilfe eines Energieprinzips in einen äquivalent viskosen Dämpfungsterm ζ_A überzuführen, wie bereits in Kapitel 3, Abschnitt 3.2.2 ausgeführt

Die Bewegungsgleichung mit linearisiertem Dämpfungsglied des Flüssigkeitstilgers, unter der Annahme offener Rohrenden, d.h. $\Delta p \approx 0$, ergibt sich demzufolge zu

$$\ddot{u} + 2\zeta_A \omega_A \dot{u} + \omega_A^2 \left[\left(1 + \frac{\ddot{v}_t}{g} \right) \cos \varphi_t + \frac{\ddot{w}_t}{g} \sin \varphi_t - \kappa_2 \frac{\Omega^2}{\omega_A^2} \right] u = -\kappa (\ddot{w}_t \cos \varphi_t - \ddot{v}_t \sin \varphi_t - g \sin \varphi_t) + \kappa_1 \frac{B}{2} \dot{\Omega},$$

$$\zeta_A = \frac{4U_0 \delta_L}{3\pi} . \quad (4-26)$$

Der Systemparameter der Steifigkeit ist zeitvariant,

$$\omega_A^2 \left[\left(1 + \frac{\ddot{v}_t}{g} \right) \cos \varphi_t + \frac{\ddot{w}_t}{g} \sin \varphi_t - \kappa_2 \frac{\Omega^2}{\omega_A^2} \right], \quad (4-27)$$

und zwar mit Beiträgen der kombinierten translatorischen w_t , v_t und der rotatorischen φ_t Anregungsart, und ist zeitlich periodisch. Eine detaillierte Untersuchung von Gleichungen dieser Bauart, (den sogenannten Hill'schen Differentialgleichungen) findet sich in Kapitel 3, Abschnitt 3.2.5. Insbesondere wird die für Stabilität erforderliche Flüssigkeitsdämpfung des linearisierten Systems, bei harmonischer Anregung an der kritischen Resonanzstelle $\lambda=1/4$, in Gl. (3-48) angegeben.

4.2.3 Ermittlung der resultierenden Kräfte und Momente

In weiterer Folge werden die aus der Dynamik des Flüssigkeitstilgers resultierende Kraft \bar{F} und das Moment \bar{M}_A bestimmt. Die tote Masse des Flüssigkeitstilgers $m_T = m - m_f$, wo m die Gesamtmasse und m_f die Flüssigkeitsmasse bezeichnen, wird der Brückenmasse (dem Führungssystem) zugeschlagen. Die resultierende Kraft \bar{F} und das Moment \bar{M}_A wirken resultierend auf die Flüssigkeit, wie in Abb. 4.6 eingetragen. Der Impulssatz für Körper mit konstanter Masse besagt, dass die zeitliche Änderung des absoluten Impulses gleich der Resultierenden der äußeren Kräfte ist,

$$\frac{d\bar{I}}{dt} = \bar{F}, \quad \frac{d\bar{I}}{dt} = \frac{d\bar{I}}{dt} + \bar{\Omega} \times \bar{I} = \frac{d\bar{I}}{dt} + \Omega \hat{I}, \quad \hat{I} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \bar{I}. \quad (4-28)$$

Im Fall des Flüssigkeitstilgers wird die gesamte Flüssigkeitsmasse m_f , in dem als masselos definierten starren Rohr geführt bewegt und für die Anwendung des Impulssatzes in einer Momentanlage zum Zeitpunkt t betrachtet. Der absolute Impulsvektor \bar{I} der betrachteten Flüssigkeitsmasse m_f ist definiert durch

$$\bar{I} = \int_{m_f} (\bar{v}_f + \bar{v}') dm_f, \quad \bar{v}'(s') = \dot{u} \frac{A_H}{A(s')} \bar{e}_t'(s'), \quad dm_f(s') = \rho A(s') ds', \quad (4-29)$$

wo die Geschwindigkeit des Bezugspunktes $\bar{v}_A = \dot{w}_t \bar{e}_x + \dot{v}_t \bar{e}_z$ in den absoluten Koordinaten des raumfesten Bezugssystems ausgedrückt wird. Einsetzen der Führungsgeschwindigkeit \bar{v}_f , Gl. (4-6), in den Ausdruck für den absoluten Impulsvektor \bar{I} , liefert

$$\bar{I} = \int_{m_f} (\bar{v}_A + \Omega \hat{\bar{r}}' + \bar{v}') dm_f = \rho \left[\bar{v}_A \int_{1'}^{2'} A(s') ds' + \Omega \int_{1'}^{2'} A(s') \hat{\bar{r}}'(s') ds' + A_H \dot{u} \int_{1'}^{2'} \bar{e}_t'(s') ds' \right], \quad (4-30)$$

$$\int_{1'}^{2'} A(s') ds' = A_H \left(2H + \frac{A_B}{A_H} B \right) = A_H L_1,$$

wobei L_1 den von der Querschnittsfläche des Tilgers abhängigen Längenfaktor, Gl. (3-35), bezeichnet. In Gl. (4-30) definiert weiters \bar{r}' den Ortsvektor vom bewegten Bezugspunkt A zum momentan betrachteten materiellen Punkt P des Flüssigkeitsfadens und $\hat{\bar{r}}'$ den Dachvektor im jeweiligen Bereich, wie in den Gln. (4-15) - (4-17) dargelegt. Die abschnittsweise Integration, gemäß Gl. (4-10), entlang der Relativstromlinie in Strömungsrichtung liefert dann

$$\begin{aligned} \bar{I} = m_f \bar{v}_A + \rho A_H \left[(H - u) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \Omega (H - u) \sin \beta + \dot{u} \cos \beta \\ 0 \\ \Omega \frac{B}{2} + \frac{1}{2} \Omega (H - u) \cos \beta - \dot{u} \sin \beta \end{pmatrix} + \rho \frac{A_B}{A_H} B \begin{pmatrix} \dot{u} \frac{A_H}{A_B} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \right. \\ \left. + (H + u) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \Omega (H + u) \sin \beta + \dot{u} \cos \beta \\ 0 \\ -\Omega \frac{B}{2} - \frac{1}{2} \Omega (H + u) \cos \beta + \dot{u} \sin \beta \end{pmatrix} \right], \quad m_f = \rho \int_{1'}^{2'} A(s') ds' = \rho A_H L_1, \end{aligned} \quad (4-31)$$

wo m_f die gesamte im Rohrsystem befindliche Flüssigkeitsmasse, Gl. (3-33), definiert. Nach Zusammenfassen und unter Verwendung der bereits in Gl. (3-35) definierten Geometriefaktoren $\bar{\kappa}$ und $\bar{\kappa}_1$ erhält man den absoluten Impulsvektor

$$\bar{I} = m_f \bar{v}_A + m_f \begin{bmatrix} \bar{\kappa}_1 \frac{1}{2H} (H^2 + u^2) \Omega + \bar{\kappa} \dot{u} \\ 0 \\ -\bar{\kappa} u \Omega + \bar{\kappa}_1 \frac{1}{H} u \dot{u} \end{bmatrix}, \quad \bar{\kappa} = \frac{B + 2H \cos \beta}{L_1}, \quad \bar{\kappa}_1 = \frac{2H \sin \beta}{L_1}. \quad (4-32)$$

Die Gl. (4-32) lässt sich alternativ durch zeitliche Ableitung des Ortsvektors

$$\bar{r}_M = \bar{r}_A + \bar{r}_M' = w_t \bar{e}_x + v_t \bar{e}_z + \bar{\kappa} u \bar{e}_x' + \bar{\kappa}_1 \frac{1}{2H} (H^2 + u^2) \bar{e}_z', \quad (4-33)$$

identifizieren, wobei \bar{r}_M' im mitbewegten Führungssystem bereits in Gl. (3-38) definiert wurde. Die zeitliche Ableitung liefert unter Berücksichtigung von $d\bar{e}'/dt = \Omega \hat{\bar{e}}'$, sowie Multiplikation mit der Flüssigkeitsmasse m_f ,

$$\begin{aligned} m_f \frac{d\bar{r}_M}{dt} &= m_f \begin{bmatrix} \dot{w}_t \\ 0 \\ \dot{v}_t \end{bmatrix} + m_f \begin{bmatrix} \bar{\kappa} \dot{u} \\ 0 \\ \bar{\kappa}_1 \frac{1}{2H} 2u\dot{u} \end{bmatrix} + m_f \Omega \begin{bmatrix} \bar{\kappa}_1 \frac{1}{2H} (H^2 + u^2) \\ 0 \\ -\bar{\kappa} u \end{bmatrix}, \\ &= m_f \bar{v}_A + m_f \begin{bmatrix} \bar{\kappa}_1 \frac{1}{2H} (H^2 + u^2) \Omega + \bar{\kappa} \dot{u} \\ 0 \\ -\bar{\kappa} u \Omega + \bar{\kappa}_1 \frac{1}{H} u \dot{u} \end{bmatrix} = \bar{I}, \end{aligned} \quad (4-34)$$

erwartungsgemäß einen zu Gl. (4-32) identischen Ausdruck für den absoluten Impulsvektor \bar{I} . Der im bewegten Bezugspunkt A auf die Flüssigkeit wirkende gesuchte resultierende Kraftvektor \bar{F} ergibt sich nun aus der zeitlichen Ableitung des absoluten Impulsvektors \bar{I} , unter Beachtung von $d\bar{I}/dt = (d\bar{I}/dt) + \Omega \hat{\bar{I}}$, wobei die

statische Gewichtskraft aus der ruhenden Flüssigkeitsmasse m_f in der Kraftkomponente F_z nicht enthalten ist, zu

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{I}}{dt} &= m_f \bar{a}_A + m_f \begin{bmatrix} \bar{\kappa}_1 \frac{1}{2H} (H^2 + u^2) \dot{\Omega} + \bar{\kappa}_1 \frac{1}{2H} 2u\dot{u}\Omega + \bar{\kappa}\ddot{u} \\ 0 \\ -\bar{\kappa}\dot{u}\Omega - \bar{\kappa}u\dot{\Omega} + \bar{\kappa}_1 \frac{1}{H} \dot{u}^2 + \bar{\kappa}_1 \frac{1}{H} u\ddot{u} \end{bmatrix} + \Omega \begin{bmatrix} -\bar{\kappa}u\Omega + \bar{\kappa}_1 \frac{1}{2H} 2u\dot{u} \\ 0 \\ -\left(\bar{\kappa}_1 \frac{1}{2H} (H^2 + u^2) \Omega + \bar{\kappa}\dot{u} \right) \end{bmatrix}, \\ \bar{F} &= m_f \bar{a}_A + m_f \begin{bmatrix} \bar{\kappa}(\ddot{u} - u\Omega^2) + \bar{\kappa}_1 \frac{1}{2H} (4u\dot{u}\Omega + (H^2 + u^2)\dot{\Omega}) \\ 0 \\ -\bar{\kappa}(2\dot{u}\Omega + u\dot{\Omega}) + \bar{\kappa}_1 \frac{1}{2H} (2\dot{u}^2 - (H^2 + u^2)\Omega^2 + 2u\ddot{u}) \end{bmatrix}, \quad \bar{a}_A = \begin{pmatrix} \ddot{w}_t \cos \varphi_t - \ddot{v}_t \sin \varphi_t \\ 0 \\ \ddot{w}_t \sin \varphi_t + \ddot{v}_t \cos \varphi_t \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4-35)$$

Die von der Geometrie des Tilgers abhängigen dimensionslosen Faktoren $\bar{\kappa}$ und $\bar{\kappa}_1$, Gl. (3-35), können für den allgemein in der Ebene bewegten Tilger wiederum anschaulich gedeutet werden: $m_{Ax'} = \bar{\kappa} m_f$ definiert die in x' -Richtung des mitgeführten Bezugssystems „aktiv“ bewegte Flüssigkeitsmasse, hingegen gibt $m_{Px'} = m_f (1 - \bar{\kappa})$ die Größe der „passiv“ bewegten Flüssigkeitsmasse an, weiters definiert $m_{Az'} = \bar{\kappa}_1 m_f u / H$ die in z' -Richtung des mitgeführten Bezugssystems „aktiv“ bewegte Flüssigkeitsmasse und demgegenüber $m_{Pz'} = m_f (1 - \bar{\kappa}_1 u / H)$ die „passiv“ bewegte Flüssigkeitsmasse.

In Gl. (4-35) lässt sich der Anteil der resultierenden Kraft \bar{F} in x' -Richtung, $m_f \bar{\kappa}_1 4u\dot{u}\Omega / 2H$, wie folgt physikalisch deuten: Nach Abspalten der in z' -Richtung aktiv bewegten Flüssigkeitsmasse $m_{Az'} = \bar{\kappa}_1 m_f u / H$ verbleibt als Faktor die Coriolis-Beschleunigung $a_{Cx'} = 2\dot{u}\Omega$. In Analoger Weise ergibt der Anteil der resultierenden Kraft \bar{F} in z' -Richtung, $-m_f \bar{\kappa} 2\dot{u}\Omega$, nach Abspalten der in x' -Richtung aktiv bewegten Flüssigkeitsmasse $m_{Ax'} = \bar{\kappa} m_f$ die Coriolis-Beschleunigung $a_{Cz'} = 2\dot{u}\Omega$. Interessant ist die Feststellung, dass die Coriolis-Beschleunigung einerseits auf die Bewegung des Flüssigkeitsfadens keinen Einfluss hat, da sie senkrecht auf die Relativgeschwindigkeit \vec{v}' steht und somit bei Projektion keine Komponente in \vec{e}_t' -

Richtung der Relativstromlinie fällt, jedoch in der Kraftwirkung zufolge der Dynamik des Flüssigkeitstilgers sehr wohl eine Coriolis-Kraft (=Scheinkraft, Trägheitskraft) vorhanden ist. Für den Spezialfall einer rein translatorischen Anregung, d.h. $\varphi_t = 0$, $\Omega = \dot{\varphi}_t = 0$ und $\dot{\Omega} = \ddot{\varphi}_t = 0$, degeneriert die resultierende Kraft \bar{F} , Gl. (4-35), zu

$$\bar{F} = m_f \bar{a}_A + m_f \begin{bmatrix} \bar{\kappa} \ddot{u} \\ 0 \\ \bar{\kappa}_1 \frac{1}{H} (\dot{u}^2 + u \ddot{u}) \end{bmatrix}, \quad \bar{a}_A = \ddot{w}_t \bar{e}_x + \ddot{v}_t \bar{e}_z. \quad (4-36)$$

Die Kraft \bar{F} , in Gl. (4-36), ist wieder identisch zu den in Kapitel 3 ermittelten Kraftkomponenten unter rein translatorischer Anregung, Gl. (3-33) und Gl. (3-34).

Im nächsten Schritt wird der Drallsatz um einen gegen das raumfeste Bezugssystem in der Ebene allgemein bewegten Bezugspunkt A , der in der Symmetrieachse des horizontalen Rohrabschnittes gewählt wird, wie in Abb. 4.6 eingetragen, angeschrieben

$$\frac{d\bar{D}_A'}{dt} + m_f \bar{r}_M' \times \bar{a}_A = \bar{M}_A, \quad \frac{d\bar{D}_A'}{dt} = \frac{d'\bar{D}_A'}{dt} + \bar{\Omega} \times \bar{D}_A' = \frac{d'\bar{D}_A'}{dt} + \Omega \hat{\bar{D}}_A', \quad (4-37)$$

wo \bar{D}_A' den resultierenden relativen Drallvektor der Massenverteilungen um den Bezugspunkt A bezeichnet. $m_f = \rho A_H L_1$ bezeichnet weiters die gesamte Flüssigkeitsmasse, \bar{a}_A die absolute Beschleunigung des Bezugspunktes A , und \bar{r}_M' den Abstandsvektor des momentanen Massenmittelpunktes C_F der Flüssigkeitsmasse vom bewegten Bezugspunkt A im Führungssystem, Gl. (3-38). Der resultierende relative Drallvektor ist definiert als

$$\bar{D}_A' = \int_{m_f} (\bar{r}' \times (\bar{v} - \bar{v}_A)) dm_f, \quad \bar{v} = \bar{v}_f + \bar{v}', \quad \bar{v}_f = \bar{v}_A + \Omega \hat{\bar{r}}'. \quad (4-38)$$

Nach Einsetzen der absoluten Geschwindigkeit \bar{v} in den Ausdruck des relativen Drallvektors, Gl. (4-38), erhält man

$$\vec{D}_A' = \int_{m_f} \left(\vec{r}' \times (\Omega \hat{\vec{r}}' + \vec{v}') \right) dm_f = \rho \left[\Omega \int_1^2 A(s') \left(\vec{r}' \times \hat{\vec{r}}' \right) ds' + A_H \dot{u} \int_1^2 \vec{r}' \times \vec{e}_t'(s') ds' \right], \quad (4-39)$$

wo die Ortsvektoren \vec{r}' bzw. Dachvektoren $\hat{\vec{r}}'$ in den Gln. (4-15) - (4-17) und der Tangenteneinheitsvektor $\vec{e}_t'(s')$ in Gl. (4-12) definiert ist. Die folgende abschnittsweise Integration gemäß Gl. (4-10) entlang der Relativstromlinie in Strömungsrichtung liefert, unter Berücksichtigung von $\vec{D}_A' = D_A' \vec{e}_y$ und $\vec{r}' \times \hat{\vec{r}}' = r'^2$, die relative Drallvektorkomponente

$$\begin{aligned} D_A' &= \rho A_H \left[\Omega (H - u) \left(\frac{B^2}{4} + \frac{1}{2} B (H - u) \cos \beta + \frac{1}{3} (H - u)^2 \right) + \Omega \frac{A_B}{A_H} B \left(\frac{B^2}{12} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \Omega (H + u) \left(\frac{B^2}{4} + \frac{1}{2} B (H + u) \cos \beta + \frac{1}{3} (H + u)^2 \right) - \dot{u} B H \sin \beta \right], \\ D_A' &= m_f \left[\Omega H^2 \frac{H}{L_1} \left(\frac{B^2}{2H^2} + \frac{B}{H} \cos \beta + \frac{A_B}{A_H} \frac{B^3}{12H^3} + \frac{2}{3} \right) + \Omega \frac{u^2}{L_1} (B \cos \beta + 2H) - \dot{u} \frac{B H \sin \beta}{L_1} \right]. \end{aligned} \quad (4-40)$$

Unter Verwendung des in Gl. (3-35) definierten Geometriefaktors $\bar{\kappa}_1$ und Einführung von zwei, aus der Rotation des Flüssigkeitstilgers resultierenden, neuen Geometriefaktoren $\bar{\kappa}_2$ und $\bar{\kappa}_3$ erhält man weiters,

$$\begin{aligned} D_A' &= \bar{\kappa}_3 H^2 \Omega + \bar{\kappa}_2 u^2 \Omega - \bar{\kappa}_1 \frac{B}{2} \dot{u}, \quad \bar{\kappa}_1 = \frac{2H \sin \beta}{L_1}, \quad \bar{\kappa}_2 = \frac{B \cos \beta + 2H}{L_1}, \\ &\quad \bar{\kappa}_3 = \frac{2H}{3L_1} \left(1 + \frac{3B^2}{4H^2} + \frac{3B}{2H} \cos \beta + \frac{A_B}{A_H} \frac{B^3}{8H^3} \right). \end{aligned} \quad (4-41)$$

Die folgende zeitliche Ableitung der relativen Drallvektorkomponente \vec{D}_A liefert unter Berücksichtigung von Gl. (4-37), und der Kolinearität der Vektoren $\vec{\Omega}$ und \vec{D}_A , d.h. das vektorielle Produkt $\vec{\Omega} \times \vec{D}_A = \vec{0}$, den ersten Anteil am gesamten resultierenden Moment \vec{M}_A ,

$$\frac{d\vec{D}_A}{dt} = m_f \left[\bar{\kappa}_3 H^2 \dot{\Omega} + \bar{\kappa}_2 (u^2 \dot{\Omega} + 2u\dot{u}\Omega) - \bar{\kappa}_1 \frac{B}{2} \ddot{u} \right]. \quad (4-42)$$

Der zweite Anteil, das Zusatzglied im Drallsatz, ergibt sich aus dem Abstand des momentanen Massenmittelpunkt C_F des Flüssigkeitsfadens vom beschleunigten Bezugspunktes A zu

$$\begin{aligned} m_f \vec{r}_M' \times \vec{a}_A &= m_f \begin{pmatrix} \bar{\kappa}u \\ 0 \\ \frac{\bar{\kappa}_1}{2H} (H^2 + u^2) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \ddot{w}_t \cos \varphi_t - \ddot{v}_t \sin \varphi_t \\ 0 \\ \ddot{w}_t \sin \varphi_t + \ddot{v}_t \cos \varphi_t \end{pmatrix} = \\ &= m_f \left[\frac{\bar{\kappa}_1}{2H} (H^2 + u^2) (\ddot{w}_t \cos \varphi_t - \ddot{v}_t \sin \varphi_t) - \bar{\kappa}u (\ddot{w}_t \sin \varphi_t + \ddot{v}_t \cos \varphi_t) \right] \vec{e}_y. \end{aligned} \quad (4-43)$$

Die beiden Anteile, Gl. (4-42) und Gl. (4-43), des gesamten resultierenden Momentes \vec{M}_A sind damit explizit dargestellt und können in die Gl. (4-37) eingetragen werden. Außer diesen beiden genannten Anteilen existiert jedoch noch ein dritter, im Falle der Brückenstudien nicht zu vernachlässigender Beitrag zur Komponente des gesuchten äußeren unerwünschten resultierenden Momentes M_{Ay} . Hervorgerufen durch die im momentanen Massenmittelpunkt C_F exzentrisch angreifende resultierende Gewichtskraft $\vec{G} = -m_f g \vec{e}_z$ entsteht wieder ein zusätzliches pulsierendes äußeres Moment \vec{M}_p , wie in Abb. 4.9 dargestellt.

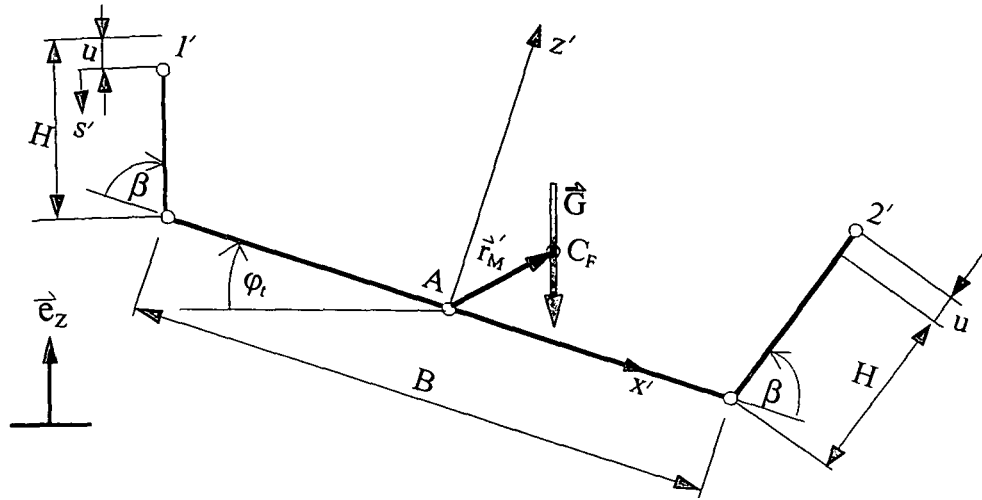


Abb. 4.9: Pulsierendes äußeres Moment, hervorgerufen durch die im momentanen Massenmittelpunkt C_F exzentrisch angreifende resultierende Gewichtskraft $\vec{G} = -m_f g \vec{e}_z$

Die Größe des pulsierenden Momentes \bar{M}_p ergibt sich dann zu

$$\bar{M}_p = \bar{r}_M' \times \vec{G} = \begin{pmatrix} \bar{\kappa} u \\ 0 \\ \frac{\bar{\kappa}_1}{2H} (H^2 + u^2) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} m_f g \sin \varphi_t \\ 0 \\ -m_f g \cos \varphi_t \end{pmatrix} = m_f g \left(\bar{\kappa} u \cos \varphi_t + \frac{\bar{\kappa}_1}{2H} (H^2 + u^2) \sin \varphi_t \right) \vec{e}_y . \quad (4-44)$$

Einsetzen der Gl. (4-42) und (4-43) in die Gl. (4-37) unter Berücksichtigung von $\bar{M}_A = M_A \vec{e}_y = (M_{Ay} + M_p) \vec{e}_y$, mit Gl. (4-44), liefert schließlich die gesuchte Komponente des äußeren Momentes

$$M_{Ay} = m_f \left[-\bar{\kappa} u (\ddot{w}_t \sin \varphi_t + \dot{v}_t \cos \varphi_t + g \cos \varphi_t) + \bar{\kappa}_1 \frac{1}{2H} (H^2 + u^2) (\ddot{w}_t \cos \varphi_t - \dot{v}_t \sin \varphi_t - g \sin \varphi_t) - \right.$$

$$\left. - \bar{\kappa}_1 \frac{B}{2} \ddot{u} + \bar{\kappa}_2 (u^2 \dot{\Omega} + 2u \dot{u} \dot{\Omega}) + \bar{\kappa}_3 H^2 \dot{\Omega} \right] ,$$

(4-45)

mit den bereits zuvor definierten Geometriefaktoren

$$\begin{aligned}\bar{\kappa} &= \frac{B + 2H \cos \beta}{L_1}, & \bar{\kappa}_1 &= \frac{2H \sin \beta}{L_1}, & \bar{\kappa}_2 &= \frac{B \cos \beta + 2H}{L_1}, \\ & & & & & (4-46) \\ \bar{\kappa}_3 &= \frac{2H}{3L_1} \left(1 + \frac{3B^2}{4H^2} + \frac{3B}{2H} \cos \beta + \frac{A_B}{A_H} \frac{B^3}{8H^3} \right).\end{aligned}$$

Der Ausdruck für das resultierende äußere Moment M_{Ay} vereinfacht sich für den Spezialfall einer rein translatorischen Anregung, d.h. $\varphi_t = 0$, $\Omega = \dot{\varphi}_t = 0$ und $\dot{\Omega} = \ddot{\varphi}_t = 0$, sowie unter Vernachlässigung des unerwünschten Momentes \bar{M}_p , zu

$$M_{Ay} = m_f \left[-\bar{\kappa}_1 \frac{B}{2} \ddot{u} + \bar{\kappa}_1 \frac{1}{2H} (H^2 + u^2) \ddot{w}_t - \bar{\kappa} u \ddot{v}_t \right], \quad (4-47)$$

in Übereinstimmung mit Gl. (3-42).

4.2.4 Flüssigkeitstilger – Hauptsystem Brücke, Gekoppeltes System

Die Bewegungsgleichung des freigeschnittenen Flüssigkeitstilgers unter Vorgabe einer kombinierten translatorischen und rotatorischen Anregung ist durch Gl. (4-23) angegeben. In diesem Abschnitt soll nun das gekoppelte System Brücke/Flüssigkeitstilger betrachtet werden. Das mechanische Modell des Hauptsystems, Brückenlängsachse ist nun x , das ist ein starrer Brückenquerschnitt an der Stelle x , mit insgesamt drei Freiheitsgraden, nämlich zwei translatorischen Verschiebungen $v(x,t)$, $w(x,t)$ und einer Verdrehung um die Längsachse $\vartheta(x,t)$, ist in Abb. 4.10 sowohl in der Ruhelage, $t=0$, als auch in einer Momentanlage, " t ", dargestellt. Seine Schiefstellung aus der Verbiegung der Stabachse wird vernachlässigt, da kleine Biegewinkel die Tilgerwirkung nicht merkbar beeinflussen. Diese Annahme wird durch das Experiment bestätigt, wie in Abschnitt 4.5 dargelegt.

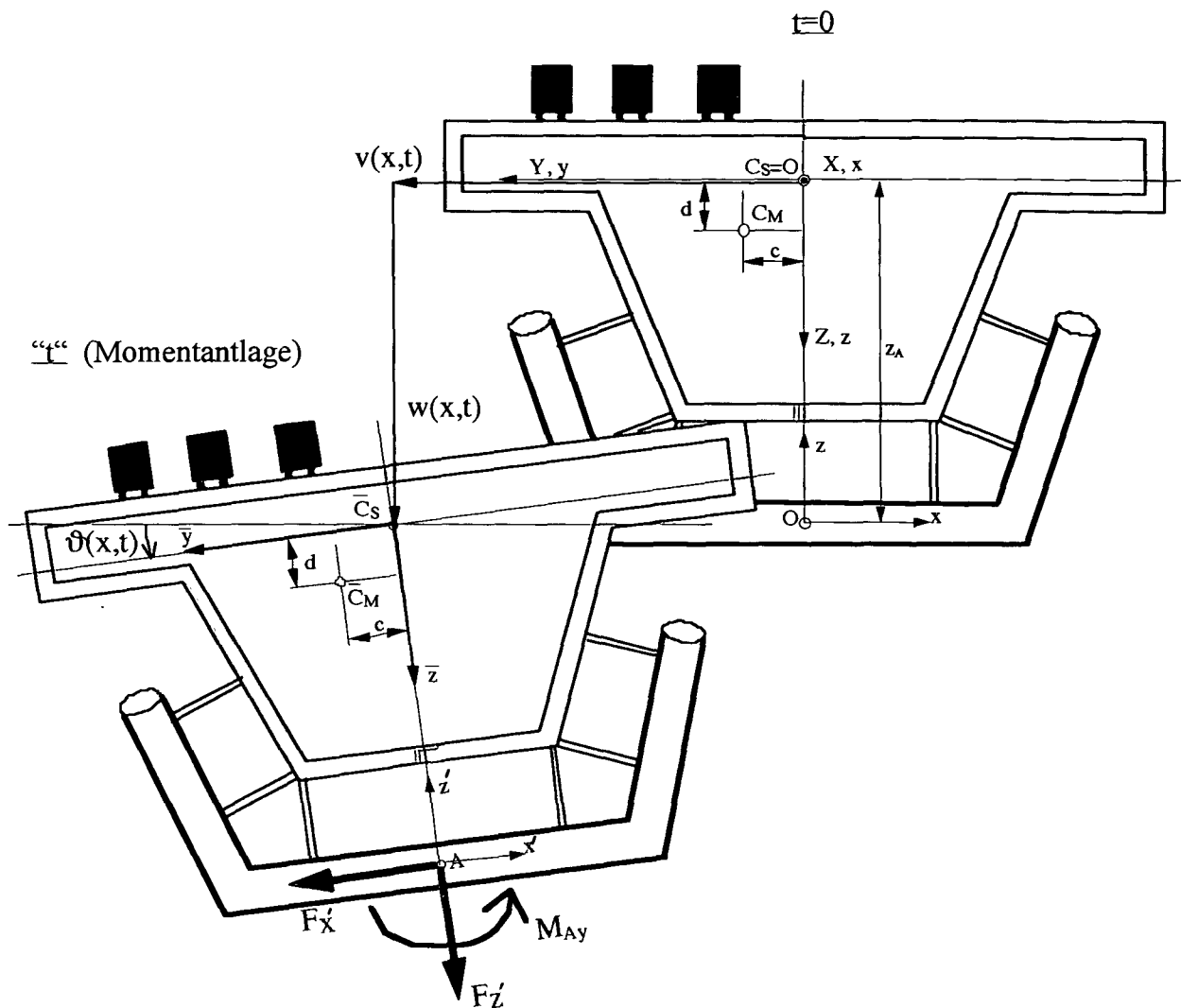


Abb. 4.10: Mechanisches Modell des Hauptsystems - Brücke; Lage des Systems, $t = 0$; Momentanlage des Systems " t' "; resultierende Kraftkomponenten F'_x , F'_z und Komponenten des Reaktionsmoments M_{Ay}

In Abschnitt 4.2.3 wurde die Substruktur Methode verwendet um die aus der Dynamik des Flüssigkeitsstilgers resultierenden Kraftkomponenten F'_x , F'_z und das Moment M_{Ay} , auf die Flüssigkeit wirkend, zu berechnen. Für die, in Abschnitt 4.3.1, dargelegte Ermittlung der gekoppelten Bewegungsgleichung des Hauptsystems werden diese nun in gegengleicher Richtung, wirkend auf die Brücke im bewegten Bezugspunkt A des starren Führungssystems, angebracht, wie in Abb. 4.10 eingetragen. Der Ursprung O des raumfesten Bezugssystems (Richtung der

Koordinatenachsen entsprechend der Definition eines positiven Schnittuferes) der Brücke wird im Schubmittelpunkt C_s (=Steifigkeitszentrum bei geschlossenen Querschnitten, wie in Bachmann⁷ oder Ramberger⁸ dargelegt) gewählt. Der Vorteil dieser speziellen Wahl des Bezugspunktes O liegt in der Entkoppelung und damit Vereinfachung der statischen Differentialgleichungen für die Verschiebungen $v(x)$, $w(x)$ und Verdrehung $\vartheta(x)$ des Stabes nach Theorie 1. Ordnung, wie von Ramberger⁹ beschrieben. Der Schubmittelpunkt C_s wird im allgemeinen nicht mit dem Massenmittelpunkt C_M zusammenfallen (wegen der im allgemeinen nicht symmetrischen statischen Belastung), daher wird der Massenmittelpunkt C_M in einer allgemeinen Lage gewählt, wie in Abb. 4.10 eingetragen.

Da die dynamische Belastung des kontinuierlichen Brückenträgers außerhalb des Schubmittelpunktes C_s erfolgt, Abb. 4.10, ist die Schwingungsantwort durch eine Koppelung von Biege- und Drehschwingungen gekennzeichnet und wird als Biegedrillschwingung bezeichnet. In der Fachliteratur wird die Berechnung der freien Schwingung für gelenkig gabelgelagerte Träger zum Beispiel von Weaver¹⁰ gezeigt, der eingeschwungene Zustand wird von Nowacki¹¹ behandelt. Den Einfluss einer konstanten Axialkraft auf das Eigenschwingungsverhalten untersucht Chwalla¹² und eine numerische Lösung mit der Methode der Finiten Elemente gelingt Fink¹³. Eine Verbesserung der Lösung der erzwungenen Biegedrillschwingung elastischer kontinuierlicher Träger mit offenem, einfach symmetrischen Querschnitt, durch Aufspalten der Verformung in einen quasistatischen und in einen komplementär dynamischen Anteil wird von Adam¹⁴ gezeigt. Die angeführten Arbeiten berücksichtigen nur Biegeschwingungen um eine Achse gekoppelt mit Drehschwingungen. Eine Erweiterung des Problems der Biegedrillschwingungen durch Berücksichtigung der Biegeschwingungen um zwei aufeinander senkrechte Achsen gekoppelt mit Drehschwingungen wird von Luza¹⁵ durchgeführt.

In der vorliegenden Arbeit werden allgemeine ebene Biegedrillschwingungen des gekoppelten Systems Brücke/Flüssigkeitstilger, wobei der gerade Brückenträger aus einem Hooke'schen Werkstoff mit gegebenen E-Modul und Poissonscher Querdehnungszahl ν , mit konstanter Dichte ρ besteht, untersucht. Die Deformation eines materiellen Punktes auf dem starren Brückenquerschnitt lässt sich durch Angabe der horizontalen $v(x,t)$ und der vertikalen Verschiebung $w(x,t)$ in Richtung

der raumfesten Achsen y bzw. z und durch die Verdrehung $\vartheta(x,t)$ (Drehpunkt = Schubmittelpunkt C_s) des Querschnittes festlegen, wie in der Abb. 4.10 dargestellt. Die in Abschnitt 4.2.3 ermittelten Kraftkomponenten F_x , F_z und die Komponente des Momentes M_{Ay} , die auf den Brückenquerschnitt einwirken, werden mit Hilfe der Grundformel der Kinematik in die Hauptkoordinaten des raumfesten Bezugssystems der Brücke transformiert. Zu diesem Zweck wird die Geschwindigkeit des mitbewegten Bezugspunkts A des starren Führungssystems für kleine Drehwinkel wie folgt ausgedrückt

$$\bar{v}_A = \bar{v}_{C_s} + \dot{\vartheta} \hat{r}, \quad \bar{v}_{C_s} = \dot{v} \bar{e}_y + \dot{w} \bar{e}_z, \quad \bar{v}_A = -\dot{w}_t \bar{e}_y - \dot{v}_t \bar{e}_z, \quad (4-48)$$

$$\hat{r} = -z_A \sin \vartheta \bar{e}_y + z_A \cos \vartheta \bar{e}_z, \quad \hat{r} = -z_A \cos \vartheta \bar{e}_y - z_A \sin \vartheta \bar{e}_z,$$

wo z_A den lotrechten Abstand vom gewählten Ursprung des raumfesten Koordinatensystems $C_s = O$ zum mitgeführten Bezugspunkt A bezeichnet, wie in Abb. 4.10 eingetragen. Nach Ausarbeitung der Gl. (4-48) ergibt sich die gesuchte Geschwindigkeit

$$\bar{v}_A = \begin{pmatrix} 0 \\ -\dot{w}_t \\ -\dot{v}_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{pmatrix} + \dot{\vartheta} \begin{pmatrix} 0 \\ -z_A \cos \vartheta \\ -z_A \sin \vartheta \end{pmatrix}, \quad \bar{e}_y: \dot{w}_t = -\dot{v} + \dot{\vartheta} z_A \cos \vartheta, \quad (4-49)$$

$$\bar{e}_z: \dot{v}_t = -\dot{w} + \dot{\vartheta} z_A \sin \vartheta.$$

Differentiation der Gl. (4-49) nach der Zeit t liefert die Beschleunigung des Bezugspunktes

$$\bar{a}_A = \begin{pmatrix} 0 \\ -\ddot{w}_t \\ -\ddot{v}_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \ddot{v} \\ \ddot{w} \end{pmatrix} + \ddot{\vartheta} \begin{pmatrix} 0 \\ -z_A \cos \vartheta \\ -z_A \sin \vartheta \end{pmatrix} + \dot{\vartheta} \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\vartheta} z_A \sin \vartheta \\ -\dot{\vartheta} z_A \cos \vartheta \end{pmatrix}, \quad \bar{e}_y: \ddot{w}_t = -\ddot{v} + \ddot{\vartheta} z_A \cos \vartheta - \dot{\vartheta}^2 z_A \sin \vartheta,$$

$$\bar{e}_z: \ddot{v}_t = -\ddot{w} + \ddot{\vartheta} z_A \sin \vartheta + \dot{\vartheta}^2 z_A \cos \vartheta. \quad (4-50)$$

Unter Berücksichtigung der Ergebnisse aus den Gln. (4-48) - (4-50) erhält man mit

$$\varphi_t = -\vartheta, \quad \Omega = \dot{\varphi}_t = -\dot{\vartheta}, \quad \dot{\Omega} = \ddot{\varphi}_t = -\ddot{\vartheta}, \quad \cos \varphi_t = \cos \vartheta, \quad \sin \varphi_t = -\sin \vartheta, \quad (4-51)$$

die resultierenden Kraftkomponenten, Gl. (4-35), in den Hauptkoordinaten

$$\begin{aligned} F_{\bar{y}} &= m_f \left[-\ddot{v} \cos \vartheta - \ddot{w} \sin \vartheta + \ddot{\vartheta} z_A + \bar{\kappa} (\ddot{u} - u \dot{\vartheta}^2) - \bar{\kappa}_1 \frac{1}{2H} (4u\ddot{u} \dot{\vartheta} + (H^2 + u^2) \ddot{\vartheta}) \right], \\ F_{\bar{z}} &= m_f \left[\ddot{v} \sin \vartheta - \ddot{w} \cos \vartheta + \ddot{\vartheta}^2 z_A + \bar{\kappa} (2\dot{u} \dot{\vartheta} + u \ddot{\vartheta}) + \bar{\kappa}_1 \frac{1}{2H} (2\dot{u}^2 - (H^2 + u^2) \dot{\vartheta}^2 + 2u\ddot{u}) \right], \end{aligned} \quad (4-52)$$

und das resultierende Moment, Gl. (4-45), ebenfalls in den Hauptkoordinaten

$$\begin{aligned} M_{Ax} &= m_f \left[-\bar{\kappa} u (\ddot{v} \sin \vartheta - \ddot{w} \cos \vartheta + \ddot{\vartheta}^2 z_A + g \cos \vartheta) - \bar{\kappa}_1 \frac{1}{2H} (H^2 + u^2) (\ddot{v} \cos \vartheta + \ddot{w} \sin \vartheta - \ddot{\vartheta} z_A - g \sin \vartheta) - \right. \\ &\quad \left. - \bar{\kappa}_1 \frac{B}{2} \ddot{u} - \bar{\kappa}_2 (u^2 \ddot{\vartheta} + 2u\dot{u} \dot{\vartheta}) - \bar{\kappa}_3 H^2 \ddot{\vartheta} \right]. \end{aligned} \quad (4-53)$$

Die Kraftkomponenten $F_{\bar{y}}$, $F_{\bar{z}}$ und die Komponente des Momentes M_{Ax} wirken an einer diskreten Stelle $x = \xi$ auf den bewegten Brückenträger ein, wie in Abb. 4.11 illustriert.

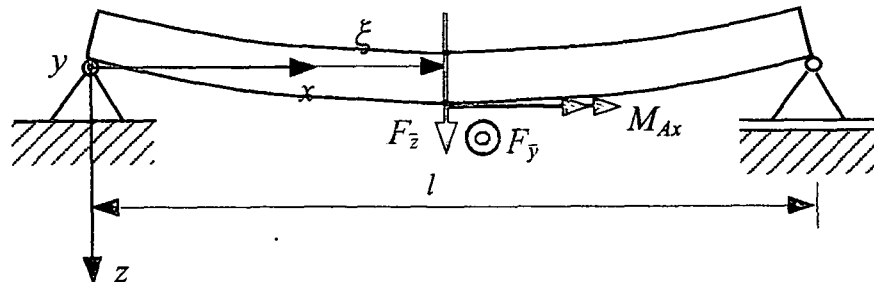


Abb. 4.11: Einwirkung der resultierenden Tilgerkraftkomponenten $F_{\bar{y}}$, $F_{\bar{z}}$ und des resultierenden Tilgermomentes M_{Ax} an einer diskreten Stelle $x = \xi$ des schlanken Brückenträger

Für die Berücksichtigung in der Bewegungsgleichung der Brücke werden diese Einzeleinwirkungen mit der Dirac'schen Deltafunktion $\delta(x - \xi)$ multipliziert. Die Dirac'sche Deltafunktion ist eine Pseudofunktion mit der Normierung Eins und den hier wesentlichen Eigenschaften

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - \xi) dx = 1, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta(x - \xi) dx = f(\xi), \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta'(x - \xi) dx = f'(\xi). \quad (4-54)$$

4.3 Biegedrillschwingungen des kontinuierlichen schlanken Brückenträgers

4.3.1 Herleitung der gekoppelten Bewegungsgleichungen mit Wirkung des Flüssigkeitstilgers

Der Brückenträger wird nun als kontinuierliche Schwingerkette kleiner Massenelemente $\rho A dx$ betrachtet. Zur Ermittlung der gekoppelten Bewegungsgleichungen wird Impuls- und Drallsatz auf ein herausgeschnittenes Massenelement der Länge dx angewendet, Abb. 4.12.

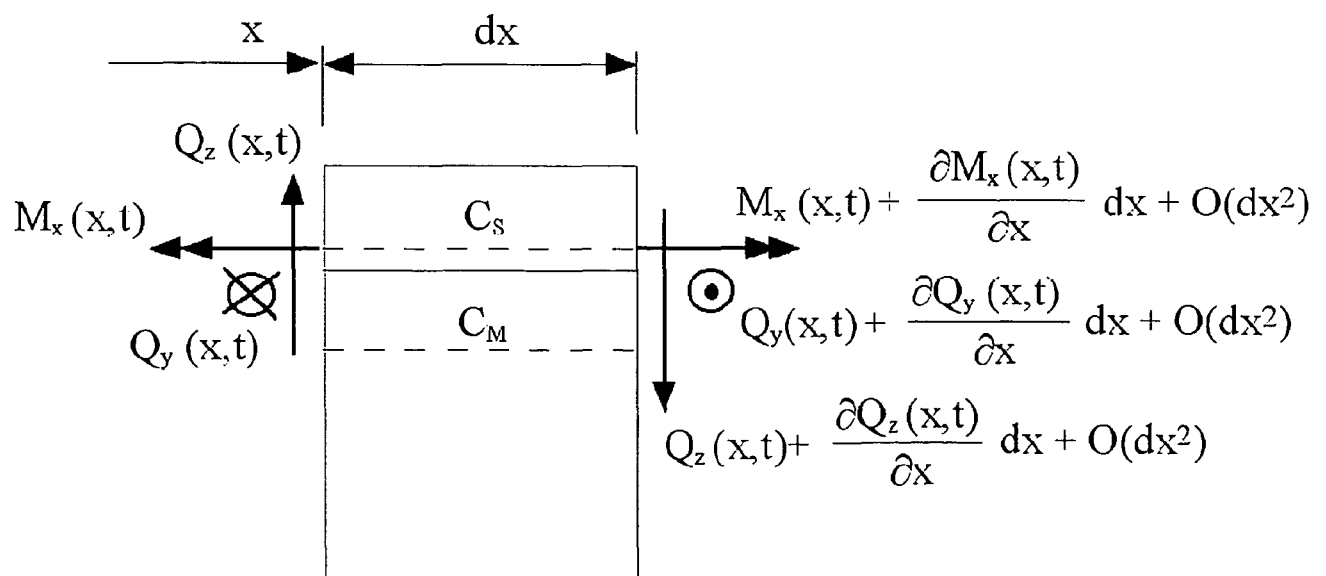


Abb. 4.12: Balkenelement der Länge dx in allgemeiner ebener Bewegung

Die nach Freischneiden des Massenelementes wirkenden Querkräfte $Q_z(x,t)$ und $Q_y(x,t)$ greifen im Schubmittelpunkt C_s des Brückenquerschnittes an, hingegen wirken die aus der Dynamik der Brücke resultierenden Trägheitskräfte im Massenmittelpunkt C_M , wie in Abb. 4.10 dargestellt. Der Impulssatz in z bzw. y -Richtung, (Masse mal der absoluten Beschleunigung des Massenmittelpunktes C_M = Resultierende der äußeren Kräfte in Bewegungsrichtung), angewendet auf ein Massenelement $\rho A dx$, liefert

$$\bar{e}_z: \quad \rho A dx (\ddot{w} + c \ddot{\vartheta}) = \frac{\partial Q_z}{\partial x} dx + O(dx^2) + F_{\bar{y}} \sin \vartheta \delta(x - \xi) dx + F_{\bar{z}} \cos \vartheta \delta(x - \xi) dx, \quad (4-55)$$

$$\bar{e}_y: \quad \rho A dx (\ddot{v} - d \ddot{\vartheta}) = \frac{\partial Q_y}{\partial x} dx + O(dx^2) + F_{\bar{y}} \cos \vartheta \delta(x - \xi) dx - F_{\bar{z}} \sin \vartheta \delta(x - \xi) dx,$$

und der Drallsatz um die Längsachse x (Bezugspunkt = Schubmittelpunkt C_s) ergibt

$$\rho [I_0 + c^2 A + d^2 A] dx \ddot{\vartheta} + \rho A dx \ddot{w} c - \rho A dx \ddot{v} d = \frac{\partial M_x}{\partial x} + (M_{Ax} - F_{\bar{y}} z_A) \delta(x - \xi) dx. \quad (4-56)$$

Division der Gln. (4-55) und (4-56) durch dx mit nachfolgendem Grenzübergang $dx \rightarrow 0$ ergibt nach einigen algebraischen Umformungen und Elimination der Schnittgrößen durch Einsetzen von

$$\frac{\partial Q_z}{\partial x} = -EJ_y w_{,xxxx}, \quad \frac{\partial Q_y}{\partial x} = -EJ_z v_{,xxxx}, \quad \frac{\partial M_x}{\partial x} = -EA_{\varphi\varphi} \vartheta_{,xxxx} + GJ_T \vartheta_{,xx}, \quad (4-57)$$

(schubstarrer, schlanker Träger), exakt ein System von drei gekoppelten partiellen nichtlinearen Differentialgleichungen in den unbekannten Lagekoordinaten $v(x,t)$, $w(x,t)$ und $\vartheta(x,t)$, mit $m(x) = \rho A$,

$$\begin{aligned}
 EJ_y w_{xxxx} + m(\ddot{w} + c\ddot{\vartheta}) &= (F_{\bar{y}} \sin \vartheta + F_{\bar{z}} \cos \vartheta) \delta(x - \xi) , \\
 EJ_z v_{xxxx} + m(\ddot{v} - d\ddot{\vartheta}) &= (F_{\bar{y}} \cos \vartheta - F_{\bar{z}} \sin \vartheta) \delta(x - \xi) ,
 \end{aligned}
 \tag{4-58}$$

$$EA_{\varphi\varphi} \vartheta_{xxxx} - GJ_T \vartheta_{xx} + m \left[\left(c^2 + d^2 + \frac{I_0}{A} \right) \ddot{\vartheta} + c\ddot{w} - d\ddot{v} \right] = (M_{Ax} - F_{\bar{y}} z_A) \delta(x - \xi) .$$

Hierbei ist EJ_y und EJ_z die Biegesteifigkeit des geraden Brückenträgers um die y - bzw. z -Achse, $EA_{\varphi\varphi}$ bezeichnet die Wölbsteifigkeit des Querschnittes, GJ_T ist die Torsionssteifigkeit nach St.-Venant, I_0 stellt das polare Trägheitsmoment bezüglich des Massenmittelpunktes dar und $m(x) = \rho A$ bezeichnet die Masse pro Längeneinheit des kontinuierlichen Brückenträgers. Mit c bzw. d wird der Abstand zwischen Schubmittelpunkt C_s und Massenmittelpunkt C_m bezeichnet, wie in Abb. 4.10 eingetragen. Die Ableitung nach der Brückenträgerlängsachse x wird mit $(\cdot)_{,x} = \partial(\cdot)/\partial x$ und die Ableitung nach der Zeit mit $\dot{(\cdot)} = \partial(\cdot)/\partial t$ bezeichnet. Die Gl. (4-58) ist für die freie und erzwungene Schwingung unter Berücksichtigung der aktuellen Anfangs-, Rand- und Übergangsbedingungen zu lösen, wobei im Falle des beidseitig gabelgelagerten Trägers an den Randstellen $x = x_R$, wie in Abb. 4.11 illustriert,

$$w(x_R, t) = 0 , \quad w_{,xx}(x_R, t) = 0 , \quad v(x_R, t) = 0 , \quad v_{,xx}(x_R, t) = 0 , \quad \vartheta(x_R, t) = 0 , \quad \vartheta_{,xx}(x_R, t) = 0 ,
 \tag{4-59}$$

als Randbedingungen zu verwenden sind. Für den Fall einer Einspannung oder eines freien Endes sind die entsprechenden Randbedingungen z.B. in Druml¹⁶ gelistet.

4.3.2 Lösung der freien ungedämpften Schwingung des schlanken Brückenträgers ohne Flüssigkeitstilger

Die freie Biegedrillschwingung genügt dem homogenen linearen partiellen Differentialgleichungssystem, das durch Nullsetzen der rechten Seite von Gl. (4-58) entsteht,

$$EJ_y w_{,xxxx} + m(\ddot{w} + c\ddot{\vartheta}) = 0 ,$$

$$EJ_z v_{,xxxx} + m(\ddot{v} - d\ddot{\vartheta}) = 0 , \quad (4-60)$$

$$EA_{\varphi\varphi} \vartheta_{,xxxx} - GJ_T \vartheta_{,xx} + m \left[\left(c^2 + d^2 + \frac{I_0}{A} \right) \ddot{\vartheta} + c\ddot{w} - d\ddot{v} \right] = 0 .$$

Die Lösung erfolgt mittels Bernoullischer Separationsansätze durch Trennen der Orts- und Zeitvariablen wobei die Funktionen $v(x,t)$, $w(x,t)$ und $\vartheta(x,t)$ wie folgt angeschrieben werden

$$v(x,t) = \chi(x) Y(t) , \quad w(x,t) = \phi(x) Y(t) , \quad \vartheta(x,t) = \psi(x) Y(t) . \quad (4-61)$$

Durch Einsetzen des Ansatzes, Gl. (4-61), in die homogenen Gln. (4-60) gelingt nach einigen algebraischen Umformungen eine Separation von Orts- und Zeitfunktionen,

$$-\frac{\ddot{Y}}{Y} = \frac{EJ_y}{m} \frac{\phi_{,xxxx}}{(\phi + c\psi)} \equiv \omega^2 , \quad (4-62)$$

$$-\frac{\ddot{Y}}{Y} = \frac{EJ_z}{m} \frac{\chi_{,xxxx}}{(\chi - d\psi)} \equiv \omega^2 , \quad (4-63)$$

$$-\frac{\ddot{Y}}{Y} = \frac{1}{m} \frac{EA_{\varphi\varphi} \psi_{,xxxx} - GJ_T \psi_{,xx}}{\left(c^2 + d^2 + I_0 / A \right) \psi + c\phi - d\chi} \equiv \omega^2 . \quad (4-64)$$

Da die Gln. (4-62) - (4-64) zu jedem Zeitpunkt t und an jeder Stelle x gelten, können sie nur gleich einer Separationskonstanten sein die mit ω^2 bezeichnet wird. Aus den Gln. (4-62) - (4-64) folgt zum Ersten die Gleichung der freien Schwingung des ungedämpften Einmassenschwingers

$$\ddot{Y} + \omega^2 Y = 0, \quad (4-65)$$

woraus ω als Eigenkreisfrequenz des Hauptsystems identifiziert wird. Die Lösung dieser Gleichung ist bekannt, aus Gl. (1-37),

$$Y(t) = Y(0) \cos \omega t + \frac{\dot{Y}(0)}{\omega} \sin \omega t, \quad (4-66)$$

wo $Y(0)$ und $\dot{Y}(0)$ die Anfangsbedingungen zum Zeitpunkt $t=0$ darstellen. Weiters ergibt sich aus den Gln. (4-62) - (4-64) ein gekoppeltes Differentialgleichungssystem 4. Ordnung für die Unbekannten $\phi(x)$, $\chi(x)$ und $\psi(x)$,

$$\frac{EJ_y}{m} \phi_{xxxx} - \omega^2 (\phi + c\psi) = 0, \quad (4-67)$$

$$\frac{EJ_z}{m} \chi_{xxxx} - \omega^2 (\chi - d\psi) = 0, \quad (4-68)$$

$$\frac{EA_{\phi\phi}}{m} \psi_{xxxx} - \frac{GJ_T}{m} \psi_{xx} - \omega^2 \left[\left(c^2 + d^2 + \frac{I_0}{A} \right) \psi + c\phi - d\chi \right] = 0, \quad (4-69)$$

dessen Lösung durch folgenden Ansatz gefunden werden kann

$$\phi(x) = C e^{\lambda x}, \quad \chi(x) = D e^{\lambda x}, \quad \psi(x) = E e^{\lambda x}. \quad (4-70)$$

Einsetzen von Gl. (4-70) in die gekoppelten Gln. (4-67) - (4-69) liefert das folgende homogene algebraische Gleichungssystem

$$\beta_1 \lambda^4 C - \omega^2 (C + c E) = 0 , \quad (4-71)$$

$$\beta_2 \lambda^4 D - \omega^2 (D - d E) = 0 , \quad (4-72)$$

$$\beta_3 \lambda^4 E - \beta_4 \lambda^2 E - \omega^2 (I_1 E + c C - d D) = 0 , \quad (4-73)$$

mit den zweckmäßig eingeführten Abkürzungen

$$\beta_1 = \frac{EJ_y}{m} , \quad \beta_2 = \frac{EJ_z}{m} , \quad \beta_3 = \frac{EA_{\varphi\varphi}}{m} , \quad \beta_4 = \frac{GJ_T}{m} , \quad I_1 = c^2 + d^2 + \frac{I_0}{A} . \quad (4-74)$$

Aus den Gln. (4-71) und (4-72) lässt sich folgender Zusammenhang für die Konstanten C , D und E ableiten

$$C = \frac{\omega^2 c}{\beta_1 \lambda^4 - \omega^2} E , \quad D = \frac{-\omega^2 d}{\beta_2 \lambda^4 - \omega^2} E , \quad (4-75)$$

wodurch man nach Einsetzen der Gl. (4-75) in Gl. (4-73) und einigen algebraischen Umformungen ein Polynom sechsten Grades mit konstanten Koeffizienten für den Eigenwert λ^2 erhält,

$$\begin{aligned} & \beta_1 \beta_2 \beta_3 \lambda^{12} - \beta_1 \beta_2 \beta_4 \lambda^{10} - \omega^2 (\beta_2 \beta_3 + \beta_1 \beta_3 + \beta_1 \beta_2 I_1) \lambda^8 + \omega^2 (\beta_2 \beta_4 + \beta_1 \beta_4) \lambda^6 + \\ & + \omega^4 (\beta_3 + \beta_1 I_1 + \beta_2 I_1 - \beta_2 c^2 - \beta_1 d^2) \lambda^4 - \beta_4 \omega^4 \lambda^2 - \omega^6 (c^2 + d^2 + I_1) = 0 . \end{aligned} \quad (4-76)$$

Die zwölf Nullstellen dieses Polynoms in der Unbekannten $\lambda = \lambda(\omega)$ werden im allgemeinen numerisch ermittelt und anschließend können die Verlaufsfunktionen $\phi(x)$, $\chi(x)$ und $\psi(x)$ in Form einer Reihenentwicklung unter Verwendung der Gl. (4-75) wie folgt angeschrieben werden,

$$\phi(x) = \sum_{i=1}^{12} \frac{\omega^2 c}{\beta_1 \lambda_i^4 - \omega^2} E_i e^{\lambda_i x} , \quad \chi(x) = \sum_{i=1}^{12} \frac{-\omega^2 d}{\beta_2 \lambda_i^4 - \omega^2} E_i e^{\lambda_i x} , \quad \psi(x) = \sum_{i=1}^{12} E_i e^{\lambda_i x} , \quad (4-77)$$

wobei E_1, \dots, E_{12} komplexe Konstante darstellen. Mit Hilfe der Eulerschen Formel können weiters die Exponentialfunktionen in Gl. (4-77) durch trigonometrische Funktionen und durch Hyperbelfunktionen ausgedrückt werden, wie in Bronstein¹⁷, Seite 457, dargelegt. In der Gl. (4-76) sind nur gerade Potenzen in der gesuchten Größe $\lambda = \lambda(\omega)$ vorhanden, daher lauten jeweils vier Lösungen

$$\lambda_{4i-3, 4i-2} = \pm \varepsilon_i, \quad \lambda_{4i-1, 4i} = \pm i \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (4-78)$$

Einsetzen von Gl. (4-78) in die Reihenentwicklung, Gl. (4-77), und Anwendung der Eulerschen Formel liefert schließlich die gesuchten Ansatzfunktionen in den neuen Konstanten C_i , wobei die dargelegte Form in Ziegler¹⁸ [Seite 456] angegeben wird,

$$\phi(x) = \sum_{i=1}^3 \eta_{1i} \left[C_{4i-3} (\sin \varepsilon_i x + \sinh \varepsilon_i x) + C_{4i-2} (\cos \varepsilon_i x + \cosh \varepsilon_i x) + \right. \\ \left. + C_{4i-1} (\sin \varepsilon_i x - \sinh \varepsilon_i x) + C_{4i} (\cos \varepsilon_i x - \cosh \varepsilon_i x) \right], \quad (4-79)$$

$$\chi(x) = \sum_{i=1}^3 \eta_{2i} \left[C_{4i-3} (\sin \varepsilon_i x + \sinh \varepsilon_i x) + C_{4i-2} (\cos \varepsilon_i x + \cosh \varepsilon_i x) + \right. \\ \left. + C_{4i-1} (\sin \varepsilon_i x - \sinh \varepsilon_i x) + C_{4i} (\cos \varepsilon_i x - \cosh \varepsilon_i x) \right], \quad (4-80)$$

$$\psi(x) = \sum_{i=1}^3 \left[C_{4i-3} (\sin \varepsilon_i x + \sinh \varepsilon_i x) + C_{4i-2} (\cos \varepsilon_i x + \cosh \varepsilon_i x) + \right. \\ \left. + C_{4i-1} (\sin \varepsilon_i x - \sinh \varepsilon_i x) + C_{4i} (\cos \varepsilon_i x - \cosh \varepsilon_i x) \right], \quad (4-81)$$

mit den hier eingeführten Hilfswerten

$$\eta_{1i} = \frac{\omega^2 c}{\beta_1 \varepsilon_i^4 - \omega^2}, \quad \eta_{2i} = \frac{-\omega^2 d}{\beta_2 \varepsilon_i^4 - \omega^2}. \quad (4-82)$$

Für jede der drei Lagekoordinaten des Hauptsystems $v(x,t)$, $w(x,t)$ und $\vartheta(x,t)$ sind vier Randbedingungen notwendig, sodaß in Summe zwölf homogene Gleichungen entstehen. Die Koeffizientenmatrix dieses Gleichungssystems ist von der Form

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \mathbf{A}_{13} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \mathbf{A}_{23} \\ \mathbf{A}_{31} & \mathbf{A}_{32} & \mathbf{A}_{33} \end{bmatrix}, \quad (4-83)$$

wo die Teilmatrizen wie folgt definiert sind

$$\mathbf{A}_{1i} = \eta_{1i} \begin{bmatrix} \sin_{,n} \varepsilon_i x + \sinh_{,n} \varepsilon_i x & \cos_{,n} \varepsilon_i x + \cosh_{,n} \varepsilon_i x & \sin_{,n} \varepsilon_i x - \sinh_{,n} \varepsilon_i x & \cos_{,n} \varepsilon_i x - \cosh_{,n} \varepsilon_i x \\ \sin_{,n} \varepsilon_i x + \sinh_{,n} \varepsilon_i x & \cos_{,n} \varepsilon_i x + \cosh_{,n} \varepsilon_i x & \sin_{,n} \varepsilon_i x - \sinh_{,n} \varepsilon_i x & \cos_{,n} \varepsilon_i x - \cosh_{,n} \varepsilon_i x \\ \sin_{,n} \varepsilon_i x + \sinh_{,n} \varepsilon_i x & \cos_{,n} \varepsilon_i x + \cosh_{,n} \varepsilon_i x & \sin_{,n} \varepsilon_i x - \sinh_{,n} \varepsilon_i x & \cos_{,n} \varepsilon_i x - \cosh_{,n} \varepsilon_i x \\ \sin_{,n} \varepsilon_i x + \sinh_{,n} \varepsilon_i x & \cos_{,n} \varepsilon_i x + \cosh_{,n} \varepsilon_i x & \sin_{,n} \varepsilon_i x - \sinh_{,n} \varepsilon_i x & \cos_{,n} \varepsilon_i x - \cosh_{,n} \varepsilon_i x \end{bmatrix}. \quad (4-84)$$

$$\mathbf{A}_{2i} = \eta_{2i} \begin{bmatrix} \sin_{,n} \varepsilon_i x + \sinh_{,n} \varepsilon_i x & \cos_{,n} \varepsilon_i x + \cosh_{,n} \varepsilon_i x & \sin_{,n} \varepsilon_i x - \sinh_{,n} \varepsilon_i x & \cos_{,n} \varepsilon_i x - \cosh_{,n} \varepsilon_i x \\ \sin_{,n} \varepsilon_i x + \sinh_{,n} \varepsilon_i x & \cos_{,n} \varepsilon_i x + \cosh_{,n} \varepsilon_i x & \sin_{,n} \varepsilon_i x - \sinh_{,n} \varepsilon_i x & \cos_{,n} \varepsilon_i x - \cosh_{,n} \varepsilon_i x \\ \sin_{,n} \varepsilon_i x + \sinh_{,n} \varepsilon_i x & \cos_{,n} \varepsilon_i x + \cosh_{,n} \varepsilon_i x & \sin_{,n} \varepsilon_i x - \sinh_{,n} \varepsilon_i x & \cos_{,n} \varepsilon_i x - \cosh_{,n} \varepsilon_i x \\ \sin_{,n} \varepsilon_i x + \sinh_{,n} \varepsilon_i x & \cos_{,n} \varepsilon_i x + \cosh_{,n} \varepsilon_i x & \sin_{,n} \varepsilon_i x - \sinh_{,n} \varepsilon_i x & \cos_{,n} \varepsilon_i x - \cosh_{,n} \varepsilon_i x \end{bmatrix}. \quad (4-85)$$

$$\mathbf{A}_{3i} = \begin{bmatrix} \sin_{,n} \varepsilon_i x + \sinh_{,n} \varepsilon_i x & \cos_{,n} \varepsilon_i x + \cosh_{,n} \varepsilon_i x & \sin_{,n} \varepsilon_i x - \sinh_{,n} \varepsilon_i x & \cos_{,n} \varepsilon_i x - \cosh_{,n} \varepsilon_i x \\ \sin_{,n} \varepsilon_i x + \sinh_{,n} \varepsilon_i x & \cos_{,n} \varepsilon_i x + \cosh_{,n} \varepsilon_i x & \sin_{,n} \varepsilon_i x - \sinh_{,n} \varepsilon_i x & \cos_{,n} \varepsilon_i x - \cosh_{,n} \varepsilon_i x \\ \sin_{,n} \varepsilon_i x + \sinh_{,n} \varepsilon_i x & \cos_{,n} \varepsilon_i x + \cosh_{,n} \varepsilon_i x & \sin_{,n} \varepsilon_i x - \sinh_{,n} \varepsilon_i x & \cos_{,n} \varepsilon_i x - \cosh_{,n} \varepsilon_i x \\ \sin_{,n} \varepsilon_i x + \sinh_{,n} \varepsilon_i x & \cos_{,n} \varepsilon_i x + \cosh_{,n} \varepsilon_i x & \sin_{,n} \varepsilon_i x - \sinh_{,n} \varepsilon_i x & \cos_{,n} \varepsilon_i x - \cosh_{,n} \varepsilon_i x \end{bmatrix}. \quad (4-86)$$

Dabei bezeichnet $(\cdot)_{,n}$ die in Abhängigkeit der Randbedingungen geforderte Anzahl von Ableitungen. Im Falle des beidseitig gabelgelagerten Trägers, Gl. (4-59),

entspricht z.B. $n=0$ bzw. $n=2$. Man erhält nun weiters durch Nullsetzen der gebildeten Frequenzdeterminante

$$\det \mathbf{A} = 0, \quad (4-87)$$

die transzendente Frequenzgleichung zur Bestimmung der Eigenkreisfrequenz ω welche unendlich viele Lösungen besitzt und abschließend den Satz von Eigenfunktionen $\phi(x)$, $\chi(x)$ und $\psi(x)$ durch Substitution der Eigenwerte

4.3.3 Numerische Bestimmung der Eigenkreisfrequenz des ungedämpften, beidseitig gabelgelagerten Brückenträgers ohne Flüssigkeitstilger

Die in Abschnitt 4.3.2 durchgeführte Eigenwertanalyse liefert mit den Randbedingungen des beidseitig gabelgelagerten Trägers eines Brückenfeldes, Gl. (4-59), folgenden Satz von trigonometrischen Eigenfunktionen, die auch von Weaver et al. [10] angegeben werden,

$$\phi_n(x) = C_n \sin \lambda_n x, \quad \chi_n(x) = D_n \sin \lambda_n x, \quad \psi_n(x) = E_n \sin \lambda_n x, \quad \lambda_n = \frac{n\pi}{l}. \quad (4-88)$$

Einsetzen der Gl. (4-88) in das gekoppelte Differentialgleichungssystem 4. Ordnung der freien Biegedrillschwingung, Gln. (4-67) - (4-69), ergibt das folgende, homogene lineare, Gleichungssystem

$$\mathbf{A} \bar{x} = \bar{0}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \bar{\Omega}_n^2 - \omega_n^2 & 0 & -c \omega_n^2 \\ 0 & \bar{\bar{\Omega}}_n^2 - \omega_n^2 & d \omega_n^2 \\ -c \omega_n^2 / I_1 & d \omega_n^2 / I_1 & \hat{\Omega}^2 - \omega_n^2 \end{bmatrix}, \quad \bar{x} = \begin{pmatrix} C_n \\ D_n \\ E_n \end{pmatrix}, \quad (4-89)$$

mit den entkoppelten quadratischen Eigenkreisfrequenzen

$$\bar{\Omega}_n^2 = \frac{EJ_y}{m} \lambda_n^4, \quad \bar{\bar{\Omega}}_n^2 = \frac{EJ_z}{m} \lambda_n^4, \quad \hat{\Omega}_n^2 = \frac{EA_{\varphi\varphi} \lambda_n^2 + GJ_T}{mI_1} \lambda_n^2. \quad (4-90)$$

Nullsetzen der Koeffizientendeterminante $\|A\|$ liefert die Frequenzgleichung in Form einer kubischen Gleichung, für das Quadrat der n -ten Eigenkreisfrequenz ω_n^2 ,

$$\begin{aligned} & \left[c^2 + d^2 - I_1 \right] \omega_n^6 + \left[-c^2 \bar{\Omega}_n^2 - d^2 \bar{\bar{\Omega}}_n^2 + I_1 \left(\bar{\Omega}_n^2 + \bar{\bar{\Omega}}_n^2 + \hat{\Omega}_n^2 \right) \right] \omega_n^4 + \\ & + \left[-I_1 \left(\bar{\Omega}_n^2 \bar{\bar{\Omega}}_n^2 + \bar{\Omega}_n^2 \hat{\Omega}_n^2 + \bar{\bar{\Omega}}_n^2 \hat{\Omega}_n^2 \right) \right] \omega_n^2 + \bar{\Omega}_n^2 \bar{\bar{\Omega}}_n^2 \hat{\Omega}_n^2 I_1 = 0, \end{aligned} \quad (4-91)$$

wobei das Auffinden der Nullstellen dieses Polynoms im allgemeinen numerisch erfolgt. Es ist zu bemerken, dass im betrachteten Fall des beidseitig gabelgelagerten Trägers mit den Verformungsgrößen $v(x,t)$, $w(x,t)$ und $\vartheta(x,t)$ drei unterschiedliche Schwingungszahlen aus einem Wert von ω_n^2 folgen: ω_{n1}^2 , ω_{n2}^2 und ω_{n3}^2 . Der Zusammenhang zwischen den Konstanten C_n , D_n und E_n , in Gl. (4-88), ist gemäß Gl. (4-75) gegeben durch

$$C_{ni} = \frac{\omega_{ni}^2 c}{\beta_1 \lambda_n^4 - \omega_{ni}^2} E_{ni}, \quad D_{ni} = \frac{-\omega_{ni}^2 d}{\beta_2 \lambda_n^4 - \omega_{ni}^2} E_{ni}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (4-92)$$

wobei die Werte für E_{ni} aus den Orthogonalitätsbeziehungen der Eigenfunktionen zu bestimmen sind. Diese werden im folgenden Abschnitt 4.3.4 betrachtet.

4.3.4 Orthogonalitätsbeziehungen der Eigenfunktionen

Um die erzwungene Schwingung des Brückenträgers berechnen zu können wird noch die Orthogonalitätsbeziehung der Eigenfunktionen benötigt, wie in Kapitel 1, Abschnitt 1.1.2 ausgeführt. Dazu wird in einem ersten Schritt die Gl. (4-67) für die n -te bzw. m -te Schwingungsform angeschrieben und nachfolgend mit ϕ_m bzw. ϕ_n multipliziert,

$$m\omega_n^2(\phi_n\phi_m + c\psi_n\phi_m) = EJ_y\phi_{n,xxxx}\phi_m, \quad (4-93)$$

$$m\omega_m^2(\phi_m\phi_n + c\psi_m\phi_n) = EJ_y\phi_{m,xxxx}\phi_n. \quad (4-94)$$

In einem zweiten Schritt wird die Gl. (4-68) für die n -te bzw. m -te Schwingungsform angeschrieben und nachfolgend mit χ_m bzw. χ_n multipliziert,

$$m\omega_n^2(\chi_n\chi_m - d\psi_n\chi_m) = EJ_y\chi_{n,xxxx}\chi_m, \quad (4-95)$$

$$m\omega_m^2(\chi_m\chi_n - d\psi_m\chi_n) = EJ_y\chi_{m,xxxx}\chi_n. \quad (4-96)$$

Nun wird auch noch die Gl. (4-69) für die n -te bzw. m -te Schwingungsform angeschrieben und nachfolgend mit ψ_m bzw. ψ_n multipliziert,

$$m\omega_n^2[I_1\psi_n\psi_m + c\phi_n\psi_m - d\chi_n\psi_m] = EA_{\phi\phi}\psi_{n,xxxx}\psi_m - GJ_T\psi_{n,xx}\psi_m, \quad (4-97)$$

$$m\omega_m^2[I_1\psi_m\psi_n + c\phi_m\psi_n - d\chi_m\psi_n] = EA_{\phi\phi}\psi_{m,xxxx}\psi_n - GJ_T\psi_{m,xx}\psi_n. \quad (4-98)$$

Durch Addition der Gln. (4-93), (4-95) und (4-97) bzw. Gln. (4-94), (4-96) und (4-98) erhält man jeweils

$$\begin{aligned}
m\omega_n^2(\phi_n\phi_m + c\psi_n\phi_m) + m\omega_n^2(\chi_n\chi_m - d\psi_n\chi_m) + m\omega_n^2[I_1\psi_n\psi_m + c\phi_n\psi_m - d\chi_n\psi_m] = \\
= EJ_y\phi_{n,xxxx}\phi_m + EJ_y\chi_{n,xxxx}\chi_m + EA_{\phi\phi}\psi_{n,xxxx}\psi_m - GJ_T\psi_{n,xx}\psi_m,
\end{aligned} \quad (4-99)$$

$$\begin{aligned}
m\omega_m^2(\phi_m\phi_n + c\psi_m\phi_n) + m\omega_m^2(\chi_m\chi_n - d\psi_m\chi_n) + m\omega_m^2[I_1\psi_m\psi_n + c\phi_m\psi_n - d\chi_m\psi_n] = \\
= EJ_y\phi_{m,xxxx}\phi_n + EJ_y\chi_{m,xxxx}\chi_n + EA_{\phi\phi}\psi_{m,xxxx}\psi_n - GJ_T\psi_{m,xx}\psi_n.
\end{aligned} \quad (4-100)$$

Die Subtraktion der Gl. (4-99) von Gl. (4-100) sowie anschließende Integration über die gesamte Trägerlänge l liefert schließlich das folgende Ergebnis

$$\begin{aligned}
(\omega_n^2 - \omega_m^2) \int_0^l m [\phi_n\phi_m + c(\psi_n\phi_m + \phi_n\psi_m) + \chi_n\chi_m - d(\psi_n\chi_m + \chi_n\psi_m) + I_1\psi_n\psi_m] dx = \\
= \int_0^l [EJ_y(\phi_{n,xxxx}\phi_m - \phi_{m,xxxx}\phi_n) + EJ_z(\chi_{n,xxxx}\chi_m - \chi_{m,xxxx}\chi_n) + \\
+ EA_{\phi\phi}(\psi_{n,xxxx}\psi_m - \psi_{m,xxxx}\psi_n) - GJ_T(\psi_{n,xx}\psi_m - \psi_{m,xx}\psi_n)] dx,
\end{aligned} \quad (4-101)$$

wobei im Falle von klassischen Randbedingungen, wie z.B. von Lutz [15] angegeben, selbstadjungierte Differentialoperatoren vorliegen, d.h. das Integral auf der rechten Seite der Gl. (4-101) verschwindet. Nach einer entsprechenden Normierung der Eigenfunktionen ergibt sich schließlich eine verallgemeinerte Orthogonalitätsbeziehung in der Form,

$$\int_0^l m [\phi_n\phi_m + c(\psi_n\phi_m + \phi_n\psi_m) + \chi_n\chi_m - d(\psi_n\chi_m + \chi_n\psi_m) + I_1\psi_n\psi_m] dx = \delta_{nm}, \quad (4-102)$$

wobei das Kronecker-Delta δ_{nm} bereits in Gl. (1-13) definiert wurde. Abschließend wird noch gezeigt wie sich die Orthogonalitätsbeziehung aus der Gl. (4-99) identifizieren lässt. Nach einigen Umformungen der Glieder kann Gl. (4-99) wie folgt angeschrieben werden

$$\begin{aligned}
m\omega_n^2 [\phi_n \phi_m + c(\psi_n \phi_m + \phi_n \psi_m) + \chi_n \chi_m - d(\psi_n \chi_m + \chi_n \psi_m) + I_1 \psi_n \psi_m] = \\
= EJ_y \phi_{n,xxxx} \phi_m + EJ_y \chi_{n,xxxx} \chi_m + EA_{\varphi\varphi} \psi_{n,xxxx} \psi_m - GJ_T \psi_{n,xx} \psi_m,
\end{aligned} \quad (4-103)$$

woraus sich nach Division durch ω_n^2 und Integration über die Stablänge l folgende Identität ergibt

$$\begin{aligned}
\int_0^l m [\phi_n \phi_m + c(\psi_n \phi_m + \phi_n \psi_m) + \chi_n \chi_m - d(\psi_n \chi_m + \chi_n \psi_m) + I_1 \psi_n \psi_m] dx = \\
= \frac{1}{\omega_n^2} \int_0^l [EJ_y \phi_{n,xxxx} \phi_m + EJ_y \chi_{n,xxxx} \chi_m + EA_{\varphi\varphi} \psi_{n,xxxx} \psi_m - GJ_T \psi_{n,xx} \psi_m] dx = \delta_{mn}.
\end{aligned} \quad (4-104)$$

4.3.5 Modale Analyse der erzwungenen Schwingung des schlanken Brückenträgers mit Flüssigkeitstilger

Die Modale Analyse wird in weiterer Folge dazu verwendet, um das inhomogene gekoppelte partielle nichtlineare Differentialgleichungssystem 4. Ordnung, Gl. (4-58), in ein System von gewöhnlichen Differentialgleichungen überzuführen. Insbesondere ist darauf hinzuweisen, dass eine vollständige Entkoppelung dieses nichtlinearen Problems in keiner Weise möglich ist. Lediglich die linke Seite der Gl. (4-58) entkoppelt und ergibt die Form des Einmassenschwingers, hingegen bleibt die Koppelung auf der rechten Seite nach wie vor erhalten. Die Verformungsfunktionen des Hauptsystems $v(x,t)$, $w(x,t)$ und $\vartheta(x,t)$ werden nun unter Verwendung der in Abschnitt 4.3.4 ermittelten Eigenfunktionen in einen einzigen Satz von modalen Koordinaten $Y(t)$ transformiert,

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_n(x) Y_n(t), \quad w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x) Y_n(t), \quad \vartheta(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(x) Y_n(t). \quad (4-105)$$

Aus Gründen der Vereinfachung und im Hinblick auf numerische Studien, einschließlich der Optimierung des Flüssigkeitstilgers, soll das gekoppelte System Brücke/Flüssigkeitstilger in der Folge nur kleine Winkeländerungen, $\vartheta(x,t) \ll 1$, erfahren. Unter dieser speziellen Annahme die der positiven Wirkung des Flüssigkeitstilgers zugrunde liegt, darf teilweise linearisiert werden und $\sin \vartheta \approx \vartheta$, $\cos \vartheta \approx 1$, $\vartheta^2 \approx 0$ gesetzt werden und das inhomogene, weiterhin nichtlineare partielle Differentialgleichungssystem, Gl. (4-58), hat dann die vereinfachte Form

$$EJ_y w_{xxxx} + m(\ddot{w} + c\ddot{\vartheta}) = (F_{\bar{y}} \vartheta + F_{\bar{z}}) \delta(x - \xi), \quad (4-106)$$

$$EJ_z v_{xxxx} + m(\ddot{v} - d\ddot{\vartheta}) = (F_{\bar{y}} - F_{\bar{z}} \vartheta) \delta(x - \xi), \quad (4-107)$$

$$EA_{\varphi\varphi} \vartheta_{xxxx} - GJ_T \vartheta_{xx} + m \left[\left(c^2 + d^2 + \frac{I_0}{A} \right) \ddot{\vartheta} + c\ddot{w} - d\ddot{v} \right] = (M_{Ax} - F_{\bar{y}} z_A) \delta(x - \xi), \quad (4-108)$$

mit den für kleine Winkeländerungen, $\vartheta(x,t) \ll 1$, vereinfachten Kraftkomponenten $F_{\bar{y}}$ und $F_{\bar{z}}$ aus Gl. (4-52),

$$F_{\bar{y}} = m_f \left[-\ddot{v} - \ddot{w} \vartheta + \ddot{\vartheta} z_A + \bar{\kappa} (\ddot{u} - u \dot{\vartheta}^2) - \bar{\kappa}_1 \frac{1}{2H} (4u\dot{u}\dot{\vartheta} + (H^2 + u^2) \ddot{\vartheta}) \right], \quad (4-109)$$

$$F_{\bar{z}} = m_f \left[\ddot{v} \vartheta - \ddot{w} + \dot{\vartheta}^2 z_A + \bar{\kappa} (2\dot{u}\dot{\vartheta} + u\ddot{\vartheta}) + \bar{\kappa}_1 \frac{1}{2H} (2\dot{u}^2 - (H^2 + u^2) \dot{\vartheta}^2 + 2u\ddot{u}) \right],$$

und der Komponente des resultierenden Momentes M_{Ax} aus Gl. (4-53),

$$M_{Ax} = m_f \left[-\bar{\kappa} u (\ddot{v} \vartheta - \ddot{w} + \dot{\vartheta}^2 z_A + g) - \bar{\kappa}_1 \frac{1}{2H} (H^2 + u^2) (\ddot{v} + \ddot{w} \vartheta - \ddot{\vartheta} z_A - g \vartheta) - \bar{\kappa}_1 \frac{B}{2} \ddot{u} - \bar{\kappa}_2 (u^2 \ddot{\vartheta} + 2u\dot{u}\dot{\vartheta}) - \bar{\kappa}_3 H^2 \ddot{\vartheta} \right]. \quad (4-110)$$

Aufgrund der Komplexität, die sich aus der modalen Transformation der Kraftkomponenten und der Komponente des Momentes ergibt, wird in einem ersten Schritt nur die linke Seite des Differentialgleichungssystems, Gln. (4-106) - (4-108) modal entwickelt und deren Entkoppelung gezeigt. Einsetzen der modalen Reihenentwicklungen, Gl. (4-105), in die Gln. (4-106) - (4-108) ergibt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \{ \ddot{Y}_n m [\phi_n + c \psi_n] + Y_n E J_y \phi_{n,xxxx} \} = (F_{\bar{y}} \vartheta + F_{\bar{z}}) \delta(x - \xi), \quad (4-111)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \{ \ddot{Y}_n m [\chi_n - d \psi_n] + Y_n E J_z \chi_{n,xxxx} \} = (F_{\bar{y}} - F_{\bar{z}} \vartheta) \delta(x - \xi), \quad (4-112)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \{ \ddot{Y}_n m [I_1 \psi_n + c \phi_n - d \chi_n] + Y_n [E A_{\varphi\varphi} \psi_{n,xxxx} - G J_T \psi_{n,xx}] \} = (M_{Ax} - F_{\bar{y}} z_A) \delta(x - \xi). \quad (4-113)$$

Multiplikation der Gl. (4-111) mit ϕ_m , Gl. (4-112) mit χ_m und (4-113) mit ψ_m liefert

$$\sum_{n=1}^{\infty} \{ \ddot{Y}_n m [\phi_n \phi_m + c \psi_n \phi_m] + Y_n E J_y \phi_{n,xxxx} \phi_m \} = \phi_m (F_{\bar{y}} \vartheta + F_{\bar{z}}) \delta(x - \xi), \quad (4-114)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \{ \ddot{Y}_n m [\chi_n \chi_m - d \psi_n \chi_m] + Y_n E J_z \chi_{n,xxxx} \chi_m \} = \chi_m (F_{\bar{y}} - F_{\bar{z}} \vartheta) \delta(x - \xi), \quad (4-115)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \{ \ddot{Y}_n m [I_1 \psi_n \psi_m + c \phi_n \psi_m - d \chi_n \psi_m] + Y_n [E A_{\varphi\varphi} \psi_{n,xxxx} \psi_m - G J_T \psi_{n,xx} \psi_m] \} = \psi_m (M_{Ax} - F_{\bar{y}} z_A) \delta(x - \xi). \quad (4-116)$$

Durch Addition der Gln. (4-114) - (4-116) mit anschließender Integration über die Trägerlänge l erhält man vorerst

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^l \left\{ \ddot{Y}_n m [\phi_n \phi_m + c(c\psi_n \phi_m + \phi_n \psi_m) + \chi_n \chi_m - d(\psi_n \chi_m + \chi_n \psi_m) + I_1 \psi_n \psi_m] + \right. \\
& \quad \left. + Y_n [EJ_y \phi_{n,xxxx} \phi_m + EJ_z \chi_{n,xxxx} \chi_m + EA_{\varphi\varphi} \psi_{n,xxxx} \psi_m - GJ_T \psi_{n,xx} \psi_m] \right\} dx = \quad (4-117) \\
& = \int_0^l \left[\phi_m (F_{\bar{y}} \vartheta + F_{\bar{z}}) + \chi_m (F_{\bar{y}} - F_{\bar{z}} \vartheta) + \psi_m (M_{Ax} - F_{\bar{y}} z_A) \right] \delta(x - \xi) dx .
\end{aligned}$$

Die erlaubte Vertauschung von Summations- und Integrationsreihenfolge und die Anwendung der Orthogonalitätsbeziehung, Gl. (4-102), sowie der in Gl. (4-104) gezeigten Identität liefern die folgende Gleichung

$$\sum_{n=1}^{\infty} [\ddot{Y}_n + \omega_n^2 Y_n] \delta_{mn} = \int_0^l \left[\phi_m (F_{\bar{y}} \vartheta + F_{\bar{z}}) + \chi_m (F_{\bar{y}} - F_{\bar{z}} \vartheta) + \psi_m (M_{Ax} - F_{\bar{y}} z_A) \right] \delta(x - \xi) dx . \quad (4-118)$$

Die Gl. (4-118) ist nur dann von Null verschieden wenn $n = m$, aufgrund der speziellen Eigenschaften der Kronecker-Deltafunktion δ_{mn} , Gl. (1-13). Daraus ergibt sich eine Gleichung für die m -te modale Koordinate wobei die linke Seite in entkoppelter Form vorliegt

$$\ddot{Y}_m + \omega_m^2 Y_m = \int_0^l \left[\phi_m (F_{\bar{y}} \vartheta + F_{\bar{z}}) + \chi_m (F_{\bar{y}} - F_{\bar{z}} \vartheta) + \psi_m (M_{Ax} - F_{\bar{y}} z_A) \right] \delta(x - \xi) dx . \quad (4-119)$$

Die rechte Seite der Gl. (4-119) wird nun schrittweise in modale Koordinaten transformiert. Der erste Anteil, $F_{\bar{y}} \vartheta + F_{\bar{z}}$, ergibt nach Einsetzen der modalen Reihenentwicklung, Gl. (4-105), in die für kleine Winkeländerungen, $\vartheta(x, t) \ll 1$, vereinfachten Kraftkomponenten $F_{\bar{y}}$, $F_{\bar{z}}$, Gl. (4-109), einen stark nichtlinearen Ausdruck

$$F_{\bar{y}} \vartheta + F_{\bar{z}} = m_f \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \ddot{Y}_n (-\phi_n + \bar{\kappa} u \psi_n) + \ddot{Y}_n Y_n \left(z_A - \frac{\bar{\kappa}_1}{2H} (H^2 + u^2) \right) \psi_n^2 + \dot{Y}_n^2 \left(z_A - \frac{\bar{\kappa}_1}{2H} (H^2 + u^2) \right) \psi_n^2 - \right. \\ \left. - \dot{Y}_n^2 Y_n \bar{\kappa} u \psi_n^3 + \dot{Y}_n \bar{\kappa} 2 \dot{u} \psi_n - \dot{Y}_n Y_n \frac{\bar{\kappa}_1}{2H} 4 u \dot{u} \psi_n^2 + Y_n \bar{\kappa} \ddot{u} \psi_n + \frac{\bar{\kappa}_1}{2H} (2 \dot{u}^2 + 2 u \ddot{u}) \right\}. \quad (4-120)$$

Die modale Entwicklung des zweiten Anteiles, $F_{\bar{y}} - F_{\bar{z}} \vartheta$, liefert weiters

$$F_{\bar{y}} - F_{\bar{z}} \vartheta = m_f \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \ddot{Y}_n \left(-\chi_n + z_A \psi_n - \frac{\bar{\kappa}_1}{2H} (H^2 + u^2) \psi_n \right) - \ddot{Y}_n Y_n \bar{\kappa} u \psi_n^2 + \dot{Y}_n^2 \bar{\kappa} u \psi_n^2 - \right. \\ \left. - \dot{Y}_n^2 Y_n \left(z_A \psi_n^3 - \frac{\bar{\kappa}_1}{2H} (H^2 + u^2) \psi_n^3 \right) - \dot{Y}_n \frac{\bar{\kappa}_1}{2H} 4 u \dot{u} \psi_n - \dot{Y}_n Y_n \bar{\kappa} 2 \dot{u} \psi_n^2 - Y_n (2 \dot{u}^2 + 2 u \ddot{u}) \frac{\bar{\kappa}_1}{2H} \psi_n + \bar{\kappa} \ddot{u} \right\}, \quad (4-121)$$

und jene des dritten Anteiles, $M_{Ax} - F_{\bar{y}} z_A$, nach Einsetzen der modalen Reihenentwicklung Gl. (4-105) in die spezialisierte Komponente des Momentes M_{Ax} , Gl. (4-110), ergibt

$$M_{Ax} - F_{\bar{y}} z_A = m_f \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \ddot{Y}_n \left[\bar{\kappa} u \phi_n - \frac{\bar{\kappa}_1}{2H} (H^2 + u^2) (\chi_n - 2 z_A \psi_n) - (\bar{\kappa}_2 u^2 + \bar{\kappa}_3 H^2 + z_A^2) \psi_n + z_A \chi_n \right] - \right. \\ \left. - \ddot{Y}_n Y_n \left[\bar{\kappa} u \chi_n + \frac{\bar{\kappa}_1}{2H} (H^2 + u^2) \phi_n - z_A \phi_n \right] \psi_n + \dot{Y}_n \left[\frac{\bar{\kappa}_1}{2H} 4 u \dot{u} z_A - \bar{\kappa}_2 2 u \dot{u} \right] \psi_n \right. \\ \left. + Y_n g \frac{\bar{\kappa}_1}{2H} (H^2 + u^2) \psi_n - \dot{Y}_n^2 z_A \bar{\kappa} u \psi_n^2 - \bar{\kappa} u g - \bar{\kappa}_1 \frac{B}{2} \ddot{u} - \bar{\kappa} \ddot{u} z_A \right\}. \quad (4-122)$$

Berücksichtigt man in einer ersten Näherung nur die linearen Terme der modalen Koordinaten $Y_n(t)$ in den Gln. (4-120) - (4-122), d.h. es wird vorausgesetzt dass die Brücke nur kleine Schwingungen um die Gleichgewichtslage ausführt, und setzt

diese in die Gl. (4-119) entsprechend ein, erhält man nach Integration über die Trägerlänge l unter Beachtung von Gl. (4-54) folgende, auf der rechten Seite sehr wohl gekoppelte, linearisierte Gleichungen für die gesuchten modalen Koordinaten $Y_m(t)$,

$$\begin{aligned}
 \ddot{Y}_m + \omega_m^2 Y_m &= m_f \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \phi_m \left[\ddot{Y}_n (-\phi_n + \bar{\kappa} u \psi_n) + \dot{Y}_n \bar{\kappa} 2 \dot{u} \psi_n + Y_n \bar{\kappa} \ddot{u} \psi_n + \frac{\bar{\kappa}_1}{2H} (2\dot{u}^2 + 2u\ddot{u}) \right] + \right. \\
 &+ \chi_m \left[\ddot{Y}_n \left(-\chi_n + z_A \psi_n - \frac{\bar{\kappa}_1}{2H} (H^2 + u^2) \psi_n \right) - \dot{Y}_n \frac{\bar{\kappa}_1}{2H} 4u\dot{u} \psi_n - Y_n (2\dot{u}^2 + 2u\ddot{u}) \frac{\bar{\kappa}_1}{2H} \psi_n + \bar{\kappa} \ddot{u} \right] + \\
 &+ \psi_m \left[\ddot{Y}_n \left(\bar{\kappa} u \phi_n - \frac{\bar{\kappa}_1}{2H} (H^2 + u^2) (\chi_n - 2z_A \psi_n) - (\bar{\kappa}_2 u^2 + \bar{\kappa}_3 H^2 + z_A^2) \psi_n + z_A \chi_n \right) + \right. \\
 &\left. \left. + \dot{Y}_n \left(\frac{\bar{\kappa}_1}{2H} 4u\dot{u} z_A - \bar{\kappa}_2 2u\dot{u} \right) \psi_n + Y_n g \frac{\bar{\kappa}_1}{2H} (H^2 + u^2) \psi_n - \bar{\kappa} u g - \bar{\kappa}_1 \frac{B}{2} \ddot{u} - \bar{\kappa} \ddot{u} z_A \right] \right\} \Bigg|_{x=\xi}.
 \end{aligned}
 \tag{4-123}$$

Die Eigenfunktionen $\phi_n(x)$, $\chi_n(x)$ und $\psi_n(x)$ bzw. $\phi_m(x)$, $\chi_m(x)$ und $\psi_m(x)$ sind dabei jeweils an der Stelle des Flüssigkeitstilgers, $x = \xi$, wie Partizipationsfaktoren auszuwerten. Bei Installation von n Flüssigkeitstilgern an r verschiedenen Stellen des Brückenträgers ist die Gl. (4-123) an den Stellen $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r$ auszuwerten. Es ist noch anzumerken, dass die vorgenommene Linearisierung in den modalen Koordinaten $Y_n(t)$ des Hauptsystems – Brücke, den möglicherweise schädlichen Effekt der Parameterresonanz der Flüssigkeitsbewegung, erläutert in Kapitel 3, Abschnitt 3.2.5, in keiner Weise schmälert.

Die nichtlineare parametererregte Bewegungsgleichung des Flüssigkeitstilgers, Gl. (4-23), wird nun notwendigerweise in die Hauptkoordinaten $v(x,t)$, $w(x,t)$ und $\vartheta(x,t)$ des raumfesten Bezugssystems der Brücke mit $x = \text{const}$, rücktransformiert, $\vartheta(x,t) \ll 1$,

$$\ddot{u} + \delta_L |\dot{u}| \dot{u} + \omega_A^2 \left[1 - \frac{\ddot{w}}{g} + \frac{\ddot{v}}{g} \vartheta + \frac{z_A}{g} \dot{\vartheta}^2 - \kappa_2 \frac{\dot{\vartheta}^2}{\omega_A^2} \right] u = -\kappa \left[-\ddot{v} - \ddot{w} \vartheta + \ddot{\vartheta} z_A + g \vartheta \right] - \kappa_1 \frac{B}{2} \ddot{\vartheta} \Big|_{x=\xi} . \quad (4-124)$$

Die Stelle $x = \xi$ bezeichnet die zu wählende Position des Flüssigkeitstilgers, wie in Abb. 4.11 illustriert. Einsetzen der modalen Reihenentwicklungen, Gl. (4-105), in die Gl. (4-124) liefert folgende Form der nichtlinearen parametererregten Bewegungsgleichung des Flüssigkeitstilgers

$$\begin{aligned} \ddot{u} + \delta_L |\dot{u}| \dot{u} + \omega_A^2 \left[1 - \frac{1}{g} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \ddot{Y}_n \phi_n - \ddot{Y}_n Y_n \chi_n \psi_n - \dot{Y}_n^2 \left(z_A - \frac{\kappa_2}{\omega_A^2} g \right) \psi_n^2 \right\} \right] u = \\ = - \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \ddot{Y}_n \left(-\kappa \chi_n + \kappa z_A \psi_n + \kappa_1 \frac{B}{2} \psi_n \right) - \ddot{Y}_n Y_n \kappa \phi_n \psi_n + Y_n \kappa g \psi_n \right\} \Big|_{x=\xi} , \end{aligned} \quad (4-125)$$

wobei die in der modalen Koordinate $Y_n(t)$ auftretenden Nichtlinearitäten im Parameter der Steifigkeit sowie in den Erregertermen auf der rechten Seite der Gleichung sehr wohl berücksichtigt werden. Die Eigenfunktionen $\phi_n(x)$, $\chi_n(x)$ und $\psi_n(x)$ sind hier wiederum an der Stelle $x = \xi$, je nach der Position des Flüssigkeitstilgers, auszuwerten.

Die letztlich gesuchte Lösung der ungedämpften Schwingungsantwort der Brücke, modale Koordinaten $Y_m(t)$, und des Flüssigkeitstilgers, Lagekoordinate des freien Flüssigkeitsspiegels $u(t)$, kann nun aus den zwei gekoppelten modalen Gln. (4-123) und (4-125) numerisch gefunden werden.

4.3.6 Berücksichtigung schwacher viskoser Dämpfung (Materialdämpfung) des schlanken Brückenträgers mit Flüssigkeitstilger

Die Gl. (4-123) beschreibt die Schwingung der Brücke mit Flüssigkeitstilger in der m -ten modalen Koordinate $Y_m(t)$, ohne Berücksichtigung der Materialdämpfung des Hauptsystems. Eine entsprechend schwache linear viskose Dämpfung der Brücke kann nun dadurch berücksichtigt werden, dass in Gl. (4-123) der Lehr'sche Dämpfungskoeffizient ζ_m modal angenommen wird, wie in Kapitel 1, Abschnitt 1.1.6 vorweggenommen,

$$\begin{aligned}
 \ddot{Y}_m + 2\zeta_m \omega_m \dot{Y}_m + \omega_m^2 Y_m = m_f \sum_{n=1}^{\infty} & \left\{ \phi_m \left[\ddot{Y}_n (-\phi_n + \bar{\kappa} u \psi_n) + \dot{Y}_n \bar{\kappa} 2\dot{u} \psi_n + Y_n \bar{\kappa} \ddot{u} \psi_n + \frac{\bar{\kappa}_1}{2H} (2\dot{u}^2 + 2u\ddot{u}) \right] + \right. \\
 & + \chi_m \left[\ddot{Y}_n \left(-\chi_n + z_A \psi_n - \frac{\bar{\kappa}_1}{2H} (H^2 + u^2) \psi_n \right) - \dot{Y}_n \frac{\bar{\kappa}_1}{2H} 4u\dot{u} \psi_n - Y_n (2\dot{u}^2 + 2u\ddot{u}) \frac{\bar{\kappa}_1}{2H} \psi_n + \bar{\kappa} \ddot{u} \right] + \\
 & + \psi_m \left[\ddot{Y}_n \left(\bar{\kappa} u \phi_n - \frac{\bar{\kappa}_1}{2H} (H^2 + u^2) (\chi_n - 2z_A \psi_n) - (\bar{\kappa}_2 u^2 + \bar{\kappa}_3 H^2 + z_A^2) \psi_n + z_A \chi_n \right) + \right. \\
 & \left. \left. + \dot{Y}_n \left(\frac{\bar{\kappa}_1}{2H} 4u\dot{u} z_A - \bar{\kappa}_2 2u\dot{u} \right) \psi_n + Y_n g \frac{\bar{\kappa}_1}{2H} (H^2 + u^2) \psi_n - \bar{\kappa} u g - \bar{\kappa}_1 \frac{B}{2} \ddot{u} - \bar{\kappa} \ddot{u} z_A \right] \right\} \bigg|_{x=\xi} .
 \end{aligned}
 \tag{4-126}$$

Die Lösung der nun vollständig gedämpften Schwingungsantwort des gekoppelten Systems Brücke/Flüssigkeitstilger kann wieder aus den Gln. (4-126) und (4-125) numerisch ermittelt werden.

4.3.7 Numerische Lösung der erzwungenen Schwingung des Brückenträgers mittels des Rayleigh-Ritz-Galerkin'schen Näherungsverfahrens

Im folgenden Abschnitt wird das Rayleigh-Ritz-Galerkin'sche Näherungsverfahren zur Lösung des gekoppelten partiellen nichtlinearen Differentialgleichungssystems 4. Ordnung, Gl. (4-58), angewendet. Dieses Verfahren ist z.B. in Ziegler [6, Seite 455] detailliert dargelegt. Die Differentialoperatoren des zu behandelten Problems mit unendlich vielen Freiheitsgraden lauten für den Bereich $0 \leq x \leq l$, entsprechend den Gln. (4-106) - (4-108),

$$D_1\{v, w, \vartheta, u\} = EJ_y w_{xxxx} + m(\ddot{w} + c\ddot{\vartheta}) - (F_{\bar{y}} \vartheta + F_{\bar{z}}) \delta(x - \xi) = 0, \quad (4-127)$$

$$D_2\{v, w, \vartheta, u\} = EJ_z v_{xxxx} + m(\ddot{v} - d\ddot{\vartheta}) - (F_{\bar{y}} - F_{\bar{z}} \vartheta) \delta(x - \xi) = 0, \quad (4-128)$$

$$D_3\{v, w, \vartheta, u\} = EA_{\varphi\varphi} \vartheta_{xxxx} - GJ_T \vartheta_{xx} + m \left[\left(c^2 + d^2 + \frac{I_0}{A} \right) \ddot{\vartheta} + c\ddot{w} - d\ddot{v} \right] - \quad (4-129)$$

$$- (M_{Ax} - F_{\bar{y}} z_A) \delta(x - \xi) = 0,$$

wobei die Kraftkomponenten $F_{\bar{y}}$, $F_{\bar{z}}$ und die Komponente des Momentes M_{Ax} unter der Annahme kleiner Winkeländerungen, $\vartheta(x, t) \ll 1$, des Brückenquerschnittes in den Gln. (4-109) und (4-110) definiert und auf die linke Seite der Gleichung zu schreiben sind. Der Grundgedanke dieses Näherungsverfahrens nach Galerkin besteht nun darin, für die zu berechnenden Größen $w(x, t)$, $v(x, t)$ und $\vartheta(x, t)$ des Brückenträgers einen Ritz'schen Näherungsansatz in der Form,

$$w^*(x, t) = \sum_{j=1}^n W_j(t) \phi_j(x), \quad v^*(x, t) = \sum_{j=1}^n V_j(t) \chi_j(x), \quad \vartheta^*(x, t) = \sum_{j=1}^n \Delta_j(t) \psi_j(x), \quad (4-130)$$

anzusetzen. Darin sind die Koeffizienten $W_j(t)$, $V_j(t)$ und $\Delta_j(t)$ die Unbekannten verallgemeinerten Koordinaten (Lagekoordinaten) des gekoppelten Systems und die

Funktionen $\phi_j(x)$, $\chi_j(x)$ und $\psi_j(x)$ passend gewählte Ansatzfunktionen. In unserem Fall sind dies die bereits in Gl. (4-88) definierten Eigenfunktionen des beidseitig gabelgelagerten Brückenträgers,

$$\phi_j(x) = \chi_j(x) = \psi_j(x) = \sin \lambda_j x, \quad \lambda_j = \frac{j\pi}{l}, \quad j=1, 2, \dots, n. \quad (4-131)$$

Diese erfüllen sowohl die kinematischen als auch die dynamischen Randbedingungen vollständig, wie in Gl. (4-59) angegeben. Um nun die Lagekoordinaten des auf n Freiheitsgrade reduzierten Systems zu bestimmen, werden die Näherungsansätze, Gl. (4-130), in die Differentialoperatoren, Gln. (4-127) - (4-129), eingesetzt. Nach einigen algebraischen Umformungen erhält man die folgenden 3 Gleichungen,

$$\begin{aligned} D_1\{v^*, w^*, \vartheta^*, u\} = EJ_y \left(\frac{j\pi}{l} \right)^4 W_j \sin \lambda_j x + m(\ddot{W}_j + c\ddot{\Delta}_j) \sin \lambda_j x - m_f \left\{ \frac{\bar{K}_1}{2H} (2\dot{u}^2 + 2u\ddot{u}) + [-\ddot{W}_j + \right. \\ \left. + \bar{K}(\ddot{u}\Delta_j + 2\dot{u}\dot{\Delta}_j + \ddot{u}\Delta_j)] \sin \lambda_j x + \left[\left(z_A - \frac{\bar{K}_1}{2H} (H^2 + u^2) \right) \ddot{\Delta}_j \Delta_j - \frac{\bar{K}_1}{2H} 4u\dot{u}\dot{\Delta}_j \Delta_j + \right. \right. \\ \left. \left. + \left(z_A - \frac{\bar{K}_1}{2H} (H^2 + u^2) \right) \dot{\Delta}_j^2 \right] \sin^2 \lambda_j x - \bar{K}u\dot{\Delta}_j^2 \Delta_j \sin^3 \lambda_j x \right\} \delta(x-\xi) = p_w^* \neq 0, \end{aligned} \quad (4-132)$$

$$\begin{aligned} D_2\{v^*, w^*, \vartheta^*, u\} = EJ_z \left(\frac{j\pi}{l} \right)^4 V_j \sin \lambda_j x + m(\ddot{V}_j - d\ddot{\Delta}_j) \sin \lambda_j x - m_f \left\{ \bar{K}\ddot{u} + \left[-\frac{\bar{K}_1}{2H} (4u\dot{u}\dot{\Delta}_j + 2\dot{u}^2\Delta_j + \right. \right. \\ \left. \left. + 2u\ddot{u}\Delta_j) + \left(z_A - \frac{\bar{K}_1}{2H} (H^2 + u^2) \right) \ddot{\Delta}_j - \ddot{V}_j \right] \sin \lambda_j x + [-\bar{K}(2\dot{u}\dot{\Delta}_j\Delta_j + u\ddot{\Delta}_j\Delta_j - u\dot{\Delta}_j^2)] \sin^2 \lambda_j x + \right. \\ \left. + \left(-z_A + \frac{\bar{K}_1}{2H} (H^2 + u^2) \right) \dot{\Delta}_j^2 \Delta_j \sin^3 \lambda_j x \right\} \delta(x-\xi) = p_v^* \neq 0, \end{aligned} \quad (4-133)$$

$$\begin{aligned}
D_3\{v^*, w^*, \vartheta^*, u\} = & \left[\left(\frac{j\pi}{l} \right)^2 \left[EA_{\varphi\varphi} \left(\frac{j\pi}{l} \right)^2 - GJ_T \right] \Delta_j + m \left[\left(c^2 + d^2 + \frac{I_0}{A} \right) \ddot{\Delta}_j + c\ddot{W}_j - d\ddot{V}_j \right] \right] \sin \lambda_j x - \\
& - m_f \left\{ -\bar{K}(z_A \ddot{u} + gu) - \bar{K}_1 \frac{B}{2} \ddot{u} + \left[\bar{K}u\ddot{W}_j + \frac{\bar{K}_1}{2H} (H^2 + u^2) (-\ddot{V}_j + 2z_A \ddot{\Delta}_j + g\Delta_j) + z_A \ddot{V}_j - \right. \right. \\
& \left. \left. - \bar{K}_2 (u^2 \ddot{\Delta}_j + 2u\dot{u}\dot{\Delta}_j) - (\bar{K}_3 H^2 - z_A^2) \ddot{\Delta}_j + \frac{\bar{K}_1}{2H} 4z_A u\dot{u}\dot{\Delta}_j \right] \sin \lambda_j x + [-\ddot{V}_j \Delta_j \bar{K}u - \right. \\
& \left. \left. - 2z_A \dot{\Delta}_j^2 \bar{K}u + \left(z_A - \frac{\bar{K}_1}{2H} (H^2 + u^2) \right) \ddot{W}_j \Delta_j \right] \sin^2 \lambda_j x \right\} \delta(x - \xi) = m_\theta^* \neq 0,
\end{aligned}
\tag{4-134}$$

wo die verallgemeinerten Fehlerkräfte p_w^* , p_v^* und m_θ^* als fiktive Feldbelastung des gekoppelten Systems gedeutet werden können. Da in unserem Fall der gewählte Ritz'sche Näherungsansatz, Gl. (4-130), sowohl die kinematischen als auch die dynamischen Randbedingungen erfüllt, genügt es zu verlangen, dass diese fiktiven Kräfte ein Gleichgewichtssystem bilden. Das Prinzip der virtuellen Arbeit (PVA) liefert dann in Verallgemeinerung der Gl. (11.7) in Ziegler [18, Seite 594],

$$\int_{x=0}^l [p_w^* \delta w^* + p_v^* \delta v^* + m_\theta^* \delta \vartheta^*] dx = 0, \tag{4-135}$$

wobei die Variationen der Lagekoordinaten aus den Ritz'schen Ansätzen, Gl. (4-130), folgen,

$$\delta w^*(x) = \sum_{j=1}^n \delta W_j \phi_j(x), \quad \delta v^*(x) = \sum_{j=1}^n \delta V_j \chi_j(x), \quad \delta \vartheta^*(x) = \sum_{j=1}^n \delta \Delta_j \psi_j(x). \tag{4-136}$$

Die Unabhängigkeit der Variation der δW_j , δV_j und $\delta \Delta_j$ liefert nun die Galerkin'sche Vorschrift (3n nichtlineare Gleichungen zur Bestimmung der verallgemeinerten Unbekannten W_j , V_j und Δ_j der Brücke),

$$\int_{x=0}^l p_w^* \phi_j dx = 0, \quad \int_{x=0}^l p_v^* \chi_j dx = 0, \quad \int_{x=0}^l m_\theta^* \psi_j dx = 0, \quad j=1, 2, \dots, n. \quad (4-137)$$

Die Minimierung der fehlerhaften Belastung wird durch die Orthogonalitätsbeziehung in Gl. (4-137) erreicht. Auswerten der einzelnen Integrale, Gl. (4-137), unter Verwendung der Gln. (4-131) - (4-134) mit $m(x) = \text{const}$, liefert das folgende gewöhnliche nichtlineare Differentialgleichungssystem,

$$\begin{aligned} \frac{m_T}{2} (\ddot{W}_j + c\ddot{\Delta}_j) + \frac{j^4 \pi^4 EJ_y}{2 l^3} W_j - m_f \left\{ \frac{\bar{K}_1}{2H} (2\dot{u}^2 + 2u\ddot{u}) \sin \lambda_j \xi + \left[-\ddot{W}_j + \right. \right. \\ \left. \left. + \bar{K} (\ddot{u} \Delta_j + 2\dot{u} \dot{\Delta}_j + \ddot{u} \Delta_j) \right] \sin^2 \lambda_j \xi + \left[\left(z_A - \frac{\bar{K}_1}{2H} (H^2 + u^2) \right) \ddot{\Delta}_j \Delta_j - \frac{\bar{K}_1}{2H} 4u\dot{u} \dot{\Delta}_j \Delta_j + \right. \right. \\ \left. \left. + \left(z_A - \frac{\bar{K}_1}{2H} (H^2 + u^2) \right) \dot{\Delta}_j^2 \right] \sin^3 \lambda_j \xi - \bar{K} u \dot{\Delta}_j^2 \Delta_j \sin^4 \lambda_j \xi \right\} = 0, \end{aligned} \quad (4-138)$$

$$\begin{aligned} \frac{m_T}{2} (\ddot{V}_j - d\ddot{\Delta}_j) + \frac{j^4 \pi^4 EJ_z}{2 l^3} V_j - m_f \left\{ \bar{K} \ddot{u} \sin \lambda_j \xi + \left[-\frac{\bar{K}_1}{2H} (4u\dot{u} \dot{\Delta}_j + 2\dot{u}^2 \Delta_j + 2u\ddot{u} \Delta_j) + \right. \right. \\ \left. \left. + \left(z_A - \frac{\bar{K}_1}{2H} (H^2 + u^2) \right) \ddot{\Delta}_j - \ddot{V}_j \right] \sin^2 \lambda_j \xi + \left[-\bar{K} (2\dot{u} \dot{\Delta}_j \Delta_j + u \ddot{\Delta}_j \Delta_j - u \dot{\Delta}_j^2) \right] \sin^3 \lambda_j \xi + \right. \\ \left. + \left[-z_A + \frac{\bar{K}_1}{2H} (H^2 + u^2) \right] \dot{\Delta}_j^2 \Delta_j \sin^4 \lambda_j \xi \right\} = 0, \end{aligned} \quad (4-139)$$

$$\begin{aligned}
& \frac{m_T}{2} \left[\left(c^2 + d^2 + \frac{I_0}{A} \right) \ddot{\Delta}_j + c \ddot{W}_j + d \ddot{V}_j \right] + \frac{1}{2} \frac{j^2 \pi^2}{l} \left[\left(\frac{j \pi}{l} \right)^2 EA_{\varphi\varphi} \Delta_j + GJ_T \Delta_j \right] - \\
& - m_f \left\{ \left[-\bar{\kappa} (z_A \ddot{u} + g u) - \bar{\kappa}_1 \frac{B}{2} \ddot{u} \right] \sin \lambda_j \xi + \left[\bar{\kappa} u \ddot{W}_j + \frac{\bar{\kappa}_1}{2H} (H^2 + u^2) (-\ddot{V}_j + 2z_A \ddot{\Delta}_j + g \Delta_j) + \right. \right. \\
& + z_A \ddot{V}_j - \bar{\kappa}_2 (u^2 \ddot{\Delta}_j + 2u \dot{u} \dot{\Delta}_j) - (\bar{\kappa}_3 H^2 - z_A^2) \ddot{\Delta}_j + \frac{\bar{\kappa}_1}{2H} 4z_A u \dot{u} \dot{\Delta}_j \left. \right] \sin^2 \lambda_j \xi + \\
& + \left[-\ddot{V}_j \Delta_j \bar{\kappa} u + \left(z_A - \frac{\bar{\kappa}_1}{2H} (H^2 + u^2) \right) \ddot{W}_j \Delta_j \right] \sin^3 \lambda_j \xi \left. \right\} = 0 .
\end{aligned} \tag{4-140}$$

wo $m_T = \rho A l$ die gesamte Trägermasse definiert. Zur vollständigen Lösung des gekoppelten Systems Brücke/Flüssigkeitstilger muss noch die für kleine Winkeländerungen, $\vartheta(x,t) \ll 1$, nichtlineare parametererregte Bewegungsgleichung des Flüssigkeitstilgers, Gl. (4-124), verwendet werden. Nach Einsetzen des Ritz'schen Näherungsansatzes unter Berücksichtigung von $x = \xi$ erhält man folgende gewöhnliche Differentialgleichung,

$$\begin{aligned}
& \ddot{u} + \delta_L |\dot{u}| \dot{u} + \omega_A^2 u + \left[-\frac{\ddot{W}_j}{g} \omega_A^2 u - \kappa \ddot{V}_j + \kappa z_A \ddot{\Delta}_j + \kappa g \Delta_j + \kappa_1 \frac{B}{2} \ddot{\Delta}_j \right] \sin \lambda_j \xi + \\
& + \left[\frac{\ddot{V}_j}{g} \omega_A^2 u \Delta_j + \frac{z_A}{g} u \dot{\Delta}_j^2 - \kappa_2 u \dot{\Delta}_j^2 - \kappa \ddot{W}_j \Delta_j \right] \sin^2 \lambda_j \xi = 0 .
\end{aligned} \tag{4-141}$$

Die mit Hilfe des Rayleigh-Ritz-Galerkin'schen Näherungsverfahrens erhaltenen gekoppelten nichtlinearen gewöhnlichen Differentialgleichungen, Gln. (4-138) - (4-141), können nun, durch Anwendung eines geeigneten numerischen Integrationsalgorithmus, z.B. Runge-Kutta Verfahren, angegeben z.B. in Bronstein [17], näherungsweise gelöst werden. Von großem Vorteil erweist sich wiederum der Einsatz des äußerst leistungsfähigen Computerprogramms „Mathematica, Version

4.1.2" wo das vorgenannte Integrationsverfahren als Tool standardmäßig implementiert ist.

4.4 Numerische Simulation des gekoppelten Systems Brücke/Flüssigkeitstilger

Die numerische Simulation des gekoppelten Systems Brücke/Flüssigkeitstilger wird in Abstimmung mit der im Abschnitt 4.5 dargelegten experimentellen Untersuchung durchgeführt. Als mathematisches Modell wird ein Brückenquerschnitt (Gesamtmasse M) mit 3 Freiheitsgraden, gekoppelt mit einem Flüssigkeitstilger, an einer diskreten Stelle der Längsachse x betrachtet. Die Verschiebungen in y - und z -Richtung werden mit $v(t)$ bzw. $w(t)$ und die Verdrehung wird mit $\vartheta(t)$ bezeichnet. Der Schubmittelpunkt C_s , der auch gleichzeitig Bezugspunkt für die Lagekoordinaten ist, liegt auf der Querschnittssymmetrieachse z . Die Lage des Massenmittelpunktes C_M ist wegen der unsymmetrischen statischen Belastung der Brücke allgemein gewählt und durch die Abstände c bzw. d in y - bzw. z -Richtung festgelegt.

Die horizontale k_v , vertikale k_w und die Torsionssteifigkeit k_θ des Brückenquerschnittes ist über linear elastische Federn, deren Angriffspunkt sich im Steifigkeitszentrum (=Schubmittelpunkt C_s) befindet, gegeben. Zum Zeitpunkt $t=0$ wird das Hauptsystem gleichzeitig durch zwei dynamische Kräfte $F_y(t)$ und $F_z(t)$ zu erzwungenen Schwingungen angeregt. Diese wirken ebenfalls im Steifigkeitszentrum C_s auf den Querschnitt ein. In der Abb. 4.13 ist das mechanische Modell des diskreten Brückenquerschnittes mit Flüssigkeitstilger dargestellt.

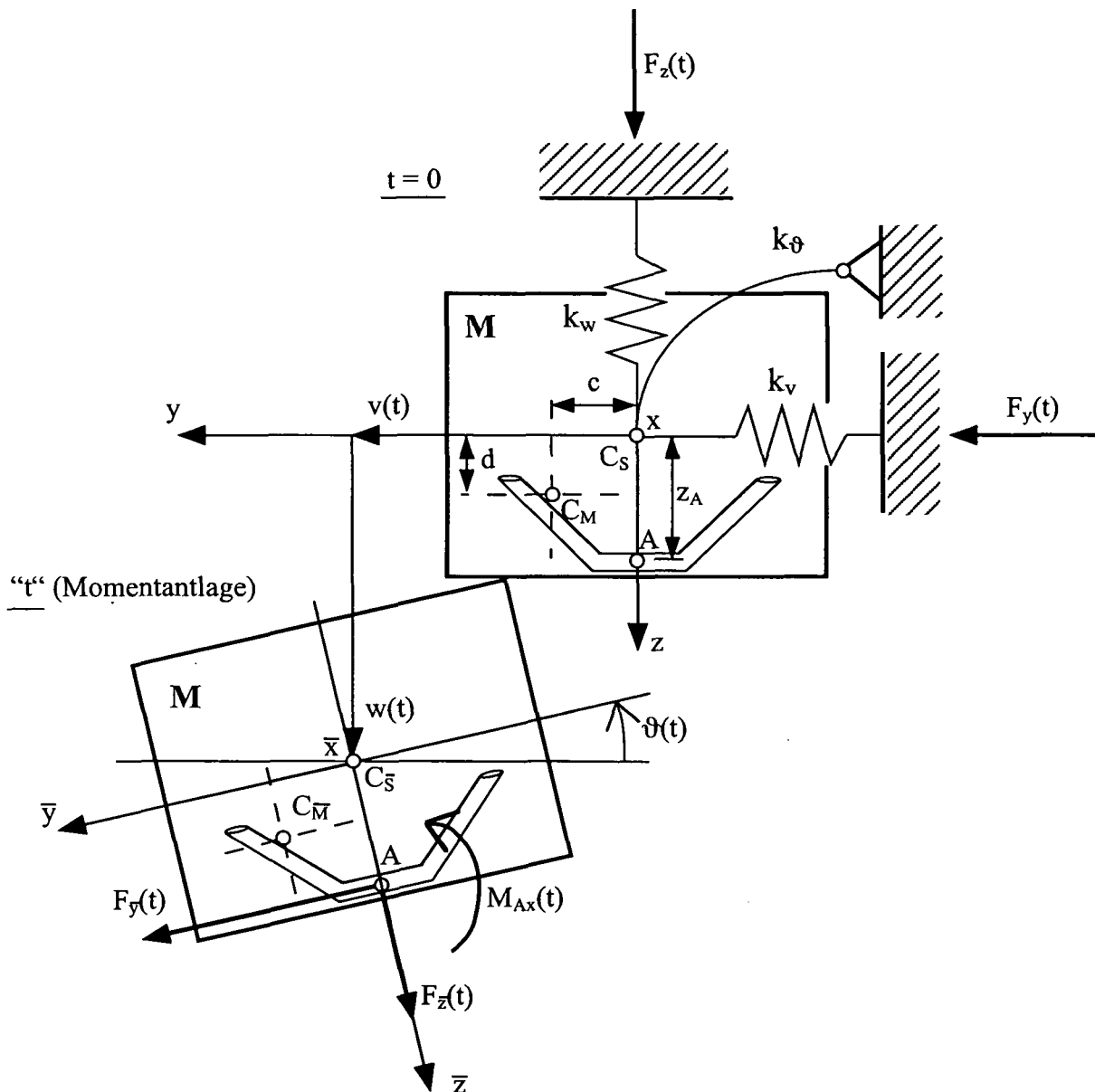


Abb. 4.13: Mechanisches Modell des diskreten Brückenquerschnittes mit Flüssigkeitsstilger; Schnittstelle x ; Verformungsgrößen: $v(t)$, $w(t)$ und $\vartheta(t)$; Gleichgewichtslage des Systems $t = 0$; Momentanlage des Systems " t "; Federsteifigkeiten k_v , k_w und k_θ ; Erregerkräfte $F_y(t)$, $F_z(t)$; Kraftkomponenten $F_{\bar{y}}$, $F_{\bar{z}}$ und Moment M_{Ax} ; Brückenmasse M

Der Flüssigkeitsstilger (Flüssigkeitsmasse m_f , Lagekoordinate $u(t)$) ist im Abstand z_A vom Steifigkeitszentrum an das Hauptsystem starr und symmetrisch angeschlossen. Nach Erregung der Brücke durch $F_y(t)$ und $F_z(t)$ setzt eine Bewegung der Flüssigkeitsmasse im Tilger ein, wodurch die zeitlich veränderlichen Reaktionskräfte

$F_{\bar{y}}(t)$, $F_{\bar{z}}(t)$ und das Reaktionsmoment $M_{Ax}(t)$ geweckt werden. Die tote Masse des Tilgers $m_T = m - m_f$ wird wiederum der bewegten Brückenmasse M zugeschlagen. Die nichtlinearen Bewegungsgleichungen des diskreten Brückenmodells erhält man durch die Komponenten des Impulssatzes in z - bzw. y - Richtung und durch Anwendung des Drallsatzes um die Längsachse x , wie bereits in den Gln. (4-55) und (4-56) ausgeführt,

$$\begin{aligned}\ddot{v} - d\ddot{\vartheta} + 2\zeta_v\Omega_v\dot{v} + \Omega_v^2v &= \frac{1}{M} (F_y + F_{\bar{y}} - F_{\bar{z}}\vartheta) , \\ \ddot{w} + c\ddot{\vartheta} + 2\zeta_w\Omega_w\dot{w} + \Omega_w^2w &= \frac{1}{M} (F_z + F_{\bar{y}}\vartheta + F_{\bar{z}}) , \\ \ddot{\vartheta} + \frac{M}{\bar{I}} (c\ddot{w} - d\ddot{v}) + 2\zeta_w\Omega_w\dot{\vartheta} + \Omega_{\vartheta}^2\vartheta &= \frac{1}{\bar{I}} (M_{Ax} - F_{\bar{y}}z_A) , \quad \bar{I} = M \left(c^2 + d^2 + \frac{I_{C_M}}{M} \right) ,\end{aligned}\tag{4-142}$$

wobei \bar{I} das Massenträgheitsmoment um den Schubmittelpunkt und Ω_v , Ω_w und Ω_{ϑ} die entkoppelten Eigenkreisfrequenzen des Hauptsystems bezeichnen,

$$\Omega_v = \sqrt{\frac{k_v}{M}} , \quad \Omega_w = \sqrt{\frac{k_w}{M}} , \quad \Omega_{\vartheta} = \sqrt{\frac{k_{\vartheta}}{\bar{I}}} .\tag{4-143}$$

Viskose Dämpfung (vorwiegend als Ersatz der Materialdämpfung) wird in Gl. (4-142) durch Einführen der dimensionslosen Dämpfungskonstanten ζ_v , ζ_w und ζ_{ϑ} berücksichtigt,

$$\zeta_v = \frac{r_v}{2M\Omega_v} , \quad \zeta_w = \frac{r_w}{2M\Omega_w} , \quad \zeta_{\vartheta} = \frac{r_{\vartheta}}{2M\Omega_{\vartheta}} .\tag{4-144}$$

Die aus der Bewegung des Flüssigkeitstilgers resultierenden nichtlinearen Kraftkomponenten $F_{\bar{y}}$, $F_{\bar{z}}$ und das resultierende Moment M_{Ax} sind in den Gln. (4-109) und (4-110) definiert. Die noch ausstehende nichtlineare parametererregte

Bewegungsgleichung des Flüssigkeitstilgers, Lagekoordinate $u(t)$, ist mit Gl. (4-124) gegeben. In Übereinstimmung mit dem Experiment, erläutert im Abschnitt 4.5, werden nun die Parameter des Hauptsystems wie folgt festgelegt,

$$M = 1.57 \text{ kg} , \quad k_v = 57.3 \text{ N/m} , \quad \zeta_v = 0.04 ,$$

$$k_w = 174.8 \text{ N/m} , \quad \zeta_w = 0.041 ,$$

$$\bar{I} = 0.0375 \text{ kg m}^2 , \quad k_\vartheta = 5.80 \text{ Nm} , \quad \zeta_\vartheta = 0.039 ,$$

$$c = 4 \times 10^{-3} \text{ m} , \quad d = 1.85 \times 10^{-3} \text{ m} , \quad z_A = 7.5 \times 10^{-3} \text{ m} .$$

Die ungedämpften Eigenkreisfrequenzen ω_1 , ω_2 und ω_3 des gekoppelten homogenen Differentialgleichungssystems, Gl. (4-142), können nun aus der Frequenzgleichung bestimmt werden, wie in Kapitel 1, Abschnitt 1.1.1 dargelegt,

$$\omega_1 = 6.025 \text{ rad/s} , \quad f_1 = 0.959 \text{ Hz} ,$$

$$\omega_2 = 10.54 \text{ rad/s} , \quad f_2 = 1.678 \text{ Hz} ,$$

$$\omega_3 = 12.98 \text{ rad/s} , \quad f_3 = 2.070 \text{ Hz} ,$$

wobei die Schwingungen des Systems in der Grundfrequenz ω_1 dominierend horizontal, in der ersten Oberfrequenz ω_2 dominierend vertikal und in der zweiten Oberfrequenz ω_3 dominierend rotatorisch ausgeführt werden. Die oben angeführten Steifigkeiten des Brückenquerschnittes wurden durch Anbringen einer definierten statischen Einzellast in horizontaler und vertikaler Richtung, $F_{y,st} = F_{z,st} = 1 \text{ N}$, bzw. eines definierten statischen Einzelmomentes, $M_{\vartheta,st} = 0.15 \text{ Nm}$, durch Messen des zugehörigen Verschiebungsweges, $v_{st} = 17.46 \text{ mm}$ und $w_{st} = 5.72 \text{ mm}$, bzw. Drehwinkels, $\vartheta_{st} = 2.6 \times 10^{-2} \text{ rad}$, experimentell ermittelt. Mit Hilfe von mehreren aufgezeichneten Ausschwingversuchen konnten weiters die oben angeführten Lehr'schen Dämpfungsparameter über das logarithmische Dekrement rückgerechnet

werden, wie in der experimentelle Untersuchungen im folgenden Abschnitt 4.5 gezeigt. Die nachstehend angeführten Parameter des offenen Flüssigkeitstilgers werden wiederum in Übereinstimmung mit dem Experiment festgelegt,

$$\beta = \pi / 4 , \quad A_H = A_B = 2.99 \times 10^{-4} \text{ m}^2 , \quad B = 0.10 \text{ m} , \quad H = 0.15 \text{ m} , \quad L_{eff} = 0.40 \text{ m} ,$$

$$m_f = 0.12 \text{ kg} , \quad \omega_A \rightarrow \text{optimal} , \quad \zeta_A \rightarrow \text{optimal} ,$$

wobei die zu optimierenden Werte für ω_A bzw. ζ_A aus einer, bereits in Kapitel 3, Abschnitt 3.3.1, gezeigten Analogie zwischen Flüssigkeitstilger und konventionellem Schwingungstilger ermittelt werden. Die optimalen konjugierten Entwurfparameter sind in Kapitel 1, Tabelle 1.1 (Fall 1), wie folgt gelistet,

$$\delta^* = \frac{\omega_A^*}{\Omega_S^*} = \frac{1}{1 + \mu^*} , \quad \zeta_A^* = \sqrt{\frac{3\mu^*}{8(1 + \mu^*)}} . \quad (4-145)$$

Wegen $A_H = A_B$ ist $\kappa = \bar{\kappa} = (B + 2H \cos \beta) / L_{eff} = 0.78$, Gl. (3-17), und μ^* folgt aus Gl. (3-58),

$$\mu^* = \frac{\kappa^2 \mu}{1 + \mu(1 - \kappa^2)} , \quad \mu = \frac{m_f}{M} = 0.076 . \quad (4-146)$$

Nach Auswerten der Gl. (4-146), unter Verwendung der gewählten Modellparameter und Einsetzen des Wertes für μ^* in die Gl. (4-145) ergeben sich die optimalen Entwurfparameter des konjugierten konventionellen mechanischen TMD-Problems zu,

$$\delta_{opt}^* = 0.957 , \quad \zeta_{opt}^* = 0.127 . \quad (4-147)$$

Die optimalen Größen für das Frequenzverhältnis $\delta = \omega_A / \Omega_s$ bzw. des äquivalenten linearisierten Dämpfungskoeffizienten ζ_A des Flüssigkeitstilgers erhält man schließlich aus den Gln. (3-54) und (3-58),

$$\delta_{opt} = \frac{\delta_{opt}^*}{\sqrt{1 + \mu(1 - \kappa^2)}} = 0.943, \quad \zeta_A = \zeta_{opt}^* = 0.127. \quad (4-148)$$

Im Zuge der folgenden numerischen Simulation soll die unangenehme horizontale Anregung des Brückenquerschnittes, verursacht z.B. durch Fußgängergruppen, getilgt werden. Die Abstimmung des Flüssigkeitstilgers erfolgt daher auf die Grundfrequenz ω_1 , deren zugehörige Eigenform dominierend horizontal gerichtet ist. Aus dem optimalen Frequenzverhältnis lässt sich nun der optimale Wert für die Eigenkreisfrequenz ω_A des Flüssigkeitstilgers berechnen

$$\omega_A = \delta_{opt} \omega_1 = 5.68 \text{ rad/s}, \quad f_A = \frac{\omega_A}{2\pi} = 0.904 \text{ Hz}. \quad (4-149)$$

Der hier dargelegte Optimierungsprozess gilt prinzipiell nur für den Fall eines Hauptsystems mit einem Freiheitsgrad und harmonischer Krafterregung, wie bereits in Kapitel 1, Abschnitt 1.3 erwähnt wurde. Besteht das Hauptsystem nun aber aus mehreren Freiheitsgraden und/oder erfolgt die Krafterregung durch periodische Funktionen, so ist möglicherweise eine Nachoptimierung durchzuführen. Eine sehr effiziente Nachoptimierungsmethode wurde in Kapitel 3, Abschnitt 3.6, angegeben. Im Falle des hier dargelegten Brückenmodells wird sich herausstellen, dass ein Nachjustieren der Optimierung nicht durchgeführt werden muss. Der Grund hierfür liegt in der Aktivierung von lediglich drei Eigenfrequenzen (Grundfrequenzen der Biege- und Drehschwingung) mit ausgeprägten Schwingungsformen in die jeweilige horizontale, vertikale und rotatorische Richtung, d.h. es liegt eine schwache Kopplung vor.

Es ist noch anzumerken, dass in der Bewegungsgleichung des Flüssigkeitstilgers, Gl. (4-124), die nichtlineare Turbulenzdämpfung $\delta_L |\dot{u}| \dot{u}$ durch den äquivalenten linearen Ausdruck $2\zeta_A \omega_A \dot{u}$ ersetzt wird, wie in Kapitel 3, Abschnitt 3.2.2

ausgeführt. Die viskose Linearisierung von $\delta_L |\dot{u}| \dot{u}$ in der numerischen Simulation ist jedoch nur dann zulässig, wenn die hinreichende Stabilitätsbedingung zur sicheren Vermeidung von Parameterresonanz, definiert in Gl. (3-48), erfüllt ist

$$\zeta_A > \zeta_{A,0} = \frac{2 v_{t0}}{L_{eff}} \sin \beta . \quad (4-150)$$

Einsetzen der vorweggenommen Parameter des offenen Flüssigkeitstilgers [Seite 191] sowie $v_{t0} = 10 \text{ mm}$ in Übereinstimmung mit dem Experiment ergibt,

$$\zeta_A = 0.127 > \zeta_{A,0} = 0.035 . \quad (4-151)$$

Man erkennt, dass die vorhandene optimale Dämpfung ζ_A des Flüssigkeitstilgers weit über dem erforderlichen Wert liegt und daher die Anfachung parametererregter Schwingungen auf jeden Fall verhindert, (erst ab einer kritischen vertikalen Amplitude von $v_{t0}^K \approx 4 v_{t0}$ würde dann Parameterresonanz entstehen).

Da nun alle Parameter des gekoppelten Systems Brücke/Flüssigkeitstilger bekannt sind, können sowohl die nichtlinearen gekoppelten Bewegungsgleichungen des Hauptsystems, Gl. (4-142), als auch die nichtlineare, parametererregte Bewegungsgleichung des Flüssigkeitstilgers, Gl. (4-124), numerisch gelöst werden. Die gesamten numerischen Studien werden mit Hilfe des Computerprogramms „Matlab, Version 6.5“ in Kombination mit dem sehr leistungsfähigen Zusatzmodul „Simulink“ durchgeführt. Nach Festlegung der Simulationsstart- und Endzeit, $t=0$ und $t=60 \text{ s}$, und dem geeigneten numerischen Integrationsverfahren mit variablen Zeitinkrementen, *ode45*, (basiert auf dem Runge-Kutta Verfahren, angegeben z.B. in Bronstein [17]), wird die Lösung inkrementell für jeden einzelnen Zeitschritt berechnet und anschließend als eine zeitliche Verlaufsfunktion graphisch ausgegeben. Die Abb. 4.14 zeigt das zugehörige Simulink-Blockdiagramm welches zur numerischen Lösung der gekoppelten Bewegungsgleichungen des Hauptsystems und des Flüssigkeitstilgers programmiert wurde. Insbesondere ist darauf hinzuweisen, dass der zeitliche Verlauf des Schwingungsverhaltens des

Hauptsystems mit und ohne Flüssigkeitstilger im eingeschwungenen Zustand betrachtet wird, (Zeitfenster von $t = 20 - 60\text{ s}$).

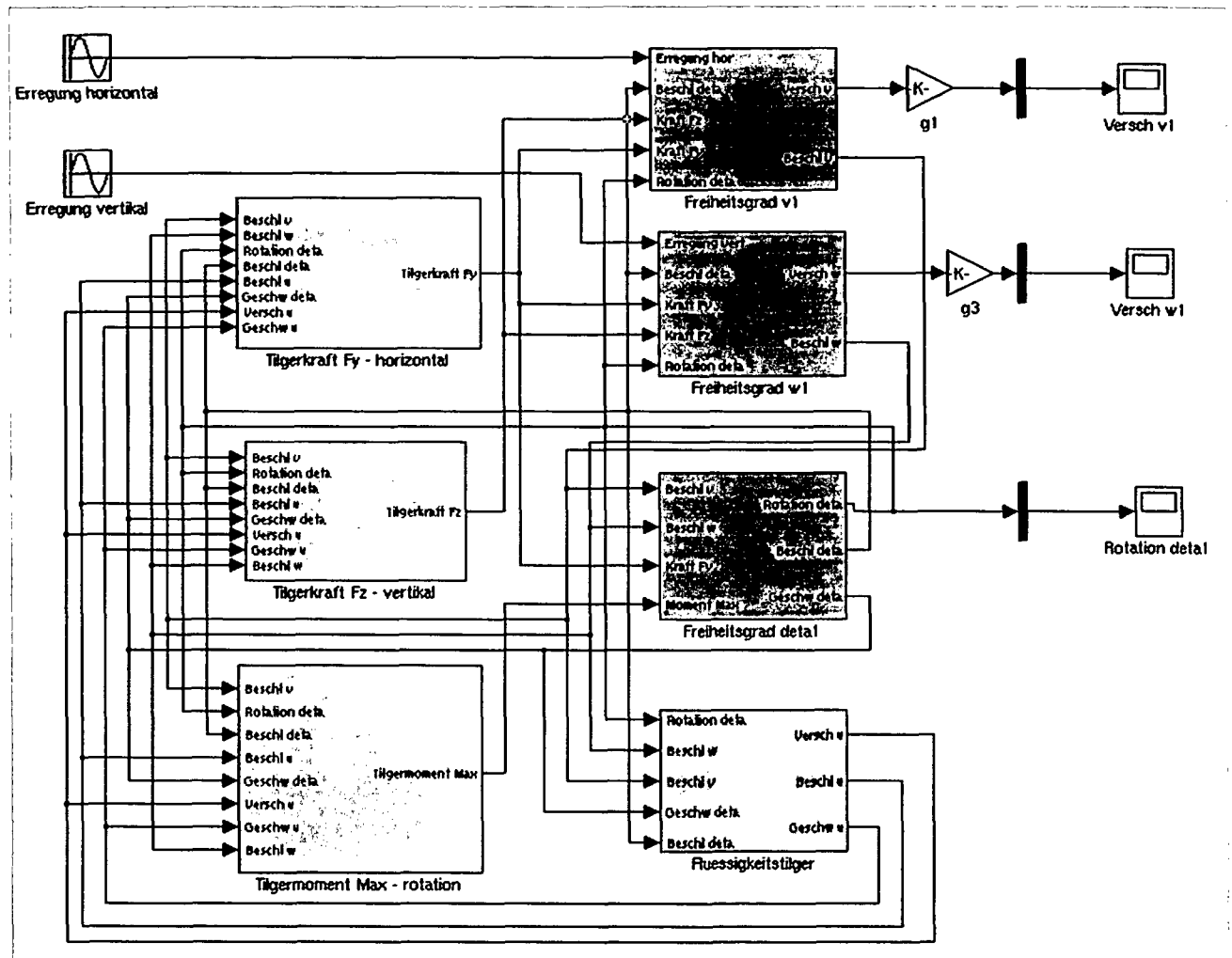


Abb. 4.14: Simulink-Blockdiagramm zur numerischen Lösung der gekoppelten nichtlinearen, parametererregten Bewegungsgleichungen des Hauptsystems und des Flüssigkeitstilgers

4.4.1 Horizontale und vertikale harmonische Krafterregung

Die Krafterregung des gekoppelten Systems Brücke/Flüssigkeitstilger erfolgt nun durch eine einzige zeitlich harmonische Funktion in horizontaler $F_y(t) = F_y \sin 2\pi f_y t$ und vertikaler $F_z(t) = F_z \sin 2\pi f_z t$ Richtung. In einem ersten Schritt wird das System nur mit $F_y(t)$ horizontal bzw. $F_z(t)$ vertikal erregt und in einem zweiten Schritt erfolgt eine Kombination der beiden Erregerkräfte. Das Ziel der kombinierten Anregung ist eine Nachbildung der dynamischen Kontaktkräfte die auf Fußgängerbrücken, zufolge sich bewogender Personengruppen, hervorgerufen werden. Eine ausführliche Darstellung dieses Bewegungsprozesses findet sich in Kapitel 5.

4.4.1.1 Horizontale Anregung durch eine zeitlich harmonische Funktion

Das aus den Gln. (4-142) und (4-124) ermittelte numerische Ergebnis des zeitlichen Schwingungsverhaltens des Hauptsystems mit und ohne Flüssigkeitstilger im eingeschwungenen Zustand, Verschiebung $v(t)$, bei horizontaler Erregung in der Nähe der ersten Eigenfrequenz, $f_y = 0.95 \text{ Hz}$, ist in der Abb. 4.15 dargestellt.

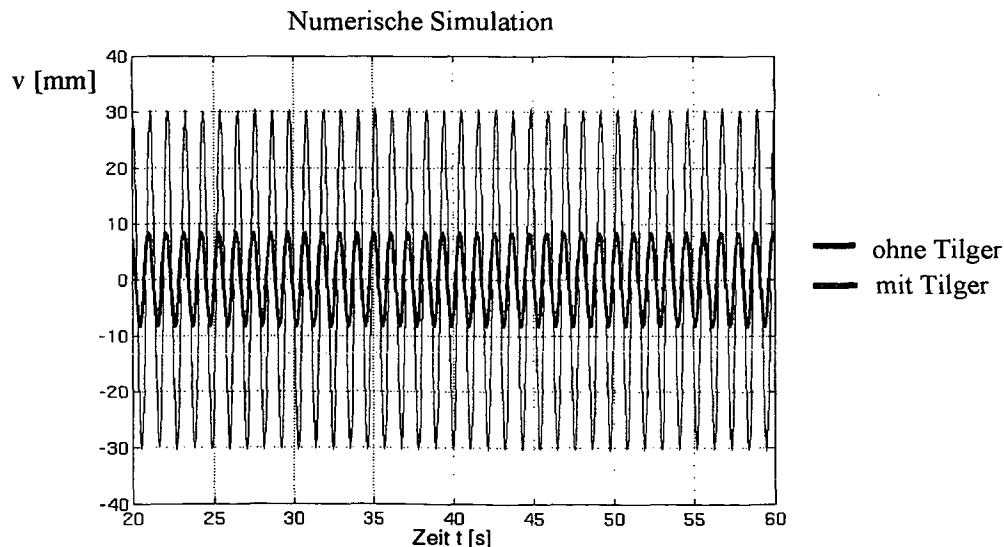


Abb. 4.15: Numerisches Ergebnis des zeitlichen Schwingungsverhaltens des Hauptsystems mit und ohne Flüssigkeitstilger im eingeschwungenen Zustand, Verschiebung $v(t)$; horizontale Anregung mit der Kraftamplitude $F_y = 0.14 \text{ N}$; Erregerfrequenz $f_y = 0.95 \text{ Hz}$; lineares Dämpfermodell

$$\xi_A = 0.127$$

Die horizontale Anregung erfolgt dabei mit einer Kraftamplitude von $F_y = 0.14 \text{ N}$, $F_y / Mg = 8.9 \times 10^{-3}$. Der Flüssigkeitstilger reduziert die horizontale stationäre Schwingungsantwort der Brücke von 30 auf 8 mm, d.h. um fast 75%. Die Abb. 4.16 zeigt weiters den Verlauf des numerisch errechneten Dynamischen Vergrößerungsfaktors (DVF) des Hauptsystems, Verschiebung $v(t)$, mit und ohne Wirkung des Flüssigkeitstilgers.

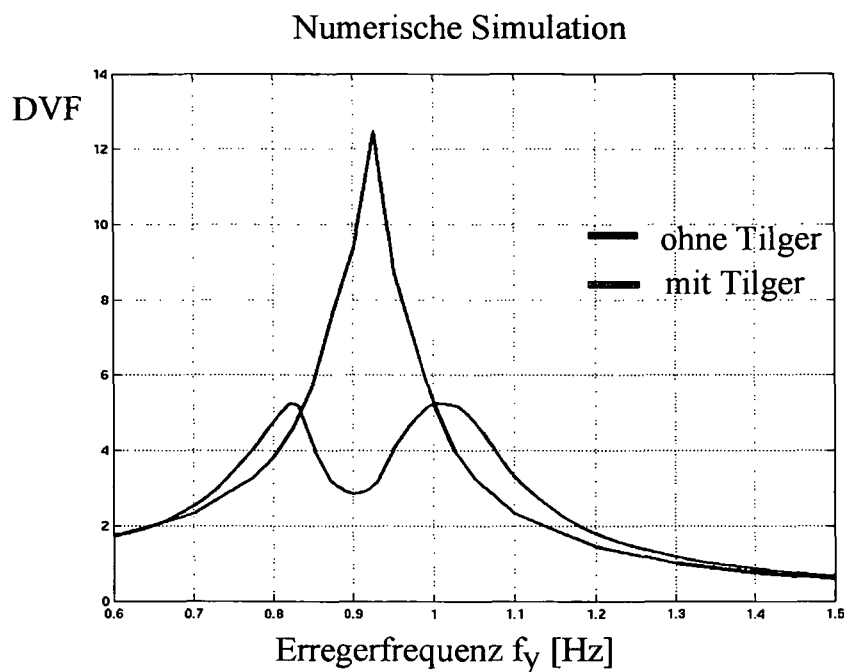


Abb. 4.16: Numerisches Ergebnis des dynamischen Vergrößerungsfaktors (DVF) des Hauptsystems mit und ohne Flüssigkeitstilger, Verschiebung $v(t)$; horizontale Kraftanregung; Erregerfrequenz f_y ; lineares Dämpfermodell $\zeta_A = 0.127$

Die Ermittlung des DVF für das nichtlineare parametererregte gekoppelte System erfolgt hier an diskreten Stellen der Erregerfrequenz $f_{y,i}$. Dabei wird die Verschiebung $v(t)$ für ein Zeitintervall von $t = 0 - 60 \text{ s}$ aus den Gln. (4-142) und (4-124) numerisch berechnet und die maximal auftretende Amplitude $v_{\max,i}$ ermittelt. Der DVF für die betrachtete diskrete Frequenzstelle $f_{y,i}$ ergibt sich dann aus

$$DVF_i = \left| \frac{v_{\max,i}}{v_{st}} \right|, \quad (4-152)$$

wobei die statische Auslenkung durch $v_{st} = F_y / k_y = 2.4 \text{ mm}$ gegeben ist. Man erkennt, dass entsprechend der Optimierung der Entwurfparameter nach Den Hartog, die in Kapitel 1, Abschnitt 1.2 ausführlich erläutert sind, der Verlauf des DVF mit Flüssigkeitstilger optimal ist, d.h. die Resonanzspitzen des gekoppelten Systems Brücke/Flüssigkeitstilger befinden sich auf gleicher Höhe ($\text{DVF} \approx 5$) und weisen im Schnittpunkt mit der Kurve des DVF ohne Flüssigkeitstilger ($\text{DVF}_{\max} \approx 13$) näherungsweise eine horizontale Tangente auf. Die geringfügigen Abweichungen, insbesondere der horizontalen Tangente, rühren aus der Tatsache, dass ein optimaler Verlauf des Frequenzganges nur für ein lineares System erreicht werden kann.

4.4.1.2 Vertikale Anregung durch eine zeitlich harmonische Funktion

Das aus den Gln. (4-142) und (4-124) numerisch ermittelte Ergebnis des zeitlichen Schwingungsverhaltens des Hauptsystems mit und ohne Flüssigkeitstilger im eingeschwungenen Zustand, Verschiebung $w(t)$, bei vertikaler Erregung in der Nähe der zweiten Eigenfrequenz, $f_z = 1.60 \text{ Hz}$, ist in der Abb. 4.17 dargestellt.

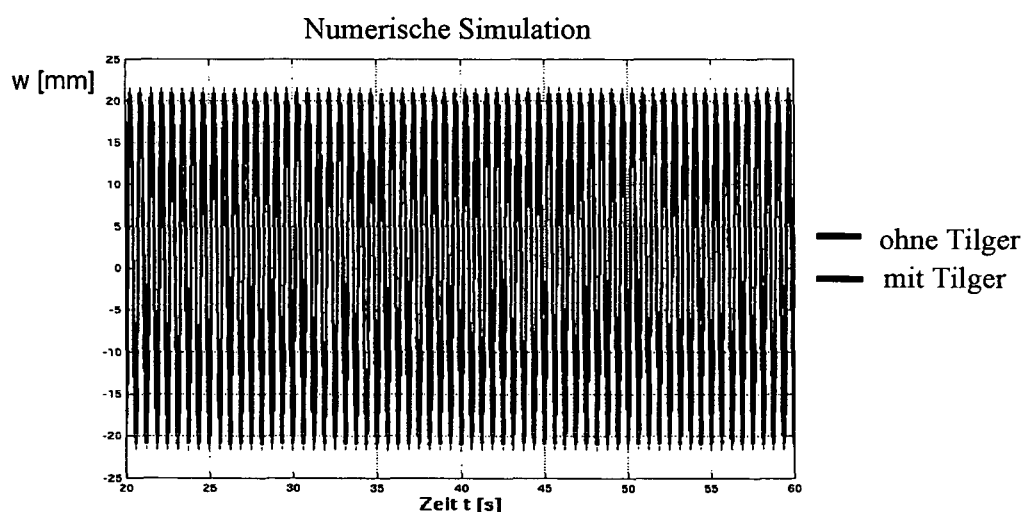


Abb. 4.17: Numerisches Ergebnis des zeitlichen Schwingungsverhaltens des Hauptsystems mit und ohne Flüssigkeitstilger im eingeschwungenen Zustand, Verschiebung $w(t)$; vertikale Anregung mit der Kraftamplitude $F_z = 0.31 \text{ N}$; Erregerfrequenz $f_z = 1.60 \text{ Hz}$; lineares Dämpfermodell $\zeta_A = 0.127$

Die Anregung erfolgt dabei mit einer Kraftamplitude von $F_z = 0.31 N$, $F_z / Mg = 2.0 \times 10^{-2}$. Offensichtlich hat der Flüssigkeitstilger, abgestimmt auf die Grundfrequenz $f_1 = 0.959 \text{ Hz}$, keinen nennenswerten Einfluss auf die vertikale Bewegung des Hauptsystems. Bei vertikaler Anregung des Hauptsystems mit Flüssigkeitstilger verhält sich die Flüssigkeitsmasse somit ähnlich einem Starrkörper, d.h. die Lagekoordinate des freien Flüssigkeitsspiegels $u(t) \approx 0$. Der in Abb. 4.18 dargestellte Verlauf des numerisch errechneten Dynamischen Vergrößerungsfaktors (DVF) des Hauptsystems, Verschiebung $w(t)$, mit und ohne Flüssigkeitstilger, bestätigt diese Tatsache über den gesamten Frequenzbereich der vertikalen Erregung.

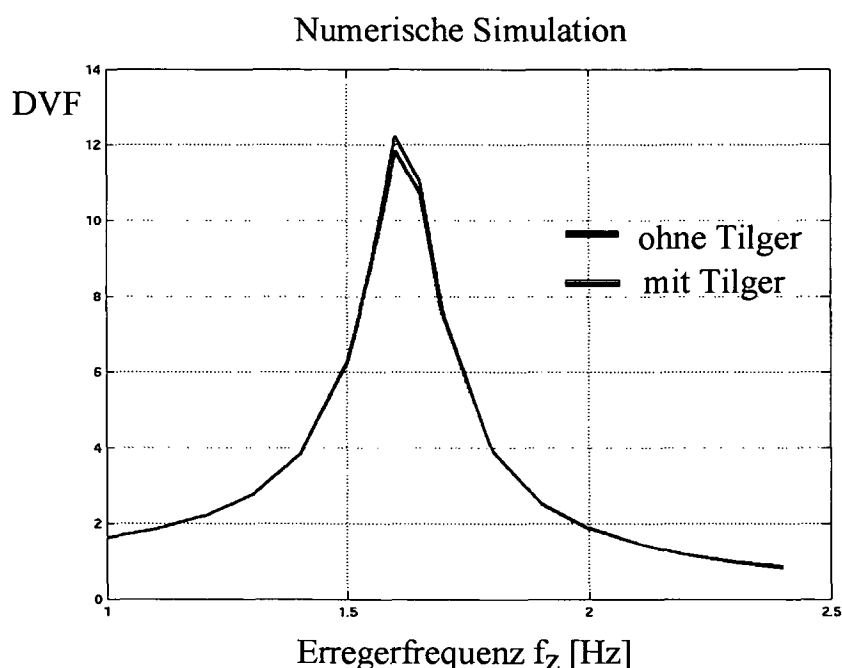


Abb. 4.18: Numerisches Ergebnis des dynamischen Vergrößerungsfaktors (DVF) des Hauptsystems mit und ohne Flüssigkeitstilger, Verschiebung $w(t)$; vertikale Kraftanregung; Erregerfrequenz f_z ; lineares Dämpfermodell $\zeta_A = 0.127$

Die Ermittlung des DVF erfolgt hier wiederum an diskreten Stellen der Erregerfrequenz $f_{z,i}$ durch Auswerten der analogen Gl. (4-152), wobei $w_{\max,i}$ aus dem Zeitverlauf der vertikalen Schwingungsantwort $w(t)$, errechnet aus den Gln. (4-142) und (4-124), und $w_{\text{stat}} = F_z / k_w = 1.8 \text{ mm}$ einzusetzen ist.

4.4.1.3 Kombinierte horizontale und vertikale Anregung durch eine harmonische Funktion

Um den menschlichen Bewegungsprozess „Gehen“ möglichst realistisch nachzubilden wird das Hauptsystem nun gleichzeitig horizontal und vertikal angeregt. In Kapitel 5 ist die dynamische Kraftwirkung des komplexen Systems „gehender Mensch“ ausführlich beschrieben. Die Frequenz f_y der horizontalen Anregung entspricht demnach immer genau der halben Frequenz $f_z = 2f_y$ der vertikalen Anregung. Zusätzlich soll hier nochmals der Einfluss einer vertikalen Anregung auf das Dämpfungsverhalten des Flüssigkeitstilgers betrachtet werden. Das aus den Gln. (4-142) und (4-124) numerisch ermittelte Ergebnis des zeitlichen Schwingungsverhaltens des Hauptsystems mit und ohne Flüssigkeitstilger im eingeschwungenen Zustand, Verschiebung $v(t)$, bei horizontaler Erregung mit $f_y = 0.95 \text{ Hz}$ und gleichzeitiger vertikaler Erregung mit $f_z = 1.90 \text{ Hz}$, ist in der Abb. 4.19 dargestellt.

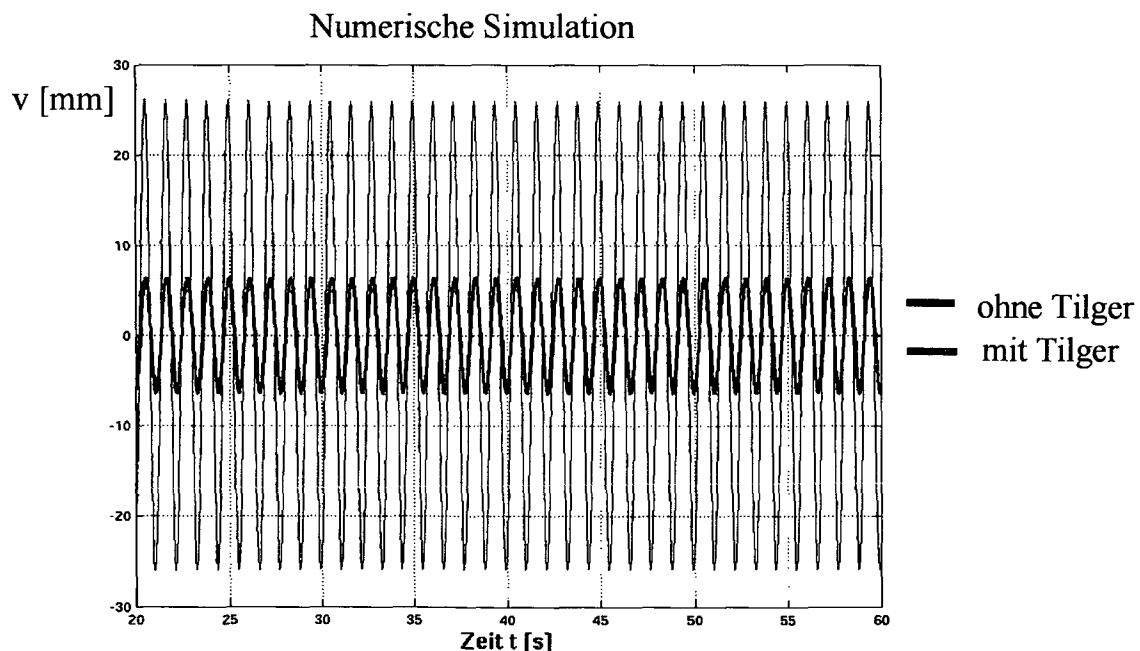


Abb. 4.19: Numerisches Ergebnis des zeitlichen Schwingungsverhaltens des Hauptsystems mit und ohne Flüssigkeitstilger im eingeschwungenen Zustand, Verschiebung $v(t)$; kombinierte horizontale und vertikale Anregung mit den Kraftamplituden $F_y = 0.14 \text{ N}$ und $F_z = 0.10 \text{ N}$; Erregerfrequenzen $f_y = 0.95 \text{ Hz}$ und $f_z = 1.80 \text{ Hz}$; lineares Dämpfermodell $\zeta_A = 0.127$

Die Anregung erfolgt dabei mit den Kraftamplituden $F_y = 0.14\text{ N}$, $F_y / Mg = 8.9 \times 10^{-3}$ und $F_z = 0.10\text{ N}$, $F_z / Mg = 2.0 \times 10^{-2}$. Man erkennt, dass trotz kombinierter Anregung des Hauptsystems wiederum eine enorme Reduktion der horizontalen Schwingungsantwort (horizontale Anregung in der Nähe der Grundfrequenz f_1) erreicht wird. Aus dem Vergleich der Zeitverläufe zufolge kombinierter und entkoppelter horizontaler Anregung, Abb. 4.19 und Abb. 4.15, sind nur geringe Unterschiede feststellbar, d.h. die zusätzliche vertikale Anregung hat sowohl auf die horizontale Bewegung des Hauptsystems als auch auf das Dämpfungsverhalten des Flüssigkeitstilgers keinen oder nur einen sehr geringen Einfluss. Die Abb. 4.20 zeigt weiters den zugehörigen Verlauf des aus den Gln. (4-142), (4-124) und Gl. (4-152) numerisch errechneten Dynamischen Vergrößerungsfaktors (DVF) des Hauptsystems, Verschiebung $v(t)$, mit und ohne Flüssigkeitstilger.

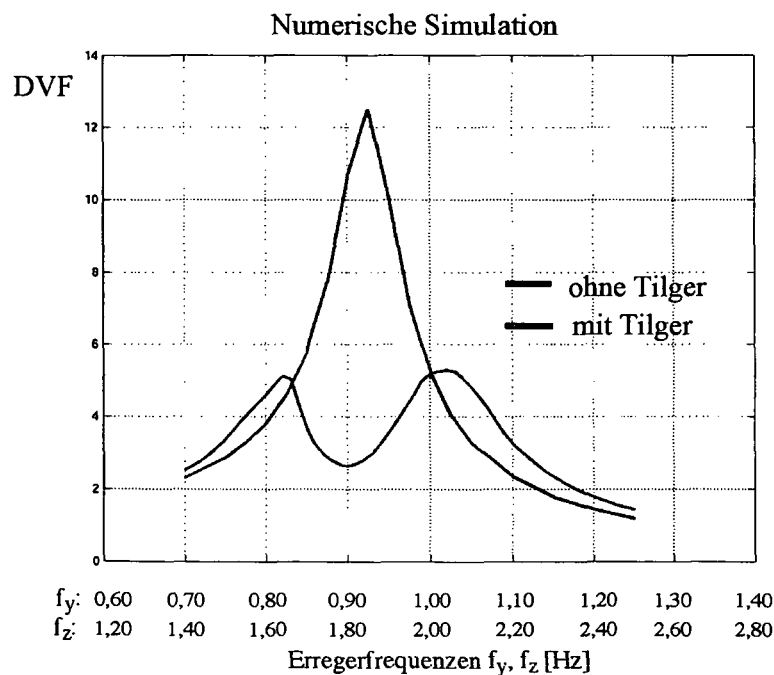


Abb. 4.20: Numerisches Ergebnis des dynamischen Vergrößerungsfaktors (DVF) des Hauptsystems mit und ohne Flüssigkeitstilger, Verschiebung $v(t)$; kombinierte horizontale und vertikale Kraftanregung; Erregerfrequenzen f_y und f_z ; lineares Dämpfermodell $\zeta_A = 0.127$

Auch der Verlauf des DVF des Hauptsystems mit Flüssigkeitstilger bei kombinierter horizontaler und vertikaler Anregung, Abb. 4.20, erscheint hier sehr ähnlich zu jenem bei entkoppelter horizontaler Anregung, wie in Abb. 4.16 dargestellt. Der

Vollständigkeit halber ist in Abb. 4.21 noch der aus den Gln. (4-142), (4-124) und Gl. (4-152) numerisch errechnete DVF des Hauptsystems, Verschiebung $w(t)$, mit und ohne Flüssigkeitstilger, zufolge kombinierter Anregung dargestellt. Vergleicht man die Abb. 4.21 mit dem DVF zufolge entkoppelter vertikaler Anregung, Abb. 4.18, so ist wiederum eine große Ähnlichkeit erkennbar.

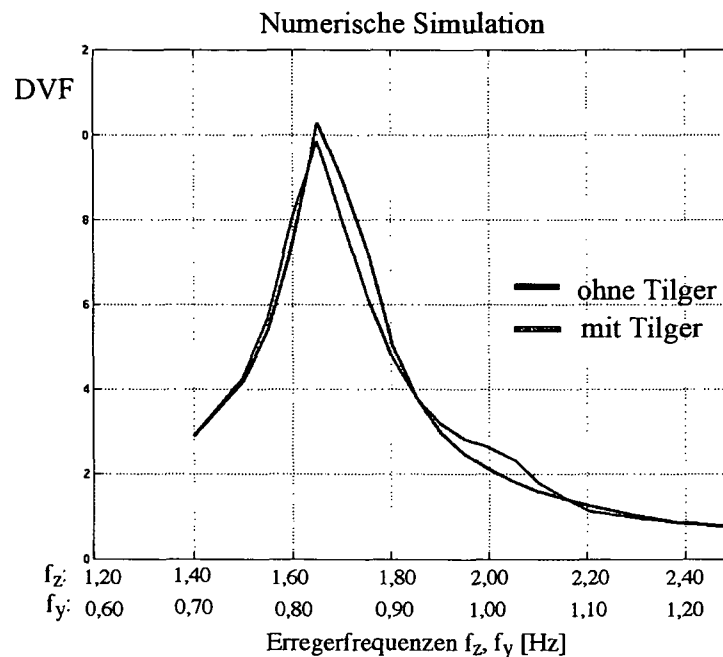


Abb. 4.21: Numerisches Ergebnis des dynamischen Vergrößerungsfaktors (DVF) des Hauptsystems mit und ohne Flüssigkeitstilger, Verschiebung $w(t)$; kombinierte horizontale und vertikale Kraftanregung; Erregerfrequenzen f_z und f_y ; lineares Dämpfermodell $\zeta_A = 0.127$

4.4.2 Horizontale und vertikale periodische Krafterregung

Eine wesentlich bessere mechanische Modellierung des menschlichen Bewegungsprozesses „Gehen“ erreicht man, durch eine Überlagerung mehrerer harmonischer Funktionen, wie im Kapitel 5, Abschnitt 5.2 und 5.3 näher ausgeführt wird. Daher wird in der folgenden numerischen Simulation sowohl in horizontaler als auch in vertikaler Richtung die dynamische Kraftwirkung durch Überlagerung von drei harmonischen Beschleunigungsanteilen, neu generiert. In einem ersten Schritt wird entkoppelt horizontal $F_y(t) = F_{y1} \sin 2\pi f_{y1}t + F_{y2} \sin 2\pi f_{y2}t + F_{y3} \sin 2\pi f_{y3}t$ und vertikal

$F_z(t) = F_{z1} \sin 2\pi f_{z1} t + F_{z2} \sin 2\pi f_{z2} t + F_{z3} \sin 2\pi f_{z3} t$ angeregt und erst in einem zweiten Schritt erfolgt eine Kombination der beiden Erregerkräfte. Aus dem Kapitel 5 geht hervor, dass die einzelnen harmonischen Anteile phasenverschoben zu überlagern sind. Diese Phasenverschiebung wird jedoch in der folgenden numerischen Simulation nicht berücksichtigt, d.h. $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = 0$. Der Grund für diese Annahme liegt in der Tatsache, dass für den Lastfall „Gehen“ meist nur eine einzige Harmonische maßgebend ist und daher die Phasenverschiebung nur eine untergeordnete Rolle spielt, (diese Annahme gilt es jedoch erst zu beweisen).

4.4.2.1 Horizontale Anregung durch eine zeitlich periodische Funktion

Das aus den Gln. (4-142) und (4-124) numerisch ermittelte Ergebnis des zeitlichen Schwingungsverhaltens des Hauptsystems mit und ohne Flüssigkeitstilger im eingeschwungenen Zustand, Verschiebung $v(t)$, bei horizontaler Erregung mit $f_{y1} = 0.95 \text{ Hz}$, $f_{y2} = 2 f_{y1}$ und $f_{y3} = 3 f_{y1}$ ist in der Abb. 4.22 dargestellt.

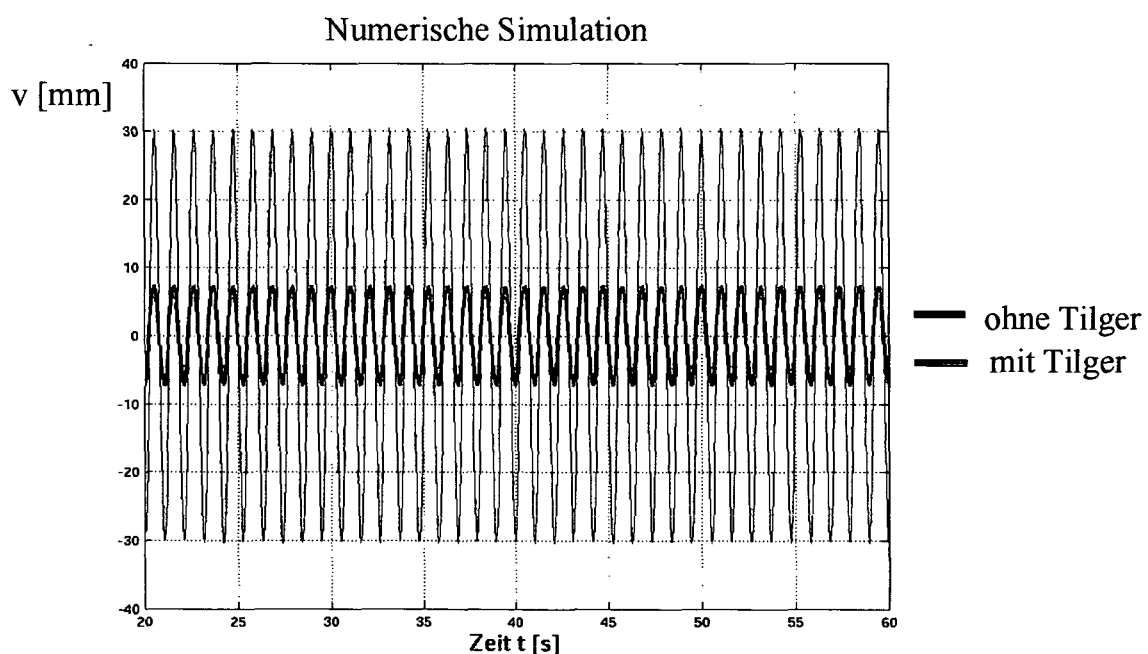


Abb. 4.22: Numerisches Ergebnis des zeitlichen Schwingungsverhaltens des Hauptsystems mit und ohne Flüssigkeitstilger im eingeschwungenen Zustand, Verschiebung $v(t)$; horizontale Anregung mit den Kraftamplituden $F_{y1} = 0.14 \text{ N}$, $F_{y2} = 0.034 \text{ N}$ und $F_{y3} = 0.15 \text{ N}$; Erregerfrequenzen $f_{y1} = 0.95 \text{ Hz}$, $f_{y2} = 2 f_{y1}$ und $f_{y3} = 3 f_{y1}$; lineares Dämpfermodell $\zeta_A = 0.127$

Die horizontale Anregung erfolgt dabei mit den zugehörigen Kraftamplituden $F_{y1} = 0.14\text{ N}$, $F_{y2} = 0.034\text{ N}$ und $F_{y3} = 0.15\text{ N}$. Die Abb. 4.23 zeigt weiters den Verlauf des aus den Gln. (4-142), (4-124) und Gl. (4-152) numerisch errechneten Dynamischen Vergrößerungsfaktors (DVF) des Hauptsystems, Verschiebung $v(t)$, mit und ohne Wirkung des Flüssigkeitstilgers.

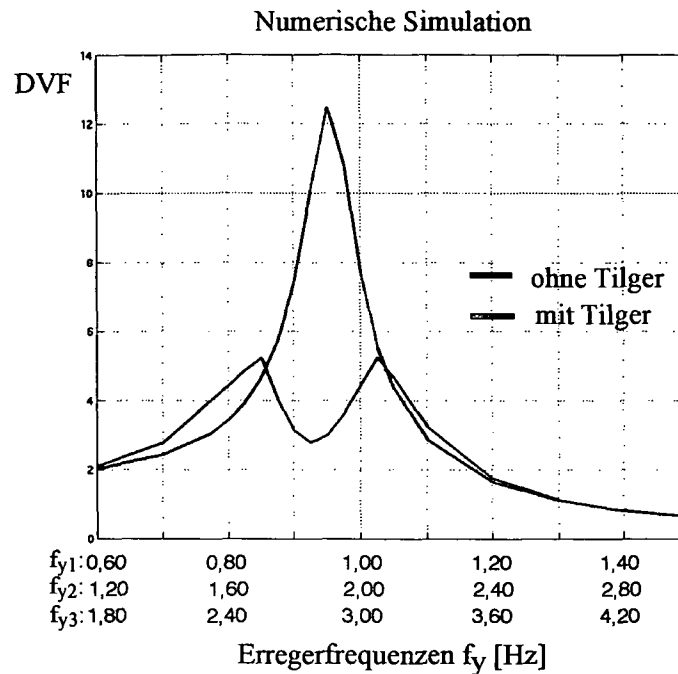


Abb. 4.23: Numerisches Ergebnis des dynamischen Vergrößerungsfaktors (DVF) des Hauptsystems mit und ohne Flüssigkeitstilger, Verschiebung $v(t)$; horizontale Kraftanregung; Erregerfrequenzen f_{y1} , f_{y2} und f_{y3} ; lineares Dämpfermodell $\xi_A = 0.127$

Aus den Abb. 4.22 und Abb. 4.23 erkennt man wiederum die positive Wirkung des Flüssigkeitstilgers. Obwohl die dynamische Erregerkraft $F_y(t)$ hier aus einer Überlagerung von drei harmonischen Funktionen gebildet wird, zeigt der Verlauf des in Abb. 4.23 dargestellten DVF eine große Ähnlichkeit zu jenem welcher mit nur einer einzigen Harmonischen errechnet wurde, wie in Abb. 4.16 dargestellt. Diese Tatsache lässt darauf schließen, dass in unserem Falle wirklich nur eine einzige Harmonische der Erregung maßgebend den Verlauf des DVF beeinflusst, d.h. die Phasenverschiebung spielt nur eine untergeordnete Rolle. Eine Nachbesserung der optimalen Entwurfparameter des Flüssigkeitstilgers, unter Berücksichtigung aller Einwirkungen, kann somit entfallen.

4.4.2.2 Vertikale Anregung durch eine zeitlich periodische Funktion

Das aus den Gln. (4-142) und (4-124) numerisch ermittelte Ergebnisse des zeitliche Schwingungsverhalten des Hauptsystems mit und ohne Flüssigkeitstilger im eingeschwungenen Zustand, Verschiebung $w(t)$, bei vertikaler Erregung mit $f_{z1} = 1.65 \text{ Hz}$, $f_{z2} = 2 f_{z1}$ und $f_{z3} = 3 f_{z1}$ ist in der Abb. 4.24 dargestellt. Die Anregung erfolgt dabei mit den zugehörigen Kraftamplituden $F_{z1} = 0.10 \text{ N}$, $F_{z2} = 0.023 \text{ N}$ und $F_{z3} = 0.0244 \text{ N}$.

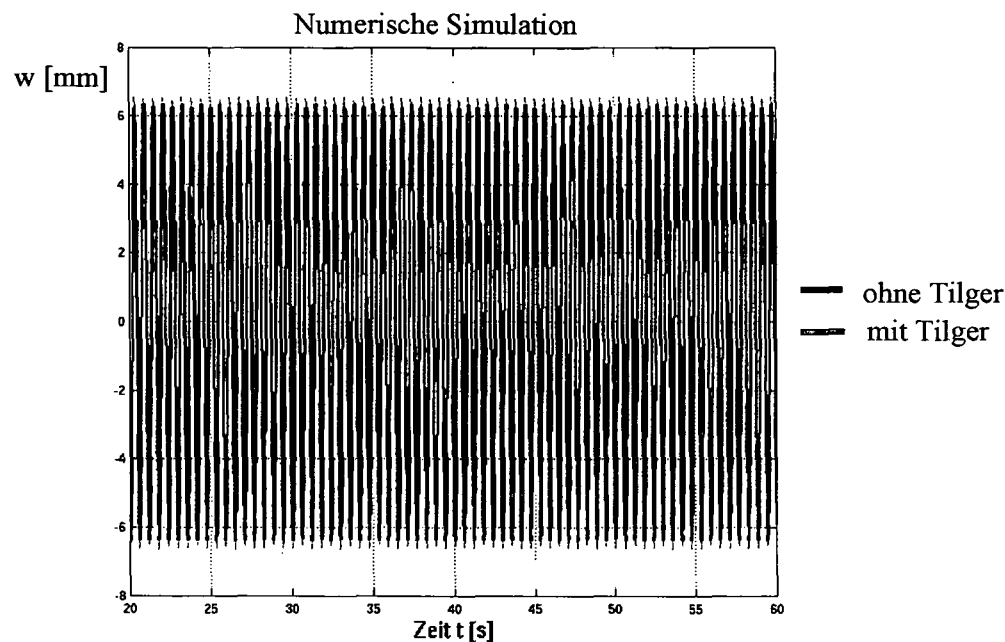


Abb. 4.24: Numerisches Ergebnis des zeitlichen Schwingungsverhaltens des Hauptsystems mit und ohne Flüssigkeitstilger im eingeschwungenen Zustand, Verschiebung $w(t)$; vertikale Anregung mit den Kraftamplituden $F_{z1} = 0.10 \text{ N}$, $F_{z2} = 0.023 \text{ N}$ und $F_{z3} = 0.0244 \text{ N}$; Erregerfrequenzen $f_{w1} = 1.65 \text{ Hz}$, $f_{w2} = 2 f_{w1}$ und $f_{w3} = 3 f_{w1}$; lineares Dämpfermodell $\zeta_A = 0.127$

Analog zu den numerischen Ergebnissen die bereits in Abschnitt 4.3.1.2 erhalten wurden zeigt sich auch hier kein wesentlicher Unterschied im Zeitverlauf der Schwingungsantwort des Hauptsystems mit und ohne Flüssigkeitstilger. Der in Abb. 4.25 dargestellte Verlauf des aus den Gln. (4-142), (4-124) und Gl. (4-152) numerisch errechneten Dynamischen Vergrößerungsfaktors (DVF) des Hauptsystems, Verschiebung $w(t)$, mit und ohne Flüssigkeitstilgers, spiegelt diese Tatsache über den gesamten Frequenzbereich der Erregung wieder.

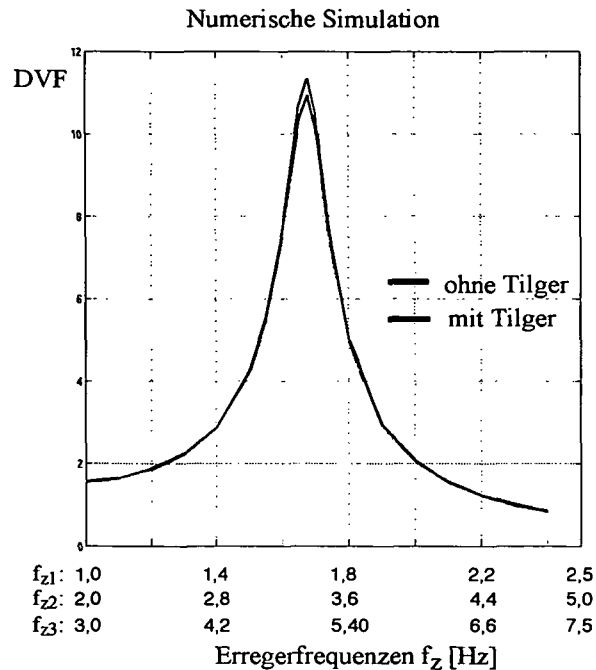


Abb. 4.25: Numerisches Ergebnis des dynamischen Vergrößerungsfaktors (DVF) des Hauptsystems mit und ohne Flüssigkeitstilger, Verschiebung $w(t)$; vertikale Kraftanregung; Erregerfrequenzen f_{z1} , f_{z2} und f_{z3} ; lineares Dämpfermodell $\zeta_A = 0.127$

4.4.2.3 Kombinierte horizontale und vertikale Anregung durch eine periodische Funktion

Ähnlich zu den Ausführungen in Abschnitt 4.3.1.3 soll nun gleichzeitig mittels mehrerer harmonischer Funktionen horizontal und vertikal angeregt werden. Dabei entsprechen die Frequenzen f_{y1} , $f_{y2} = 2f_{y1}$ und $f_{y3} = 3f_{y1}$ der horizontalen Anregung wiederum immer genau den halben Frequenzen $f_{z1} = 2f_{y1}$, $f_{z2} = 4f_{y1}$ und $f_{z3} = 6f_{y1}$ der vertikalen Anregung. Das zeitliche Schwingungsverhalten des Hauptsystems mit und ohne Flüssigkeitstilger im eingeschwungenen Zustand, Verschiebung $v(t)$, numerisch errechnet aus den Gln. (4-142) und (4-124), bei horizontaler Erregung mit $f_{y1} = 0.95 \text{ Hz}$, $f_{y2} = 2f_{y1}$ und $f_{y3} = 3f_{y1}$ und gleichzeitiger vertikaler Erregung mit $f_{z1} = 1.90 \text{ Hz}$, $f_{z2} = 2f_{z1}$ und $f_{z3} = 3f_{z1}$ ist in der Abb. 4.26 dargestellt. Die Anregung

erfolgt dabei mit den zugehörigen Kraftamplituden $F_{y1} = 0.14\text{ N}$, $F_{y2} = 0.034\text{ N}$ und $F_{y3} = 0.15\text{ N}$ horizontal bzw. $F_{z1} = 0.10\text{ N}$, $F_{z2} = 0.023\text{ N}$ und $F_{z3} = 0.0244\text{ N}$ vertikal.

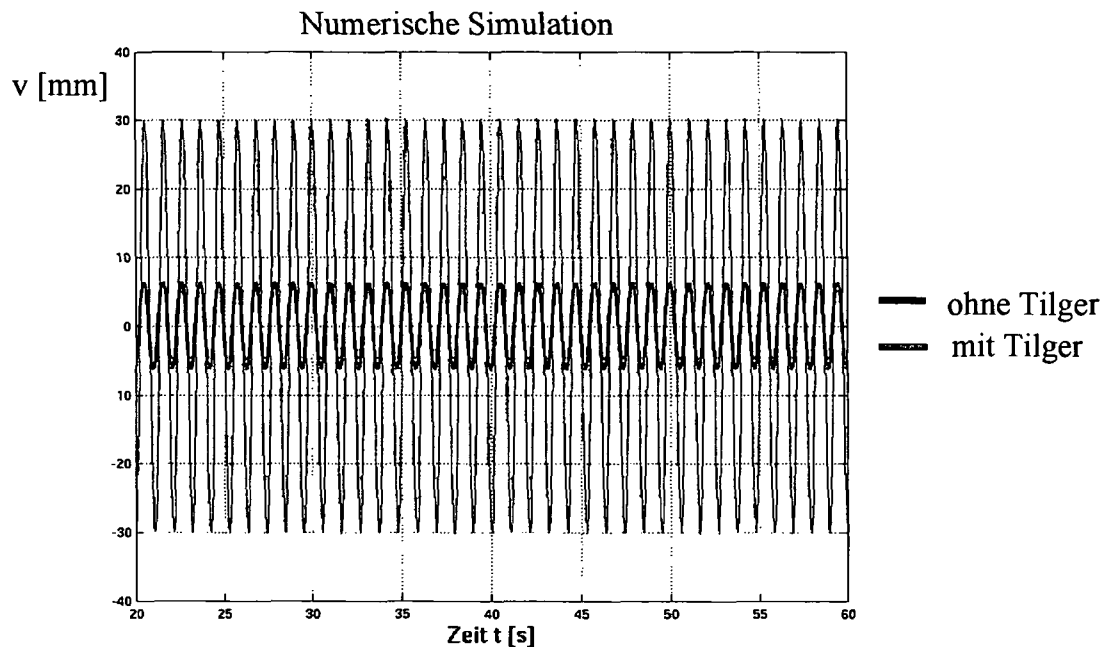


Abb. 4.26: Numerisches Ergebnis des zeitlichen Schwingungsverhaltens des Hauptsystems mit und ohne Flüssigkeitstilger im eingeschwungenen Zustand, Verschiebung $v(t)$; kombinierte horizontale und vertikale Anregung mit den Kraftamplituden $F_{y1} = 0.14\text{ N}$, $F_{y2} = 0.034\text{ N}$, $F_{y3} = 0.15\text{ N}$ und $F_{z1} = 0.10\text{ N}$, $F_{z2} = 0.023\text{ N}$, $F_{z3} = 0.0244\text{ N}$; Erregerfrequenzen: $f_{y1} = 0.95\text{ Hz}$, $f_{y2} = 2f_{y1}$, $f_{y3} = 3f_{y1}$ und $f_{z1} = 1.90\text{ Hz}$, $f_{z2} = 2f_{z1}$, $f_{z3} = 3f_{z1}$; lineares Dämpfermodell $\zeta_A = 0.127$

Der Verlauf des zugehörigen aus den Gln. (4-142), (4-124) und Gl. (4-152) numerisch errechneten DVF ist in der Abb. 4.27 dargestellt. Vergleicht man die numerischen Ergebnisse der Abb. 4.26 und Abb. 4.27 mit jenen der Abb. 4.22 und Abb. 4.23 so ist wiederum eine große Ähnlichkeit erkennbar. Die Resonanzspitzen des gekoppelten Systems mit Flüssigkeitstilger sind in der Abb. 4.27 und Abb. 4.23 ungefähr auf gleicher Höhe, d.h. die zusätzliche vertikale dynamische Krafterregung (gebildet aus der Überlagerung von drei harmonischen Funktionen) des Hauptsystems, verursacht keine nennenswerte Verschlechterung der Dämpfungseigenschaften des, auf die wesentlich horizontale Grundschiwingung, optimal abgestimmten Flüssigkeitstilgers.

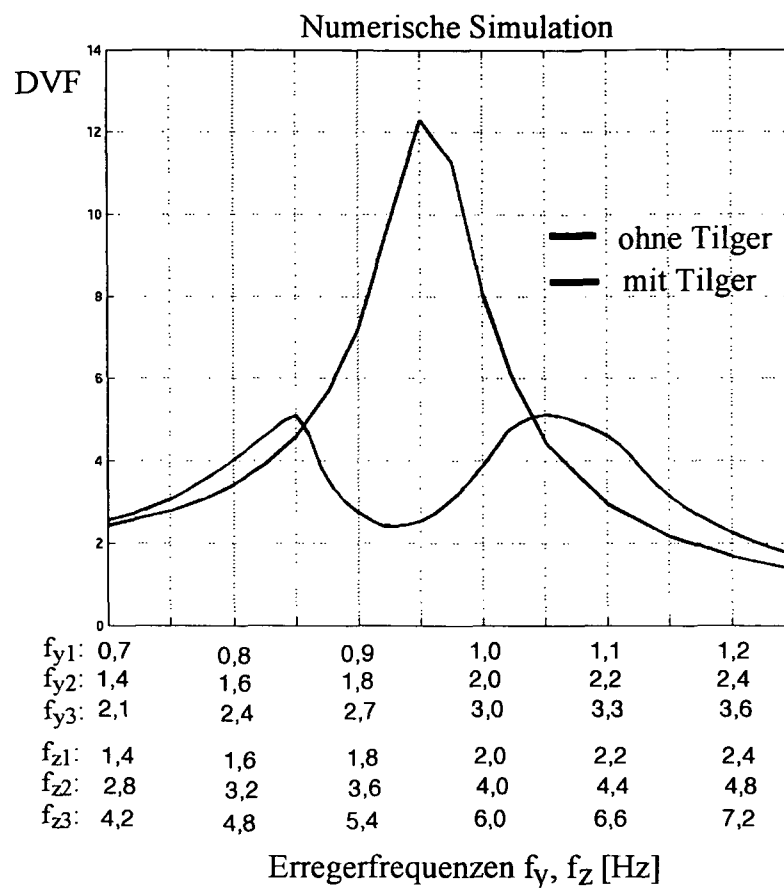


Abb. 4.27: Numerisches Ergebnis des dynamischen Vergrößerungsfaktors (DVF) des Hauptsystems mit und ohne Flüssigkeitstilger, Verschiebung $v(t)$; kombinierte horizontale und vertikale Kraftanregung; Erregerfrequenzen f_{y1} , f_{y2} , f_{y3} und f_{z1} , f_{z2} , f_{z3} ; lineares Dämpfermodell $\zeta_A = 0.127$

Abschließend ist in der Abb. 4.28 noch der DVF des Hauptsystems mit und ohne Flüssigkeitstilger, Verschiebung $w(t)$, numerisch errechnet aus den Gl. (4-142), (4-124) und Gl. (4-152), zufolge kombinierter Kraftanregung durch eine periodische Funktion, dargestellt. Vergleicht man die Abb. 4.28 mit dem DVF zufolge entkoppelter vertikaler Kraftanregung, Abb. 4.25, so ist wiederum eine große Ähnlichkeit erkennbar.

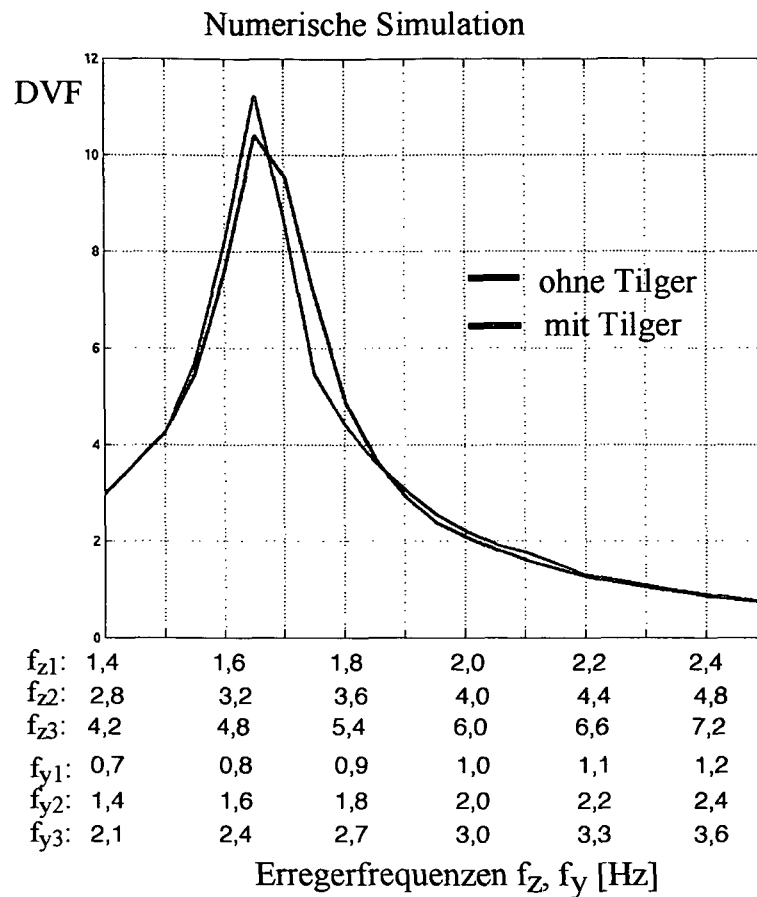


Abb. 4.28: Numerisches Ergebnis des dynamischen Vergrößerungsfaktors (DVF) des Hauptsystems mit und ohne Flüssigkeitstilger, Verschiebung $w(t)$; kombinierte horizontale und vertikale Kraftanregung; Erregerfrequenzen f_{z1} , f_{z2} , f_{z3} und f_{y1} , f_{y2} , f_{y3} ; lineares Dämpfermodell $\zeta_A = 0.127$

Die gesamten numerischen Ergebnisse des DVF des Hauptsystems, zufolge kombinierter Anregung durch periodische Funktionen, ergeben sich nahezu identisch zu jenen mit kombinierter harmonischer Anregung. Aufgrund dieser Tatsache ist eine Nachoptimierung nicht notwendig.

4.5 Experimentelle Untersuchung

4.5.1 Modellversuchsstand – Brückenmodell am elastischen Kragträger

Um die Ergebnisse aus der numerischen Analyse überprüfen und bestätigen zu können wurde im Laboratorium für Modelldynamik des Instituts für Allgemeine Mechanik, (Leitung: a.o. Univ. Prof. Dr. Rudolf Heuer), ein geeignetes Brückenmodell konstruiert, wie von Reiterer und Ziegler¹⁹ dargelegt. Ein Bild dieses Brückenmodells ist in der Abb. 4.29 dargestellt. An dieser Stelle sei nochmals der Hochschuljubiläumsstiftung der Stadt Wien, für die finanzielle Unterstützung recht herzlich gedankt*.

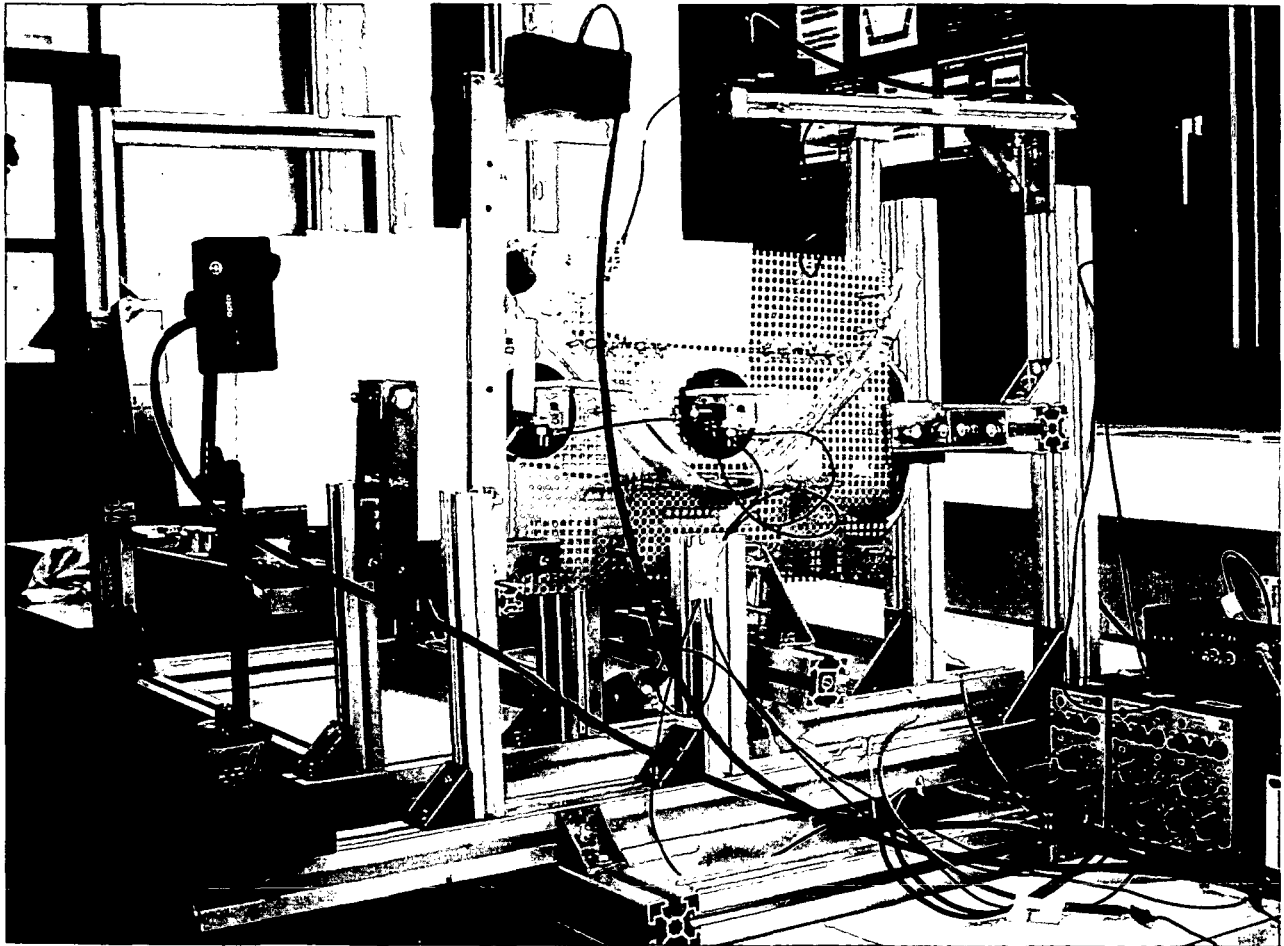


Abb. 4.29: Bild des Brückenmodells zur Überprüfung der numerisch erhaltenen Ergebnisse, im Laboratorium für Modelldynamik des Instituts für Allgemeine Mechanik, E201

Das entwickelte Brückenmodell wird als ein System von schwerer Masse – weicher Feder konstruiert. Die ebene Bewegung der schweren Masse kann durch Angabe von drei unabhängigen Lagekoordinaten, nämlich der horizontalen und vertikalen Verschiebung $v(t)$ und $w(t)$ und der Verdrehung $\vartheta(t)$ beschrieben werden. In der Abb. 4.30 ist weiters eine Seiten- und Vorderansicht des Brückenmodells dargestellt.

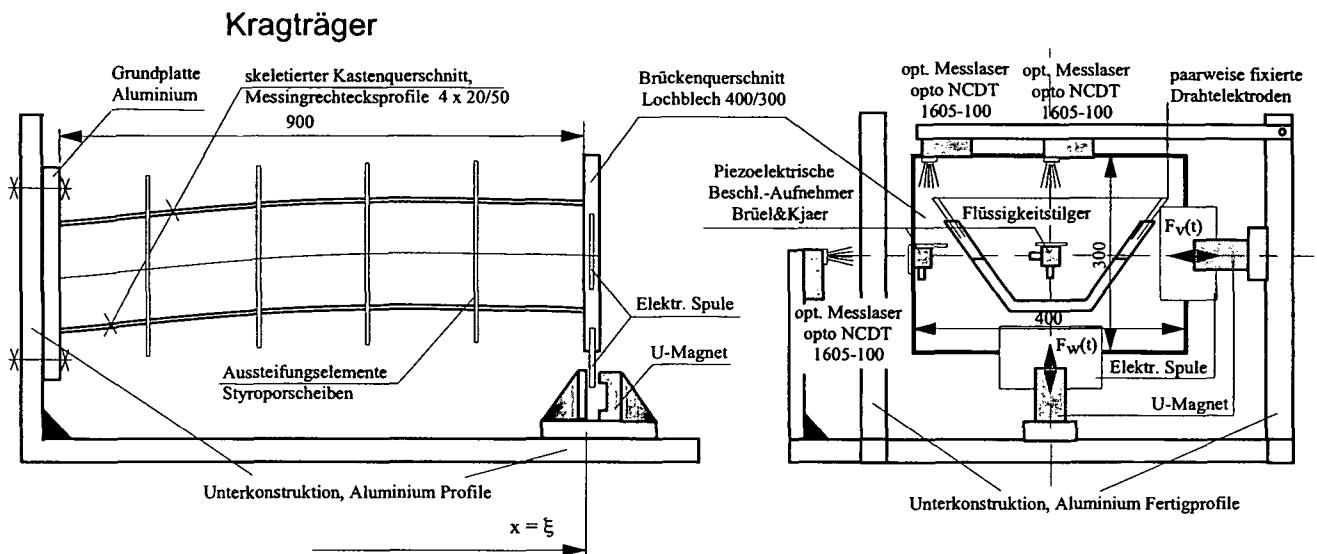


Abb. 4.30: Seiten- und Vorderansicht des Brückenmodells, im Laboratorium für Modelldynamik des Instituts für Allgemeine Mechanik, E201

Die Biege- und Torsionssteifigkeit des Kragträgers mit skeletiertem Kastenquerschnitt ist durch vier schlanke Messingprofile, Querschnitt $20/50\text{ mm}$, Länge 900 mm , die mittels geeigneter Winkelprofile an eine Aluminium Grundplatte starr und unbeweglich angeschlossen sind, gegeben. Am Ende des skeletierten Kastenquerschnittes ist der starre Brückenquerschnitt, ein rechteckiges Aluminium Lochblech $400/300/0.5\text{ mm}$, ebenfalls mittels Winkelprofilen symmetrisch angeschlossen. Aufgrund der Konstruktionsart des Modells als schwere Masse – weiche Feder, werden im interessierenden tieffrequenten Bereich die ersten drei Eigenfrequenzen aktiviert. Etwaige höhere Eigenfrequenzen liegen weit über dem betrachteten Frequenzbereich. Um eventuell auftretende Resonanzschwingungen der Messingprofile zu vermeiden, werden in regelmäßigen Abständen, entlang des skeletierten Kastenquerschnittes, rechteckige plattenförmige Aussteifungselemente befestigt. Diese sind aus Styropor (wegen des geringen Eigengewichts) gefertigt und

beeinflussen das dynamische Verhalten des Brückenmodells nur unwesentlich. Die Abstimmung des Modells in Bezug auf die gewünschten Eigenfrequenzen erfolgt durch Anbringen von definierten Massen am Brückenquerschnitt, wobei auf eine möglichst symmetrische Verteilung geachtet wird.

Der im Experiment untersuchte Flüssigkeitstilger, ein steifer PVC Schlauch mit 19 mm Durchmesser, wird im Abstand $z_A = 75\text{ mm}$ vom Schubmittelpunkt C_S , horizontal symmetrisch auf dem starren Brückenquerschnitt fixiert, wie in Abb. 4.29 und Abb. 4.30 dargestellt. Die gesamten Parameter des Flüssigkeitstilgers und des Brückenmodells sind im Abschnitt 4.4 [Seite 191] gelistet, das Masseverhältnis ist $\mu = m_f / M = 0.076$, Gl. (4-146). Die Bestimmung der Lagekoordinate des freien Flüssigkeitsspiegels $u(t)$ erfolgt hier wiederum mit Hilfe des bereits in Kapitel 3, Abschnitt 3.4, ausführlich beschriebenen, elektronischen Widerstandsmessinstruments. In der Abb. 4.31 ist das experimentell ermittelte Ergebnis der freien Schwingung des Flüssigkeitstilgers dargestellt.

EXPERIMENT

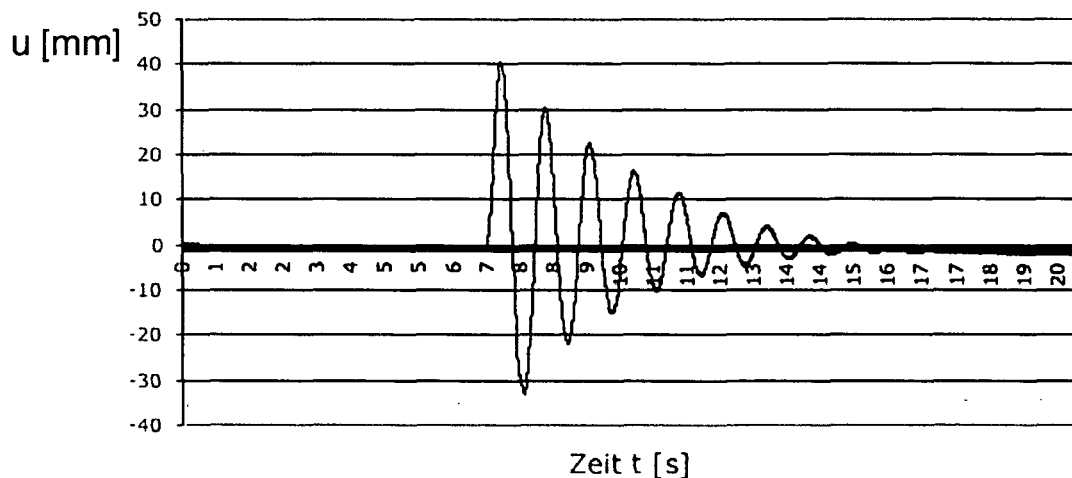


Abb. 4.31: Experimentelles Ergebnis der freien Schwingung des Flüssigkeitstilgers

Aus der Abb. 4.31 kann der mittlere lineare Dämpfungskoeffizient $\xi_A = 0.07$ des Flüssigkeitstilgers, für den interessierenden Amplitudenbereich $U_0 = 20 - 40\text{ mm}$, über das logarithmische Dekrement $\delta_m = \ln(U_n / U_{n+m})$ ermittelt werden. Für den optimalen Wert der Flüssigkeitsdämpfung wird in der numerischen Studie, Abschnitt 4.4, Gl. (4-

148), jedoch $\zeta_A = 0.127$ bestimmt. Eine entsprechende Erhöhung wird erreicht, indem an diskreten Stellen des Flüssigkeitsfadens Querschnittseingengungen vorgenommen werden. Diese Einschnürungen führen zu einer Erhöhung des Turbulenzdämpfungsanteils. Der Einbau einer Blende konnte somit eingespart werden. In analoger Weise werden die linearen Dämpfungskoeffizienten des Brückenmodells in horizontaler $\zeta_v = 0.04$, vertikaler $\zeta_w = 0.041$ und rotatorischer $\zeta_\theta = 0.039$ Bewegungsrichtung mit Hilfe von mehreren Ausschwingversuchen bestimmt. Dabei können die Dämpfungskoeffizienten über den gesamten interessierenden Amplitudenbereich annähernd konstant gesetzt werden.

4.5.2 Horizontale und vertikale Anregung des Brückenmodells

Um die dynamischen Kräfte, welche im Zuge des menschlichen Bewegungsprozesses „Gehen“ auf einen Brückenquerschnitt einwirken, wie in Kapitel 5 dargelegt, im Modellversuchsstand möglichst exakt nachbilden zu können, ein neuartiger elektrodynamischer Schwingerreger entwickelt. Das besondere an diesem Schwingerreger, der dankenswerterweise in Zusammenarbeit mit Herrn M.J. Hochrainer^{***} entwickelt wurde, ist die berührungslose Anregungsart, d.h. der Brückenquerschnitt kann sich bei Krafterregung weiterhin frei in der Ebene bewegen. Im Gegensatz dazu ist ein konventioneller elektrodynamischer Schwingerreger entweder direkt über ein Gestänge oder indirekt über ein Federelement mit der Struktur verbunden, wodurch die Bewegungsmöglichkeiten des Modells stark eingeschränkt werden. Die berührungslose Anregungsart verhindert außerdem eine mögliche Erhöhung der Eigendämpfung des Kragträgers zufolge zusätzlich entstehender Reibungsverluste am Übertragungsort der dynamischen Kräfte. Prinzipiell besteht der neuartige Schwingerreger lediglich aus zwei Elementen, nämlich aus einer Spule und einem U-förmigen Permanentmagneten, wie in Abb. 4.32 illustriert.

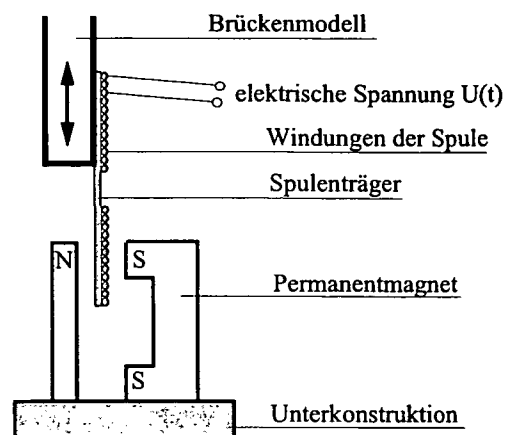


Abb. 4.32: Aufbau des neuartigen elektrodynamischen Schwingerregers; bestehend aus einer Spule und einem U-förmigen Permanentmagnet; angelegte Spannung $U(t)$; entwickelt von M.J. Hochrainer und M. Reiterer

Elektrodynamische Erreger beruhen auf dem inversen elektrodynamischen Wandlerprinzip, dass wiederum auf dem Induktionsprinzip basiert, angegeben z.B. in Heymann und Lingener²⁰, Seite 252. Wird nun eine Spule, die sich in der Umgebung eines homogenen Magnetfeldes befindet, mit dem Strom $i(t)$ gespeist, so entsteht eine dynamische Kraftwirkung $F(t)$ quer zum Verlauf der Windungen. Bei harmonischer Erregung, $i(t) = \hat{I} \sin \nu t$, ist die hervorgerufene Kraftamplitude

$$\hat{F} = \Gamma \hat{I} , \quad (4-153)$$

wobei \hat{I} die Amplitude des Spulenstromes und Γ eine noch zu bestimmende Konstante definieren. Der inverse Wandlereffekt und damit auch die Transformation von Strom- in äquivalente Kraftgrößen, gemäß Gl. (4-153), ist linear solange die Spule den Bereich des annähernd homogenen Magnetfeldes nicht verlässt. Um die Konstante Γ speziell für den hier dargelegten Modellversuchstand, wie in Abb. 4.30 dargestellt, ermitteln zu können, werden die Spulen in einem ersten Schritt mit einer konstanten Nennspannung \hat{U}_1 bzw. Stromstärke \hat{I}_1 gespeist. Die daraus resultierende vertikale bzw. horizontale Absolutverschiebung w_1 bzw. v_1 wird mit Hilfe von berührungslosen Mess-Lasern, Typ Micro-Epsilon optoNCDT 1605, erfasst und aufgezeichnet. In einem zweiten Schritt wird die Spannung bzw. Stromstärke

verändert und wiederum die resultierenden Absolutverschiebungen erfasst und aufgezeichnet. Dieser Vorgang wird solange wiederholt, bis sich ein ausreichend genaues Verschiebungs-Spannungsdiagramm sowohl für den horizontalen als auch für den vertikalen Schwingerreger ergibt, wie in Abb. 4.33 dargestellt.

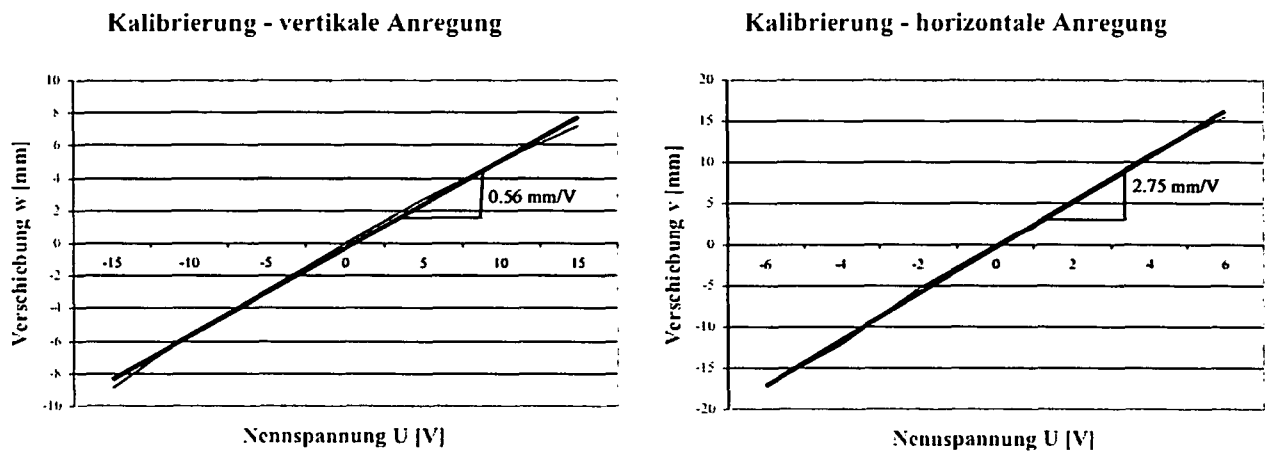


Abb. 4.33: Verschiebungs-Spannungsdiagramm zur Kalibrierung des vertikalen und horizontalen Schwingerregers

Aus der Abb. 4.33 erkennt man, dass zwischen Verschiebung und Nennspannung ein linearer Zusammenhang vorhanden ist. Der Bezug zur Kraftamplitude \hat{F} , angegeben in Gl. (4-153), wird nun durch Aufbringen eines definierten statischen Gewichtes (1N, getrennt vertikal und über eine Umlenkrolle horizontal) und Messen der zugehörigen Absolutverschiebung hergestellt. Die vertikale und horizontale statische Auslenkung ergibt sich dabei zu

$$w_{st} = 5.575 \text{ mm} , \quad v_{st} = 19.45 \text{ mm} , \quad (4-154)$$

wodurch die gesuchten Konstanten Γ_w und Γ_v unter Bezugnahme auf Abb. 4.33 berechnet werden können,

$$\Gamma_w = 0.10 \text{ N/V} , \quad \Gamma_v = 0.14 \text{ N/V} . \quad (4-155)$$

Durch Messen des horizontal und vertikal angelegten harmonischen Spannungssignals, Amplitude \hat{U} , kann nun mittels Gl. (4-153) und der entsprechenden Konstante Γ_w bzw. Γ_v , Gl. (4-155), die für numerische Vergleichsrechnungen benötigte Kraftamplitude \hat{F} bestimmt werden.

4.5.3 Modellaufbau mit Erregerkette

In der Abb. 4.34 ist weiters der gesamte Modellaufbau mit der Erregerkette und den Auswerte- und Dokumentationsgeräten illustriert.

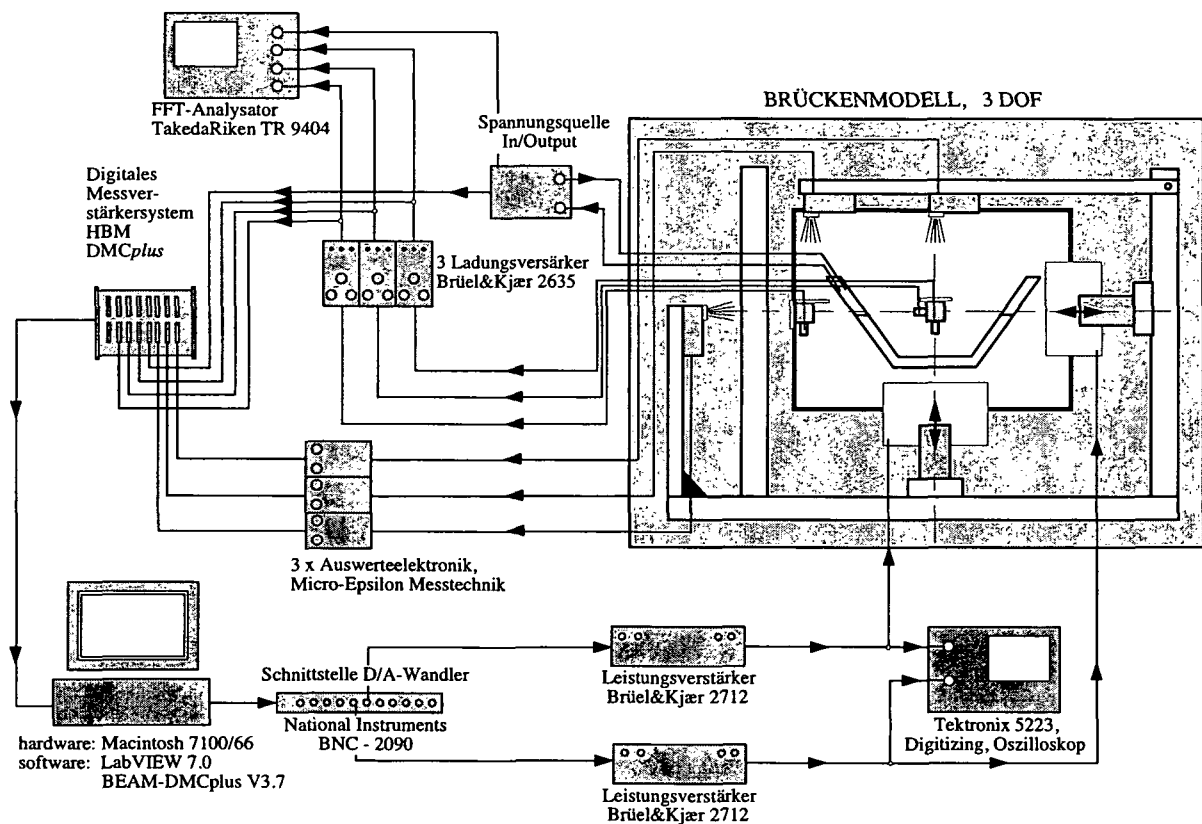


Abb. 4.34: Messgerätekette, Signalfluss im System

Die harmonischen bzw. periodischen Erregersignale zur Ansteuerung des vertikalen und horizontalen Schwingerregers werden mit Hilfe der Computersoftware LabView 7.0 generiert. Beide digitale Signale werden mittels eines D/A-Wandlers, Typ National Instruments BNC-2090, in analoge Signale umgeformt und über einen Leistungverstärker, Typ Brüel&Kjaer 2712, zur jeweiligen Spule geführt. Gleichzeitig

wird der zeitliche Verlauf der Erregersignale, insbesondere deren Schwingungsamplitude, an einem Oszilloskop, Typ Tektronix 5223, abgelesen. Die Signalerfassung der horizontalen $v(t)$, vertikalen $w(t)$ und rotatorischen $\vartheta(t)$ zeitlichen Schwingungsantwort des Brückenmodells erfolgt durch optische berührungslose Mess-Laser, Typ Micro-Epsilon optoNCDT 1605. Die gemessenen Zeitsignale werden, nach Umformung in digitale Größen, über das Messverstärkersystem HBM, DMCplus (Hottinger Baldwin Messtechnik), mit Hilfe der software Beam-DMCplus V3.7 ausgewertet und graphisch dargestellt. Zusätzlich werden für die möglichst exakte Bestimmung der Eigenfrequenzen drei konventionelle Beschleunigungsaufnehmer, Typ Brüel&Kjaer 4367, wie in der Abb. 4.30 illustriert, eingesetzt. Die gemessenen Beschleunigungssignale gelangen zu einem Ladungsverstärker und anschließend zum FFT-Analysator, Typ TakedaRiken TR 9404. Der FFT-Analysator zeigt die freie Beschleunigungsantwort des jeweiligen Aufnehmers im Zeit- und Frequenzbereich, woraus unmittelbar die Eigenfrequenzen abgelesen werden können. In der Abb. 4.35 sind die Beschleunigungsspektren der jeweiligen Aufnehmer dargestellt.

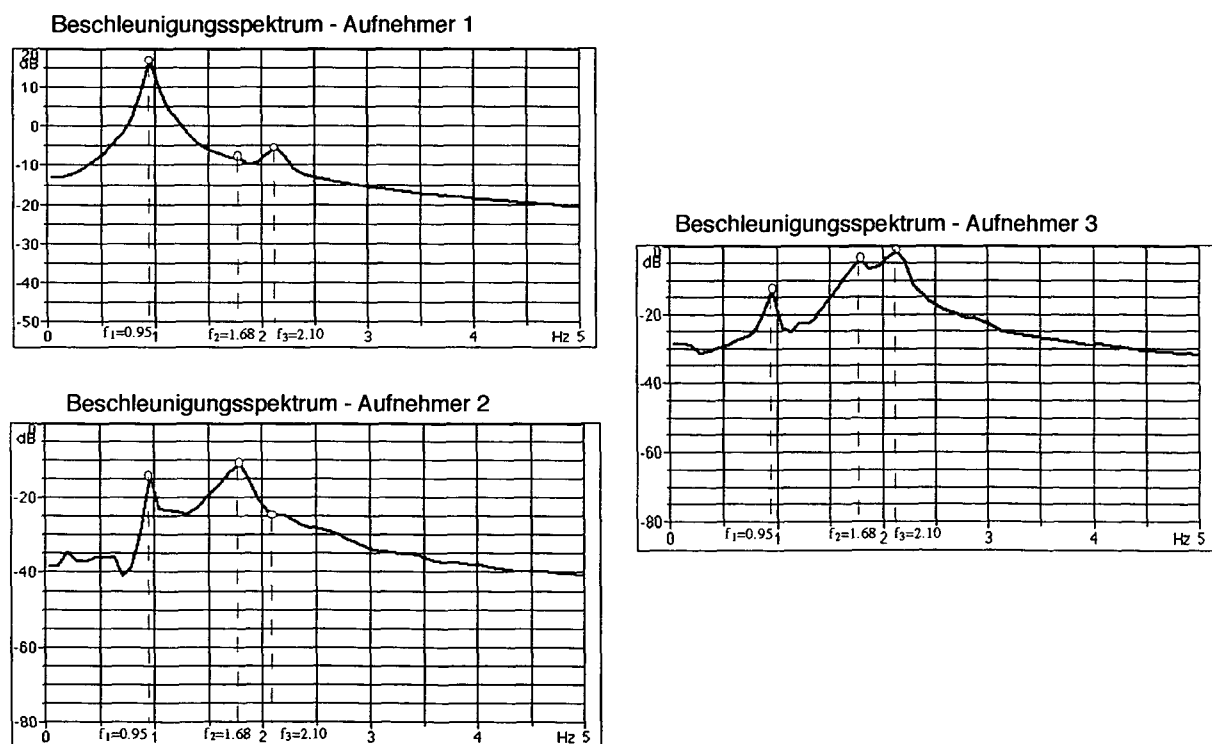


Abb. 4.35: Experimentell ermittelte Beschleunigungsspektren zum Ablesen der Eigenkreisfrequenzen des Brückenmodells

Neben den so ausgeführten freien Schwingversuchen werden in der folgenden experimentellen Studie noch erzwungene Schwingversuche mit harmonischen und periodischen Erregersignalen, in Übereinstimmung mit der numerischen Simulation aus Abschnitt 4.4, durchgeführt. Die experimentellen Ergebnisse des zeitlichen Schwingungsverhaltens und des Verlaufs des dynamischen Vergrößerungsfaktors (DVF) des Brückenmodells mit und ohne Flüssigkeitstilger im eingeschwungenen Zustand, sowie der Vergleich mit den Ergebnissen aus der numerischen Simulation werden im folgenden Abschnitt 4.6 vorgelegt.

4.6 Vergleich der experimentellen und numerischen Ergebnisse

4.6.1 Ergebnisse zufolge horizontaler Anregung durch eine zeitlich harmonische Funktion

In der Abb. 4.36 ist das experimentell und im Vergleich dazu numerisch erzielte Ergebnis des zeitlichen Schwingungsverhaltens des Hauptsystems mit und ohne Flüssigkeitstilger im eingeschwungenen Zustand, Verschiebung $v(t)$, bei horizontaler Erregung in der Nähe der ersten Eigenfrequenz, $f_y = 0.95 \text{ Hz}$, dargestellt. Die Anregung im Experiment erfolgt in Übereinstimmung mit der numerischen Analyse mit einer Kraftamplitude von $F_y = 0.14 \text{ N}$, $F_y / Mg = 8.9 \times 10^{-3}$.

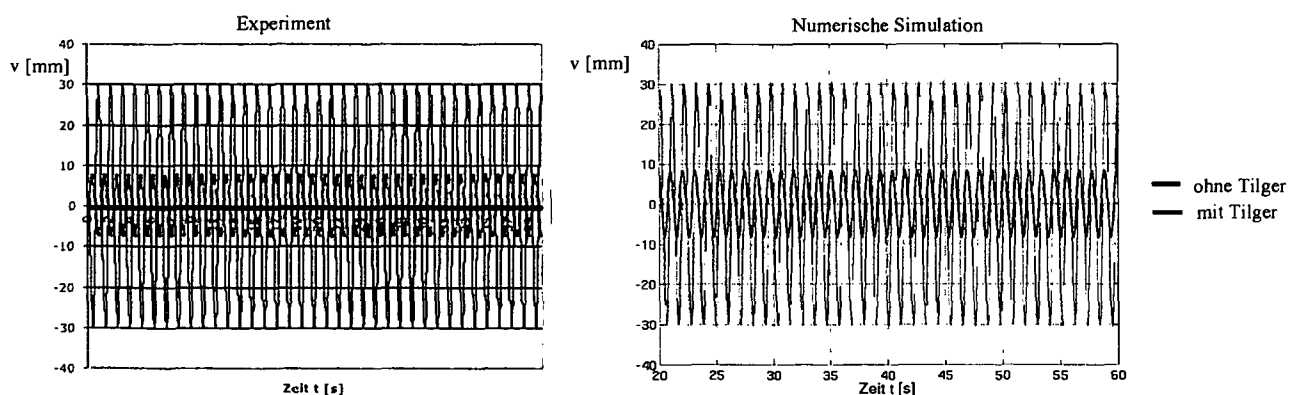


Abb. 4.36: Experimentelles und numerisches Ergebnis des zeitlichen Schwingungsverhaltens des Hauptsystems mit und ohne Flüssigkeitstilger im eingeschwungenen Zustand, Verschiebung $v(t)$; horizontale Anregung mit der Kraftamplitude $F_y = 0.14 \text{ N}$; Erregerfrequenz $f_y = 0.95 \text{ Hz}$; lineares Dämpfermodell $\zeta_A = 0.127$

Man erkennt, dass die experimentellen und numerischen Ergebnisse des stationären Schwingungsverhaltens des Hauptsystems mit und ohne Flüssigkeitstilger außerordentlich gut übereinstimmen. Die Abb. 4.37 zeigt weiters den experimentellen und im Vergleich dazu numerisch erzielten Verlauf des DVF des Hauptsystems, Verschiebung $v(t)$, mit und ohne der Wirkung des Flüssigkeitstilgers.

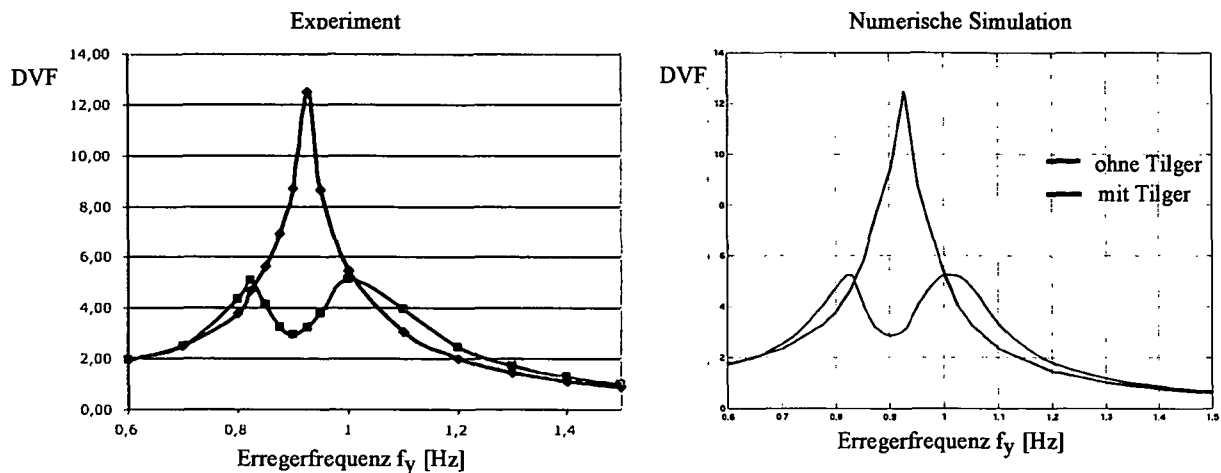


Abb. 4.37: Experimentelles und numerisches Ergebnis des DVF des Hauptsystems mit und ohne Flüssigkeitstilger, Verschiebung $v(t)$; horizontale Kraftanregung; Erregerfrequenz f_y ; lineares Dämpfermodell $\zeta_A = 0.127$

Aus der Abb. 4.37 ist eine äußerst befriedigende Übereinstimmung von experimentellen und numerischen Ergebnissen abzulesen. Es kann daraus geschlossen werden, dass die optimale Abstimmung des Flüssigkeitstilgers in Bezug auf Frequenzverhältnis und Flüssigkeitsdämpfung, wie in Abschnitt 4.4 ausgeführt, sehr wohl auch praktisch recht genau realisiert werden kann. Der DVF wird im Experiment an einzelnen diskreten Stellen der Erregerfrequenz $f_{y,i}$ ermittelt. Dabei wird die horizontale Schwingungsantwort $v(t)$ über einen Zeitraum von $t = 60s$ mit Hilfe der Software BEAM aufgezeichnet und daraus der maximal auftretende Wert $v_{\max,i}$ abgelesen. Der DVF für die betrachtete diskrete Frequenzstelle folgt dann aus Gl. (4-152). Im Experiment wird der zeitliche Verlauf der Erregerkraft $F_y(t) = F_y \sin 2\pi f_y t$ an jeder diskreten Frequenzstelle f_y mit Hilfe eines Oszilloskops aufgezeichnet und daraus die zugehörige Kraftamplitude F_y , welche zur Ermittlung von v_{stat} notwendig ist, abgelesen. Dabei erfolgt die Transformation der am

Oszilloskop angezeigten Spannungsgrößen in äquivalente Kraftgrößen unter Verwendung der Gln. (4-153) und (4-155).

4.6.2 Ergebnisse zufolge vertikaler Anregung durch eine zeitlich harmonische Funktion

Das experimentelle und im Vergleich dazu numerisch erzielte Ergebnis des zeitlichen Schwingungsverhaltens des Hauptsystems mit und ohne Flüssigkeitstilger im eingeschwungenen Zustand, Verschiebung $w(t)$, bei vertikaler Erregung in der Nähe der zweiten Eigenfrequenz, $f_z = 1.60 \text{ Hz}$, ist in der Abb. 4.38 dargestellt. Die Anregung im Experiment erfolgt in Übereinstimmung mit der numerischen Analyse mit einer Kraftamplitude von $F_z = 0.31 \text{ N}$, $F_z / Mg = 2.0 \times 10^{-2}$.

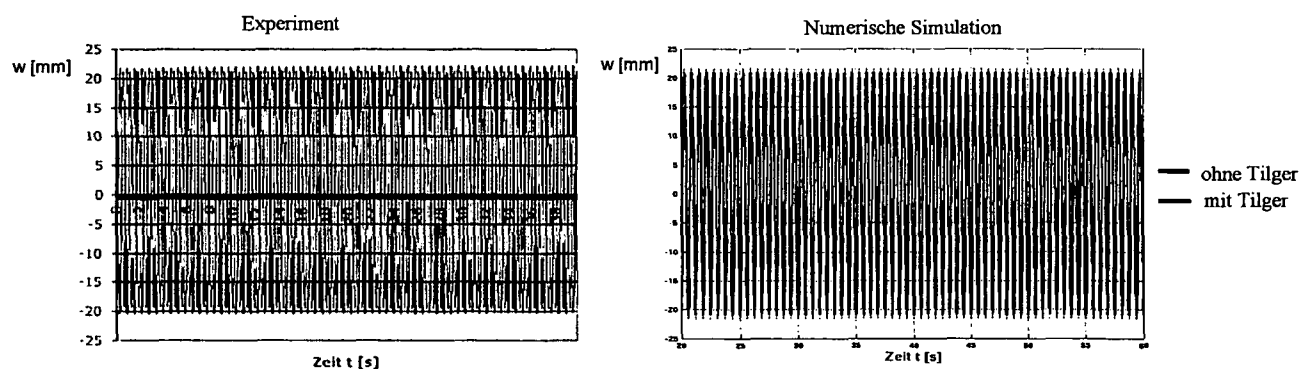


Abb. 4.38: Experimentelles und numerisches Ergebnis des zeitlichen Schwingungsverhaltens des Hauptsystems mit und ohne Flüssigkeitstilger im eingeschwungenen Zustand; Verschiebung $w(t)$; Erregerfrequenz $f_z = 1.60 \text{ Hz}$; lineares Dämpfermodell $\zeta_A = 0.127 > \zeta_{A,0} = 0.035$

Der Vergleich der stationären Schwingungsantwort von Experiment und numerischer Simulation zeigt eine sehr gute Übereinstimmung und bestätigt die weder positive noch negative Wirkung des Flüssigkeitstilgers auf das zeitliche Schwingungsverhalten des Hauptsystems. In der Abb. 4.39 ist der zugehörige experimentelle und im Vergleich dazu numerisch erzielte Verlauf des DVF des Hauptsystems, Verschiebung $w(t)$, mit und ohne der Wirkung des Flüssigkeitstilgers

dargestellt. Auch hier wird eine ausgesprochen gute Übereinstimmung von Experiment und numerischer Studie erreicht.

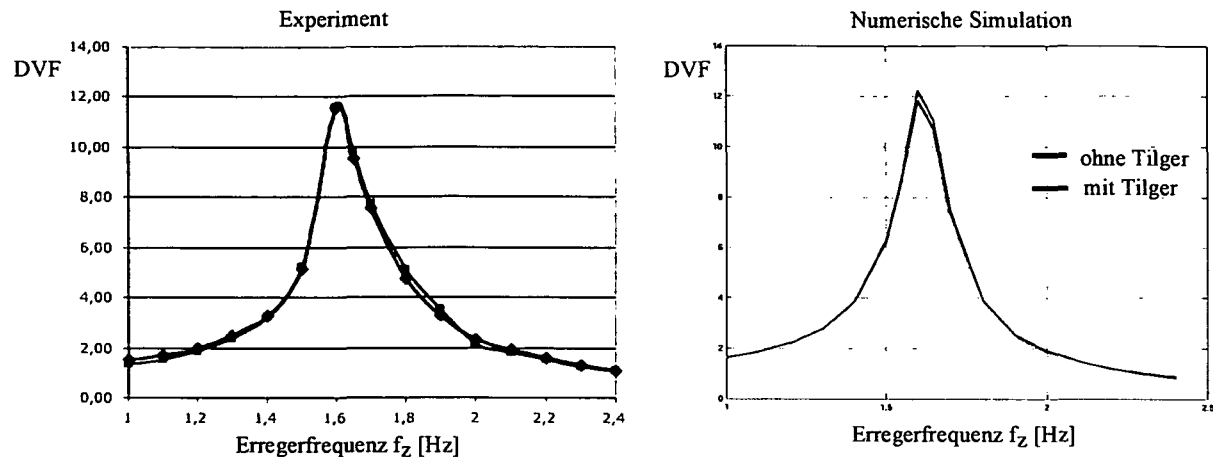


Abb. 4.39: Experimentelles und numerisches Ergebnis des DVF des Hauptsystems mit und ohne Flüssigkeitstilger, Verschiebung $w(t)$; vertikale Anregung; Erregerfrequenz f_z ; lineares Dämpfermodell $\zeta_A = 0.127 > \zeta_{A,0} = 0.035$

Die Ermittlung des experimentellen DVF erfolgt wiederum an diskreten Stellen der Erregerfrequenz $f_{z,i}$. Aus der Abb. 4.39 erkennt man, dass der Flüssigkeitstilger auf die vertikale Bewegung des Hauptsystems, über den gesamten Frequenzbereich der Erregung, praktisch keinen Einfluss hat.

4.6.3 Ergebnisse zufolge kombinierter horizontaler und vertikaler Anregung durch eine harmonische Funktion

Die Abb. 4.40 zeigt das experimentell und im Vergleich dazu numerisch erzielte Ergebnis des zeitlichen Schwingungsverhaltens des Hauptsystems mit und ohne Flüssigkeitstilger im eingeschwungenen Zustand, Verschiebung $v(t)$, bei kombinierter horizontaler und vertikaler Erregung mit $f_y = 0.95 \text{ Hz}$ und $f_z = 1.90 \text{ Hz}$. Die Anregung im Experiment erfolgt in Übereinstimmung mit der numerischen Analyse mit den beiden Kraftamplituden $F_y = 0.14 \text{ N}$, $F_y / Mg = 8.9 \times 10^{-3}$ und $F_z = 0.10 \text{ N}$, $F_z / Mg = 2.0 \times 10^{-2}$.

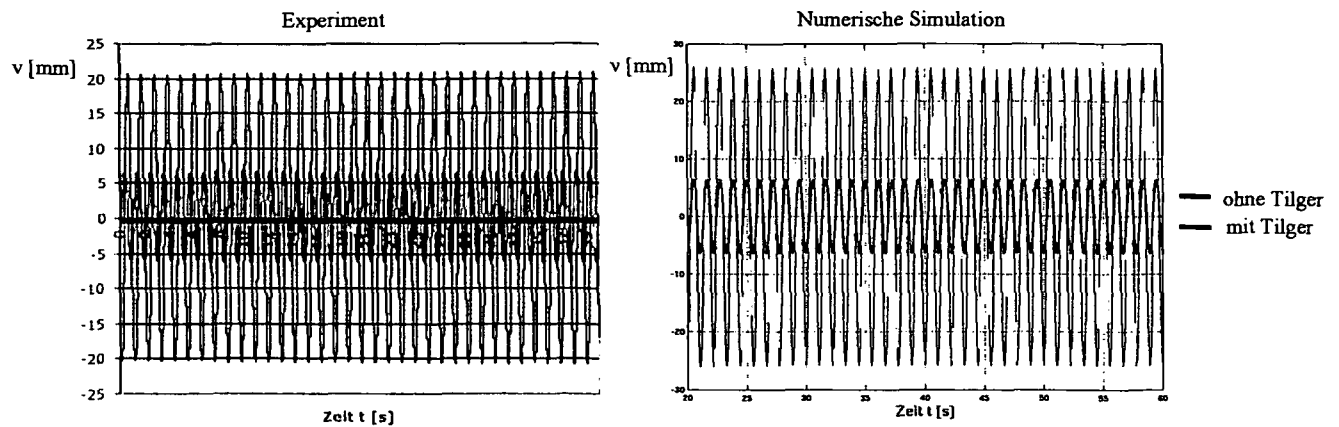


Abb. 4.40: Experimentelles und numerisches Ergebnis des zeitlichen Schwingungsverhaltens des Hauptsystems mit und ohne Flüssigkeitstilger im eingeschwungenen Zustand; Verschiebung $v(t)$; kombinierte horizontale und vertikale Anregung mit den Kraftamplituden $F_y = 0.14\text{ N}$ und $F_z = 0.10\text{ N}$; Erregerfrequenzen: $f_y = 0.95\text{ Hz}$ und $f_z = 1.90\text{ Hz}$; lineares Dämpfermodell $\zeta_A = 0.127 > \zeta_{A,0} = 0.035$

Man erkennt, dass die experimentellen und numerischen Ergebnisse mit und ohne Flüssigkeitstilger außerordentlich gut übereinstimmen.

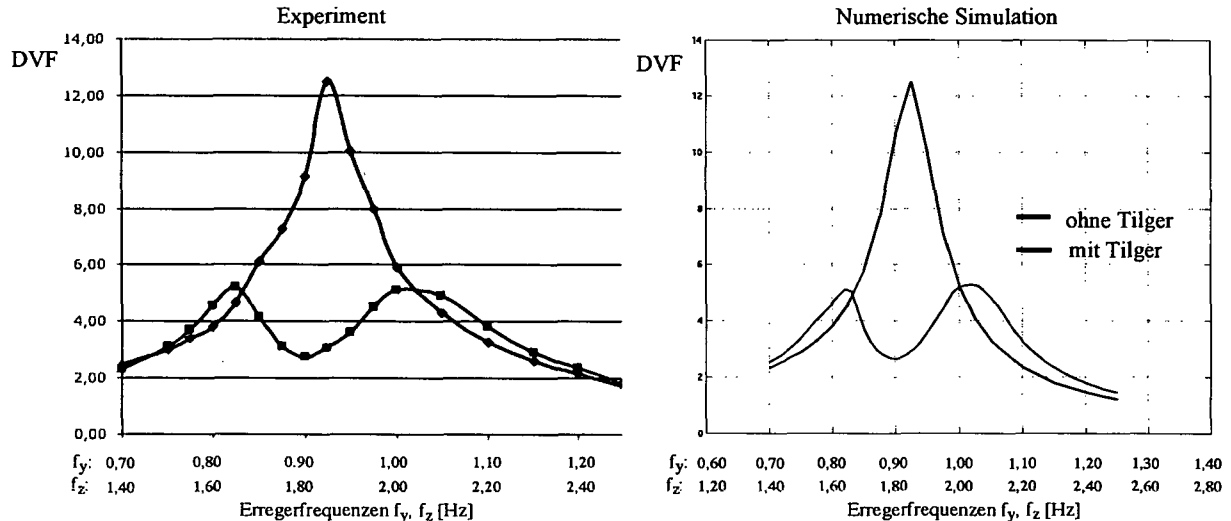


Abb. 4.41: Experimentelles und numerisches Ergebnis des DVF des Hauptsystems mit und ohne Flüssigkeitstilger; Verschiebung $v(t)$; kombinierte horizontale und vertikale Anregung; Erregerfrequenzen: f_y und f_z ; lineares Dämpfermodell $\zeta_A = 0.127 > \zeta_{A,0} = 0.035$

Die Abb. 4.41 zeigt weiters den zugehörigen experimentellen und im Vergleich dazu numerisch ermittelten Verlauf des DVF des Hauptsystems, Verschiebung $v(t)$, bei

kombinierter Erregung, mit und ohne Wirkung des Flüssigkeitstilgers. Der Vergleich von Experiment und Numerik zeigt wiederum eine sehr gute Übereinstimmung. Insbesondere ist darauf hinzuweisen, dass trotz kombinierter Anregung eine starke Reduktion der horizontalen Schwingungsantwort experimentell bestätigt werden kann. Daraus schließt man, dass auch im Experiment die zusätzliche vertikale Anregung des Hauptsystems auf das optimale Dämpfungsverhalten des Flüssigkeitstilgers keine schädlichen Auswirkungen hat. Abschließend ist in der Abb. 4.42 noch der experimentell und im Vergleich dazu numerisch erzielte Verlauf des DVF des Hauptsystems, Verschiebung $w(t)$, mit und ohne Flüssigkeitstilger, zufolge kombinierter harmonischer Anregung dargestellt.

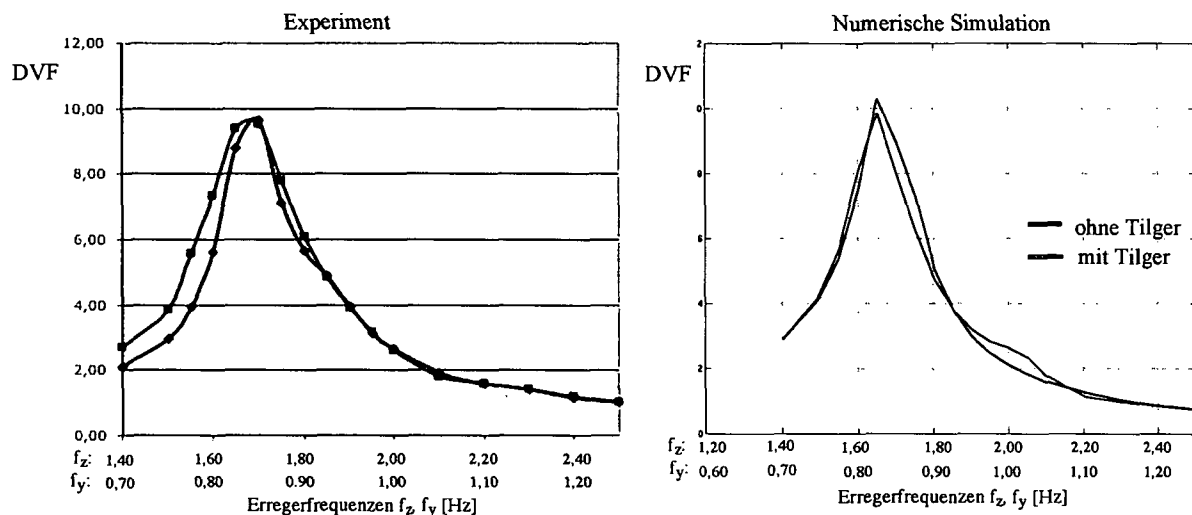


Abb. 4.42: Experimentelles und numerisches Ergebnis des DVF des Hauptsystems mit und ohne Flüssigkeitstilger; Verschiebung $w(t)$; kombinierte horizontale und vertikale Anregung; Erregerfrequenzen f_z und f_y ; lineares Dämpfermodell $\zeta_A = 0.127 > \zeta_{A,0} = 0.035$

Auch hier wird eine gute Übereinstimmung von Experiment und numerischer Studie erreicht.

4.6.4 Ergebnisse zufolge horizontaler Anregung durch eine zeitlich periodische Funktion

Die experimentellen und im Vergleich dazu numerischen Ergebnisse des zeitlichen Schwingungsverhaltens des Hauptsystems mit und ohne Flüssigkeitstilger im eingeschwungenen Zustand, Verschiebung $v(t)$, bei horizontaler Erregung mit $f_{y1} = 0.95 \text{ Hz}$, $f_{y2} = 2 f_{y1}$ und $f_{y3} = 3 f_{y1}$ ist in der Abb. 4.43 dargestellt. Die Anregung im Experiment erfolgt dabei in Übereinstimmung mit der numerischen Analyse mit den Kraftamplituden $F_{y1} = 0.14 \text{ N}$, $F_{y2} = 0.034 \text{ N}$ und $F_{y3} = 0.15 \text{ N}$.

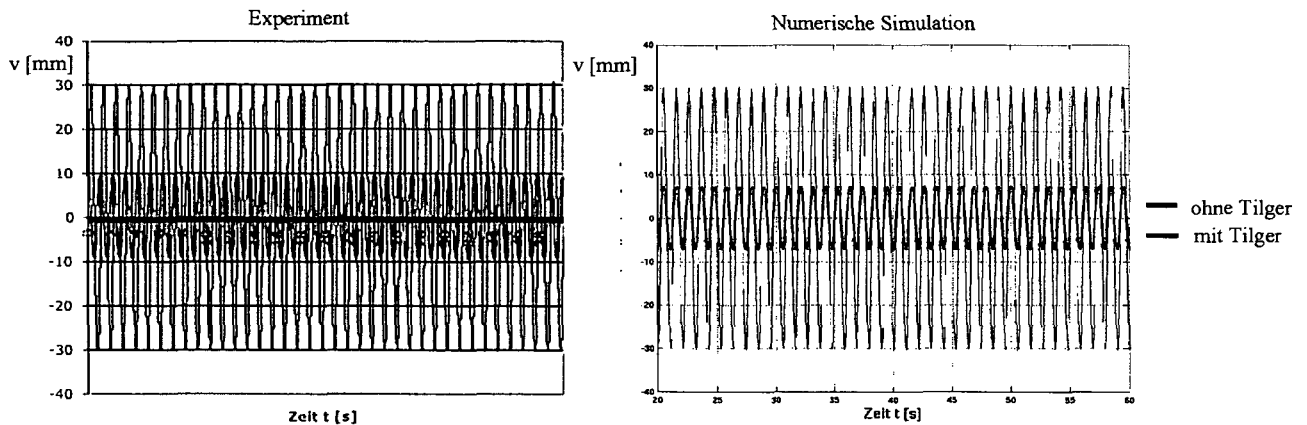


Abb. 4.43: : Experimentelles und numerisches Ergebnis des zeitlichen Schwingungsverhaltens des Hauptsystems mit und ohne Flüssigkeitstilger im eingeschwungenen Zustand, Verschiebung $v(t)$; horizontale Anregung mit den Kraftamplituden $F_{y1} = 0.14 \text{ N}$, $F_{y2} = 0.034 \text{ N}$ und $F_{y3} = 0.15 \text{ N}$; Erregerfrequenzen $f_{y1} = 0.95 \text{ Hz}$, $f_{y2} = 2 f_{y1}$ und $f_{y3} = 3 f_{y1}$; lineares Dämpfermodell $\zeta_A = 0.127$

Die Abb. 4.44 zeigt weiters den zugehörigen experimentellen und im Vergleich dazu numerisch erzielten Verlauf des DVF des Hauptsystems, Verschiebung $v(t)$, mit und ohne Wirkung des Flüssigkeitstilgers, bei horizontaler Anregung mit drei überlagerten harmonische Funktionen.

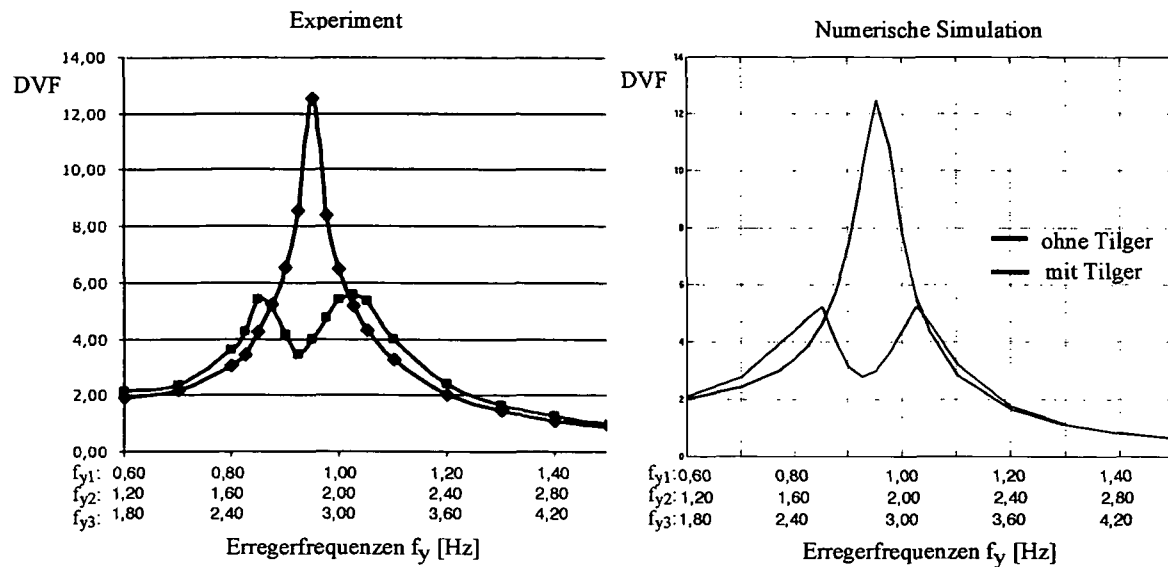


Abb. 4.44: Experimentelles und numerisches Ergebnis des DVF des Hauptsystems mit und ohne Flüssigkeitstilger, Verschiebung $v(t)$; horizontale Anregung; Erregerfrequenzen: f_{y1} , f_{y2} und f_{y3} ; lineares Dämpfermodell $\zeta_A = 0.127$

Sowohl das zeitliche Schwingungsverhalten, Abb. 4.43, als auch der in Abb. 4.44 dargestellte DVF zeigen eine ausgesprochen gute Übereinstimmung von Experiment und numerischer Simulation. Der dynamische Vergrößerungsfaktor wird dabei analog zu Abschnitt 4.6.1 ermittelt. Die Ähnlichkeit des hier experimentell ermittelten DVF, Abb. 4.44, zu jenem welcher mit nur einer einzigen harmonischen Anregung erzielt wurde, Abb. 4.37, bestätigt nochmals die im Zuge der numerischen Studie im Abschnitt 4.4.2 geäußerte Feststellung, nämlich dass nur eine einzige Harmonische der Erregung maßgebend am Verlauf des DVF beteiligt ist. Eine Nachbesserung der optimalen Entwurfparameter des Flüssigkeitstilgers, unter Berücksichtigung aller Einwirkungen, entfällt somit auch im Hinblick auf das Experiment.

4.6.5 Ergebnisse zufolge vertikaler Anregung durch eine zeitlich periodische Funktion

Das experimentelle und im Vergleich dazu numerisch erzielte Ergebnis des zeitlichen Schwingungsverhaltens des Hauptsystems mit und ohne Flüssigkeitstilger im eingeschwungenen Zustand, Verschiebung $w(t)$, bei vertikaler Erregung mit

$f_{z1} = 1.65 \text{ Hz}$, $f_{z2} = 2f_{z1}$ und $f_{z3} = 3f_{z1}$ ist in der Abb. 4.45 dargestellt. Die Anregung im Experiment erfolgt dabei in Übereinstimmung mit der numerischen Analyse mit den Kraftamplituden $F_{z1} = 0.10 \text{ N}$, $F_{z2} = 0.023 \text{ N}$ und $F_{z3} = 0.0244 \text{ N}$.

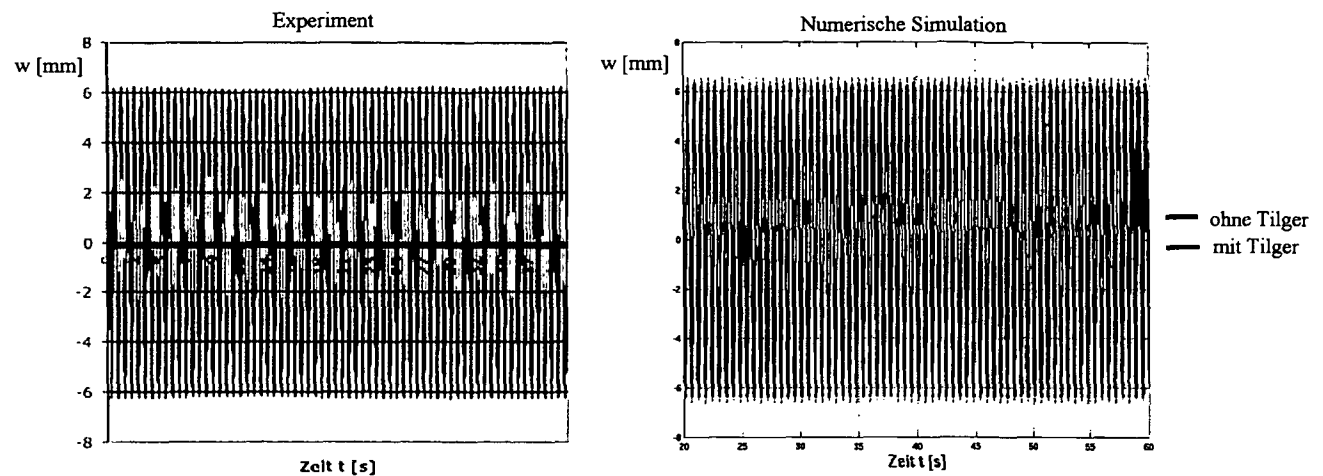


Abb. 4.45: Experimentelles und numerisches Ergebnis des zeitlichen Schwingungsverhaltens des Hauptsystems mit und ohne Flüssigkeitstilger im eingeschwungenen Zustand, Verschiebung $w(t)$; vertikale Anregung mit den Kraftamplituden $F_{z1} = 0.10 \text{ N}$, $F_{z2} = 0.023 \text{ N}$ und $F_{z3} = 0.0244 \text{ N}$; Erregerfrequenzen: $f_{z1} = 1.65 \text{ Hz}$, $f_{z2} = 2f_{z1}$ und $f_{z3} = 3f_{z1}$; lineares Dämpfermodell $\zeta_A = 0.127$

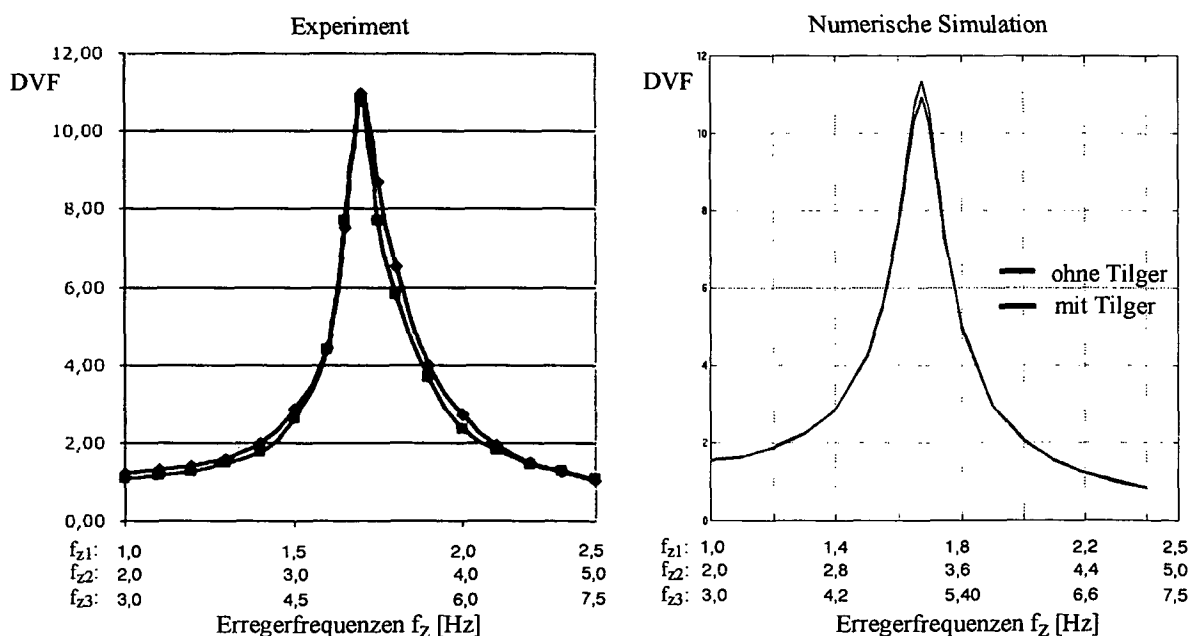


Abb. 4.46: Experimentelles und numerisches Ergebnis des DVF des Hauptsystems mit und ohne Flüssigkeitstilger, Verschiebung $w(t)$; vertikale Anregung; Erregerfrequenzen: f_{z1} , f_{z2} und f_{z3} ; lineares Dämpfermodell $\zeta_A = 0.127$

In der Abb. 4.46 ist weiters der zugehörige experimentelle und im Vergleich dazu numerisch erzielte Verlauf des DVF des Hauptsystems, Verschiebung $w(t)$, mit und ohne Wirkung des Flüssigkeitstilgers, dargestellt. Die Abb. 4.45 und Abb. 4.46 bestätigen die außerordentlich gute Übereinstimmung der Ergebnisse aus dem Experiment und der numerischen Simulation. Der dynamische Vergrößerungsfaktor wird dabei wiederum analog zu Abschnitt 4.6.1 ermittelt. Auch hier kann eine Ähnlichkeit des DVF, Abb. 4.46 und Abb. 4.39, experimentell bestätigt werden.

4.6.6 Ergebnisse zufolge kombinierter horizontaler und vertikaler Anregung durch eine periodische Funktion

Das experimentelle und im Vergleich dazu numerisch erzielte Ergebnis des zeitlichen Schwingungsverhaltens des Hauptsystems mit und ohne Flüssigkeitstilger im eingeschwungenen Zustand, Verschiebung $v(t)$, bei kombinierter horizontaler Erregung mit $f_{y1} = 0.95 \text{ Hz}$, $f_{y2} = 2f_{y1}$ und $f_{y3} = 3f_{y1}$ und gleichzeitiger vertikaler Erregung mit $f_{z1} = 1.90 \text{ Hz}$, $f_{z2} = 2f_{z1}$ und $f_{z3} = 3f_{z1}$ ist in Abb. 4.47 dargestellt.

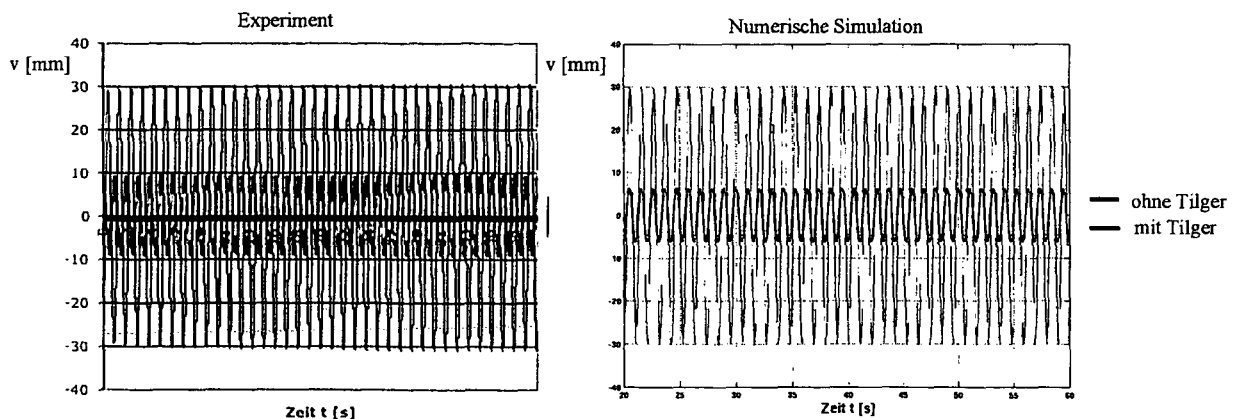


Abb. 4.47: Experimentelles und numerisches Ergebnis des zeitlichen Schwingungsverhaltens des Hauptsystems mit und ohne Flüssigkeitstilger im eingeschwungenen Zustand; Verschiebung $v(t)$; kombinierte horizontale und vertikale Anregung mit den Kraftamplituden $F_{y1} = 0.14 \text{ N}$, $F_{y2} = 0.034 \text{ N}$, $F_{y3} = 0.15 \text{ N}$ und $F_{z1} = 0.10 \text{ N}$, $F_{z2} = 0.023 \text{ N}$, $F_{z3} = 0.0244 \text{ N}$; Erregerfrequenzen: $f_{y1} = 0.95 \text{ Hz}$, $f_{y2} = 2f_{y1}$, $f_{y3} = 3f_{y1}$ und $f_{z1} = 1.90 \text{ Hz}$, $f_{z2} = 2f_{z1}$ und $f_{z3} = 3f_{z1}$; lineares Dämpfermodell $\zeta_A = 0.127$

Die Anregung erfolgt dabei mit den Kraftamplituden $F_{y1} = 0.14\text{ N}$, $F_{y2} = 0.034\text{ N}$ und $F_{y3} = 0.15\text{ N}$ horizontal bzw. $F_{z1} = 0.10\text{ N}$, $F_{z2} = 0.023\text{ N}$ und $F_{z3} = 0.0244\text{ N}$ vertikal. Der Verlauf des zugehörigen experimentell und im Vergleich dazu numerisch ermittelten DVF, Verschiebung $v(t)$, ist in der Abb. 4.48 dargestellt.

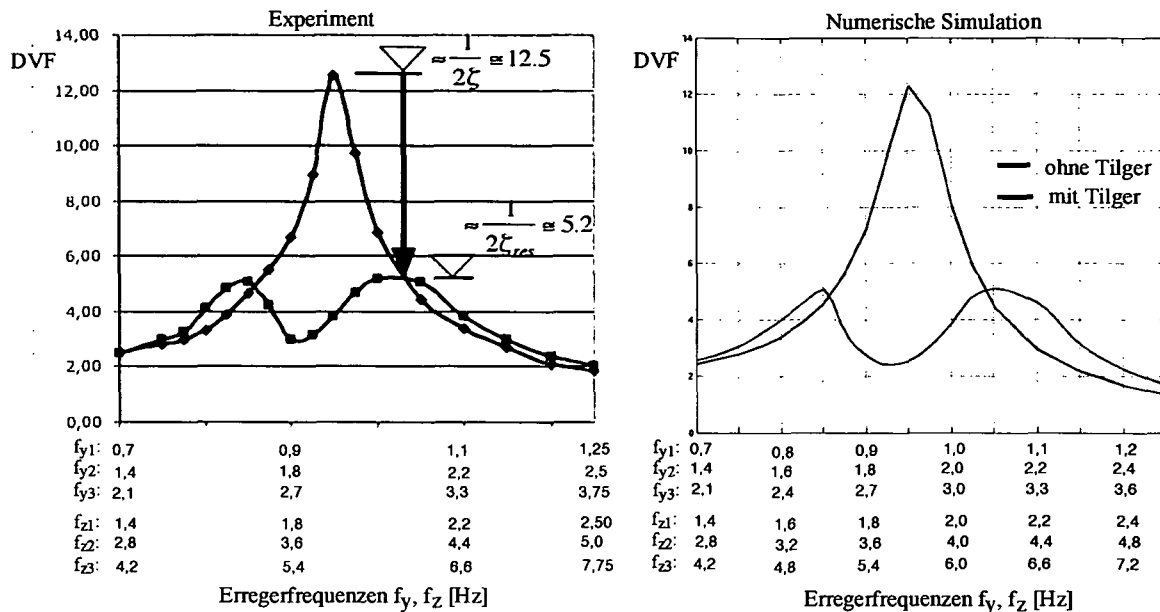


Abb. 4.48: Experimentelles und numerisches Ergebnis des DVF des Hauptsystems mit und ohne Flüssigkeitstilger; Verschiebung $v(t)$; kombinierte horizontale und vertikale Anregung; Erregerfrequenzen: f_{y1} , f_{y2} , f_{y3} und f_{z1} , f_{z2} , f_{z3} ; lineares Dämpfermodell $\zeta_A = 0.127$

Trotz kombinierter Anregung durch mehrere harmonische Funktionen wird eine exzellente Übereinstimmung von Experiment und Numerik erzielt. Die zusätzliche vertikale Anregung des auf die horizontale Grundschiwingung optimierten Flüssigkeitstilgers hat somit keinen schädlichen Einfluss auf das Dämpfungsverhalten des Flüssigkeitstilgers. Vergleicht man die experimentell erzielten Ergebnisse des DVF zufolge kombinierter und entkoppelter periodischer Anregung, Abb. 4.48 und Abb. 4.44, so wird die Ähnlichkeit wiederum bestätigt.

Abschließend ist in der Abb. 4.49 noch der experimentell und im Vergleich dazu numerisch erzielte Verlauf des DVF des Hauptsystems, Verschiebung $w(t)$, mit und ohne Flüssigkeitstilger zufolge kombinierter horizontaler und vertikaler Erregung, dargestellt. Der Vergleich von Experiment und numerischer Simulation zeigt wiederum eine sehr gute Übereinstimmung.

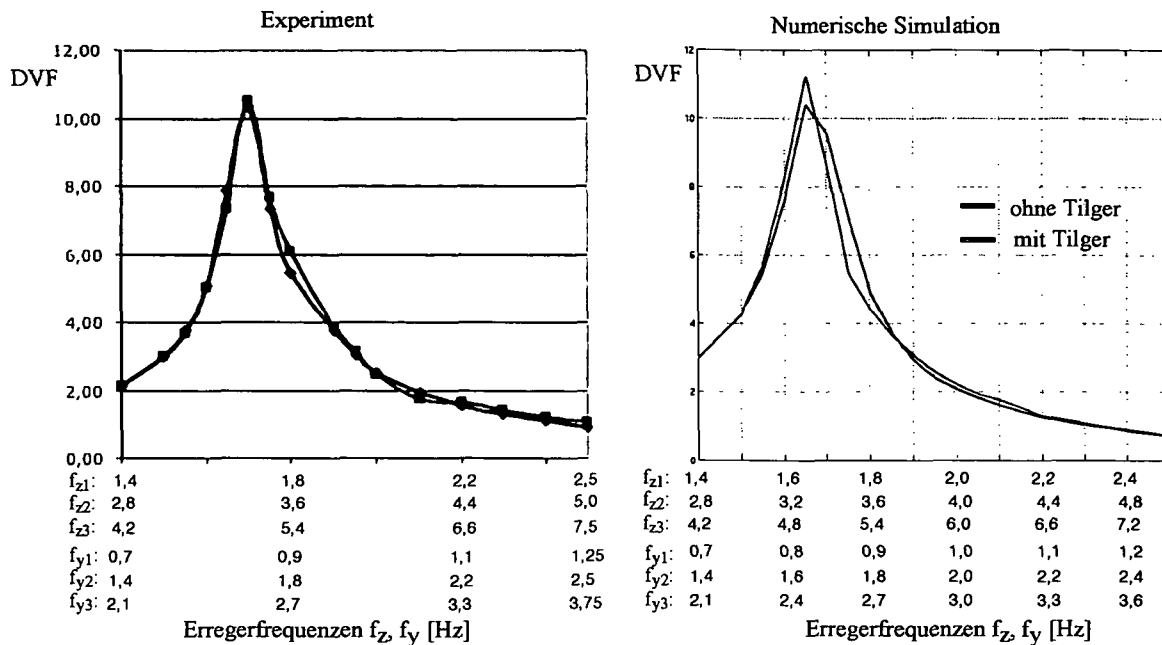


Abb. 4.49: Experimentelles und numerisches Ergebnis des DVF des Hauptsystems mit und ohne Flüssigkeitstilger, Verschiebung $w(t)$; kombinierte horizontale und vertikale Anregung; Erregerfrequenzen: f_{z1} , f_{z2} , f_{z3} und f_{y1} , f_{y2} , f_{y3} ; lineares Dämpfermodell $\zeta_A = 0.127$

Auch im Experiment ergibt sich der DVF des Hauptsystems zufolge kombinierter Anregung durch periodische Funktionen, nahezu identisch zu jenen mit kombinierter harmonischer Anregung.

4.7 Schlussbemerkung

Zusammenfassend kann festgestellt werden, dass der optimal abgestimmte Flüssigkeitstilger die horizontale Schwingungsantwort des sowohl numerisch als auch experimentell untersuchten Brückemodells stark reduziert. Entgegen der Schlussbemerkung in Kapitel 3, Abschnitt 3.7, wird die Bewegungsgleichung des Flüssigkeitstilgers mit linearisiertem Dämpfungsglied ζ_A betrachtet. Diese viskose Linearisierung der Turbulenzdämpfung δ_L ist aber nur dann zulässig, wenn die hinreichende Stabilitätsbedingung zur sicheren Vermeidung von Parameterresonanz erfüllt ist, Gl. (3-48). In jenen Fällen wo die optimale linearisierte Dämpfung des

Flüssigkeitstilgers nahe der erforderlichen Dämpfung liegt, muß der Flüssigkeitstilger unbedingt in nichtlinearer Modellierung betrachtet werden, wie in den numerischen Simulationen der Kapitel 6 und 7 ausgeführt. Die durch Tilgung erzielte Reduktion kann noch in eine äquivalente Dämpfung umgerechnet werden, entsprechend einer Steigerung der Dämpfung des Hauptsystems - Brücke von $\zeta_v = 0.04$ auf rund $\zeta_{res} = 0.10$, wie in Abb. 4.48 eingetragen. Es wurde außerdem gezeigt, dass in der vorgelegten numerischen und experimentellen Untersuchung, eine Nachbesserung der optimalen Entwurfparameter des Flüssigkeitstilgers unter Berücksichtigung aller Einwirkungen entfallen kann, d.h. die Optimierung des linearisierten Modells nach Den Hartog liefert hier befriedigende Werte.

LITERATUR

- ¹ Walther, R., 1994, 'Schrägseilbrücken', Beton-Verlag GmbH, Düsseldorf.
- ² Roik, K., Albrecht, G., Weyer, U., 1986, 'Schrägseilbrücken', Ernst&Sohn, Verlag für Architektur und technische Wissenschaften Berlin.
- ³ Petersen, C., 2001, 'Schwingungsdämpfer im Ingenieurbau', Herausgeber: Maurer Söhne GmbH & Co.Kg, München, Innovation im Stahl.
- ⁴ Bachmann, H., 1988, 'Schwingungsprobleme bei Fußgängerbauwerken', Bauingenieur 63, Seite 67 – 75. [Seite 134]
- ⁵ Xue, S.D., Ko, J.M., Xu, Y.L., 2000, 'Tuned liquid column damper for suppressing pitching motion of structures', Engineering Structures, Vol.23, p. 1538-1551.
- ⁶ Ziegler, F., 1998, 'Technische Mechanik der festen und flüssigen Körper', Dritte, verbesserte Auflage, Springer Wien New York.
- ⁷ Bachmann, H., 1995, 'Erdbebensicherung von Bauwerken', Birkhäuser Verlag, Basel-Boston-Berlin.
- ⁸ Ramberger, G., Schnaubelt, S., 1998, 'Stahlbau', 5., korrigierte Auflage, Mainz Verlag Schulbuch, Wien.
- ⁹ Ramberger, G., 2002, 'Skriptum zur Vorlesung Stahlbau 2', erhältlich am Institut für Stahlbau (E213), TU-Wien, A-1040 Wien.
- ¹⁰ Weaver, W., Timoshenko, S.P. und Young, D.H., 1990, 'Vibration problems in engineering', 5th Edition, New York: J. Wiley & Sons.
- ¹¹ Nowacki, W., 1974, 'Baudynamik', Neubearbeitung der zweiten polnischen Auflage, Springer-Verlag, Wien New York.
- ¹² Chwalla, K., 1950, 'Über die gekoppelten Bieigungs- und Torsionsschwingungen belasteter Stäbe mit offenem einfachsymmetrischen Querschnitt', Österreichische Bauzeitschrift, Nr.5 (1950), S.60-64, 79-83.
- ¹³ Fink, J., 1992, 'Dynamische und aeroelastische Stabilitätsuntersuchung der Ausfachungsstäbe von Hochspannungsmasten', Dissertation, Institut für Stahlbau (E213), TU-Wien, A-1040 Wien.
- ¹⁴ Adam, C., Heuer, R. und Druml, A., 1997, 'Biegedrillschwingung elastischer kontinuierlicher Träger mit offenem, einfach symmetrischen Querschnitt', in: Österreichische Ingenieur- und Architekten-Zeitschrift (ÖIAZ), 142. Jg., Heft 3/1997, Seite 175-179.

¹⁵ Luza, G., 1997, 'Personeninduzierte Schwingungen von biege- und torsionssteifen, gedämpften Brücken', Dissertation, Institut für Stahlbau (E213), TU-Wien, A-1040 Wien.

¹⁶ Druml, A., 1996, 'Biegedrillschwingungen elastischer kontinuierlicher Balkentragwerke – ein analytischen Näherungsverfahren', Diplomarbeit, Institut für Allgemeine Mechanik (E201), TU-Wien, A-1040 Wien.

¹⁷ Bronstein, I.N., Semendjajew, K.A., Musiol, G., Mühlig, H., 1977, 'Taschenbuch der Mathematik', 1. Auflage, Verlag Harri Deutsch, Thun und Frankfurt am Main.

¹⁸ Ziegler, F., 1995, 'Mechanics of Solids and Fluids', Second Edition, Springer-Verlag New York.

¹⁹ Reiterer, M., Ziegler, F., 2004, 'Control Of Pedestrian-Induced Vibrations Of Footbridges Using Tuned Liquid Column Dampers', in Proceedings of 5th Int. Congress on Bridges across the Danube 2004, Novi Sad, Serbia and Montenegro, June 24th-26th, 12 pages, article in press.

²⁰ Heymann, J., Lingener, A., 1986, 'Messverfahren der experimentellen Mechanik', Springer Verlag, Berlin.

DANKSAGUNG

* Ein Dank gebührt der Hochschuljubiläumsstiftung der Stadt Wien, die mit ihrer finanziellen Unterstützung den Ankauf zahlreicher für die durchgeführten Experimente unbedingt erforderlicher Geräte ermöglicht haben.

** Besonders danken möchte ich Herrn Dipl.-Ing. Dr.techn. Markus J. Hochrainer, der die Entwicklung des neuartigen berührungslosen Schwingerregers geleitet und in gemeinsamer Arbeit realisiert hat.

5. *PERSONENINDUZIERTE SCHWINGUNGEN*

In diesem Abschnitt der Dissertation werden personeninduzierte Schwingungen von Brückenkonstruktionen analysiert. Bereits im Kapitel 2, Abschnitt 2.3.5 sowie im Kapitel 4, Abschnitt 4.1 wurde anhand ausgewählter exemplarischer Beispiele auf die Problematik der durch Fußgänger induzierten erzwungenen Schwingungen von Brücken hingewiesen. Die dynamischen Kontaktkräfte des komplexen Systems „Mensch“, während des Bewegungsvorganges, in vertikaler Richtung und in beiden horizontalen Richtungen, nämlich längs und quer zur Fortbewegungsrichtung, werden analysiert und anhand von Feldversuchen belegt. Insbesondere wird auf das für Brücken äußerst gefährliche Rückkopplungs- bzw. Synchronisationsphänomen eingegangen und eine mathematische Formulierung zu dessen sicherer Vermeidung präsentiert. Mit Hilfe einer Analogie von personeninduzierten zu winderregten Schwingungen wird eine einfache Stabilitätsbedingung geschaffen, dessen Einhaltung die Anfachung von selbsterregten Schwingungen verhindert. Erstmalig wird in diesem Abschnitt die Parameterresonanzgefahr von Brücken zufolge Fußgängeranregung untersucht und eine zweite daraus resultierende hinreichende Grenzbedingung vorgelegt. Ziel dieses Kapitels ist es, eine wirklichkeitsnahe mechanische Formulierung des sich bewegenden Fußgängers zu erhalten.

5.1 Dynamische Kontaktkräfte aus menschlichen Bewegungsvorgängen

Der menschliche Körper ist ein äußerst komplexes Gebilde dass bei Bewegungsvorgängen die unterschiedlichsten dynamischen Kontaktkräfte hervorruft. Grundsätzlich kann, vorerst ohne nähere Betrachtung der Wirkungsrichtung, zwischen periodischen und transienten Kontaktkräften unterschieden werden, wobei periodische vorwiegend aus den Bewegungsformen

- Gehen
- Laufen
- rhythmisches Hüpfen
- rhythmisches horizontales Hin- und Herbewegen des Körpers

und transiente bei Ausüben eines Einzelstoßes, z.B. Einzelsprung oder Einzeltritt, entstehen. Die zugehörigen Schrittfrequenzen f_s für Gehen, Laufen und Hüpfen sind für die resultierenden dynamischen Kontaktkräfte von wesentlicher Bedeutung. Als grober Mittelwert kann eine Schrittfrequenz von 2 Hz für normales Gehen bzw. 2.5 Hz für normales Laufen und Hüpfen angenommen werden, angegeben in Bachmann und Ammann¹. In der Tabelle 1 sind weitere übliche Schrittfrequenzen beim Gehen und Laufen sowie Frequenzen beim Hüpfen am Ort einer Person wiedergegeben, wie von Baumann und Bachmann² dargelegt.

Tabelle 1: Übliche Schritt- bzw. Hüpfbereichsbereiche in Hz , Quelle: Baumann und Bachmann [2]

	insgesamt	langsam	normal	rasch
Gehen	1.4 – 2.4	1.4 – 1.7	1.7 – 2.2	2.2 – 2.4
Laufen	1.9 – 3.3	1.9 – 2.2	2.2 – 2.7	2.7 – 3.3
Hüpfen	1.3 – 3.4	1.3 – 1.9	1.9 – 3.0	3.0 – 3.4

Der Mensch erzeugt beim Gehen und Laufen sowohl eine Anregung in vertikaler Richtung als auch in beiden horizontalen Richtungen, nämlich eine Vortriebskraft (längs) und eine Seitenführungskraft (quer zur Fortbewegungsrichtung). Die wichtigsten Parameter welche den zeitlichen Verlauf der von einem Fußgänger induzierten dynamischen Kontaktkräfte beeinflussen sind,

- Schrittfrequenz f_s
- Art des Aufsetzens des Fußes auf dem Boden
- Personengewicht $G = m_p g$
- Geschlecht
- Schuhwerk bzw. Fußbekleidung
- Beschaffenheit der Gehfläche.

Im Falle von Hüpfprozessen ist der zeitliche Verlauf noch zusätzlich von der Art des Hüpfens (normal oder intensiv, d.h. möglichst hohes Hüpfen) abhängig, wobei hier primär eine Anregung in vertikaler Richtung erzeugt wird.

5.2 Kontaktkraftwirkung in vertikaler Richtung

Die gesamte bei den Bewegungsvorgängen Gehen und Laufen induzierte vertikale Kontaktkraft kann in den statischen Anteil Eigengewicht (Körpergewicht $G = m_p g$) und in einen dynamischen Anteil als Summe von einzelnen harmonischen Funktionen („Harmonische“) zerlegt werden. Die Frequenzen der Harmonischen entsprechen dabei einem ganzzahligen Vielfachen der Schritt- bzw. Hüpfgrundfrequenz. Der zeitliche Verlauf der von einer Einzelperson induzierten vertikalen Gesamtkontaktkraft $F_{pz}(t)$ ergibt sich somit zu,

$$F_{pz}(t) = m_p g \left[1 + \sum_{n=1}^N \frac{a_{n,z}}{g} \sin(n\omega_s t - \varphi_{n,z}) \right], \quad \omega_s = 2\pi f_s, \quad (5-1)$$

wo m_p die Gesamtmasse einer Einzelperson, $a_{n,z}$ die vertikalen Beschleunigungsanteile der einzelnen Harmonischen, f_s die Schritt- bzw. Hüpf Frequenz und $\varphi_{n,z}$ den Phasenwinkel, also die zeitliche Phasenverschiebung, der einzelnen Harmonischen definieren. Für die Beschleunigungsanteile bis zur dritten Harmonischen (Amplitude)

können aufgrund von Messungen etwa die folgenden Werte angenommen werden, (nur für Lastfall Gehen, Bodenkontakt ständig vorhanden),

$$\begin{aligned} a_{1,z} &\approx 0.4 \, g && \text{für } f_s \text{ im Bereich von } 2.00 \, \text{Hz}, \\ a_{2,z} = a_{3,z} &\approx 0.1 \, g && \text{für } f_s \text{ im Bereich von } 2.00 \, \text{Hz}. \end{aligned}$$

Da die Schrittfrequenz, die Art des Schuhwerks und die individuelle unterschiedliche Weise des Auftretens und Abrollens der Füße einerseits, wie auch Schwingungen der Unterlage (Brücke) andererseits von Einfluss auf die Kontaktkräfte sind, können diese Größen leicht variieren, wie in [7, Seite 190] angegeben. Die Phasenwinkel $\varphi_{1,z}$, $\varphi_{2,z}$ und $\varphi_{3,z}$ dieser ersten drei Harmonischen hängen von verschiedenen Parametern ab, und können für numerische Simulationen näherungsweise mit $\varphi_{1,z} = 0$ und $\varphi_{2,z} = \varphi_{3,z} \cong \pi/2$ angenommen werden. Bei der Berechnung einer erzwungenen Schwingung für den Lastfall Gehen ist jedoch in den meisten Fällen nur eine einzige Harmonische maßgebend, daher spielt die Phasenverschiebung nur eine untergeordnete Rolle, wie in [1, Seite 20] näher erläutert wird. Diese Tatsache wird im Kapitel 4, Abschnitt 4.4 und 4.6, sowohl numerisch als auch experimentell bestätigt.

Es ist noch anzumerken, dass für den Lastfall Gehen eine Betrachtung der ersten drei Harmonischen als ausreichend einzustufen ist, ersichtlich anhand der Größe der Beschleunigungsanteile $a_{n,z}$, Abb. 5.6. Nur in sehr seltenen Fällen – vor allem aber bei Hüpfprozessen – können höhere Harmonische eine nicht unwesentliche Rolle spielen, (z.B. Anregung einer Struktur mit höherer Grund- oder Oberfrequenz durch ausgeprägte obere harmonische Beschleunigungsanteile). In der Abb. 5.1 ist der, mittels Gl. (5-1) berechnete, zeitliche Verlauf der gesamten auf die Gehfläche ausgeübten vertikalen Kontaktkräfte eines einzelnen Fußgängers beim Gehen mit einer Schrittfrequenz von $2 \, \text{Hz}$ dargestellt.

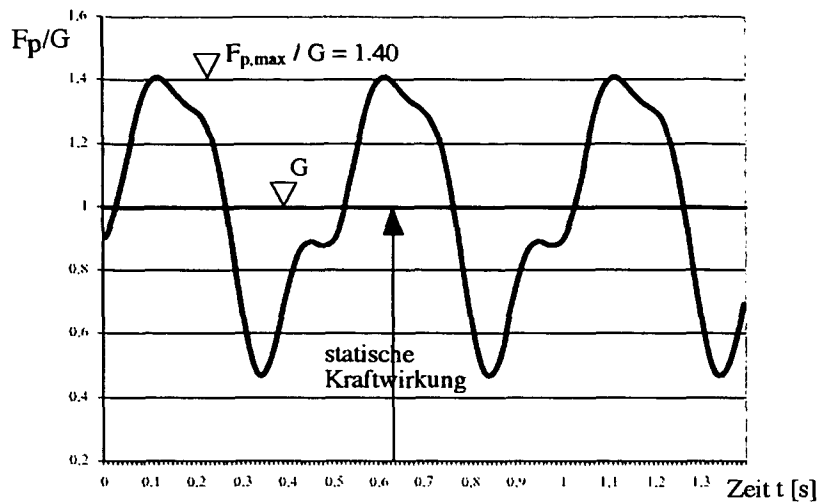


Abb. 5.1: Zeitlicher Verlauf der gesamten vertikalen Kontaktkräfte eines einzelnen Fußgängers beim Gehen mit einer Schrittfrequenz von 2 Hz , berechnet mittels Gl. (5-1)

Die Abb. 5.2 zeigt die zugehörigen zeitlichen Verläufe der ersten drei harmonischen Beschleunigungsanteile die zur Generierung der Abb. 5.1 verwendet wurden, wie in Bachmann et al. [7, Seite 189] angegeben.

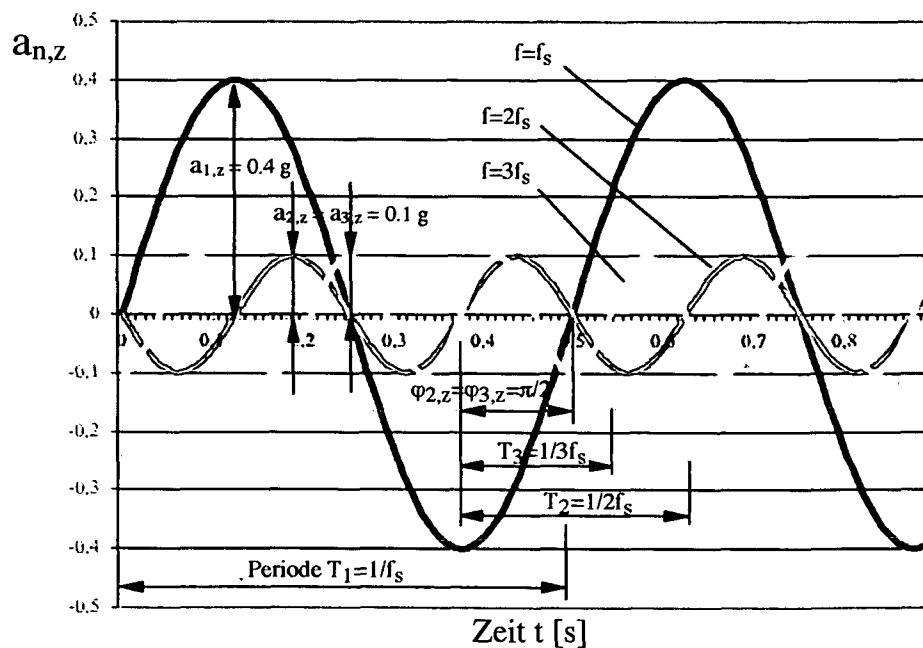


Abb. 5.2: Zeitlicher Verlauf der ersten drei harmonischen Beschleunigungsanteile, Quelle: Bachmann et al. [7, Seite 189]

Bei der vertikalen Kraftwirkung die aus dem Bewegungsprozess Gehen resultiert wird ein ständiger Bodenkontakt mit der Unterlage vorausgesetzt. Nun kommt es jedoch ab einer bestimmten Geschwindigkeit des Bewegungsprozesses (Übergang vom Gehen zum Laufen, angegeben in Tabelle 1) und insbesondere bei mutwilligen Hüpfanregungen der Konstruktion zu einer zeitweiligen Unterbrechung des Bodenkontaktes, d.h. es tritt dann nur noch ein einziges Kraftmaximum auf. Der zeitliche Verlauf der vertikalen Kontaktkräfte wird dann durch eine Folge halbsinusförmiger Impulse dargestellt („Halbsinus-Modell“), wobei die gesamte vertikale Kontaktkraftwirkung wie folgt definiert wird,

$$F_{Pz}(t) = \begin{cases} k_p m_p g \sin(\pi t / t_p) & \text{für } t \leq t_p, \\ 0 & \text{für } t_p < t \leq T_p. \end{cases} \quad (5-2)$$

In Gl. (5-2) definiert t_p die gewählte Kontaktdauer der laufenden oder am Ort hüpfenden Person, weiters definiert $T_p = 1 / f_s$ die Periodendauer der Anregung und $k_p = F_{Pz, \max} / G$ stellt einen dimensionslosen dynamischen Stoßfaktor dar, welcher in Abhängigkeit von t_p / T_p der Abb. 5.3 zu entnehmen ist, definiert in [1, Seite 21].

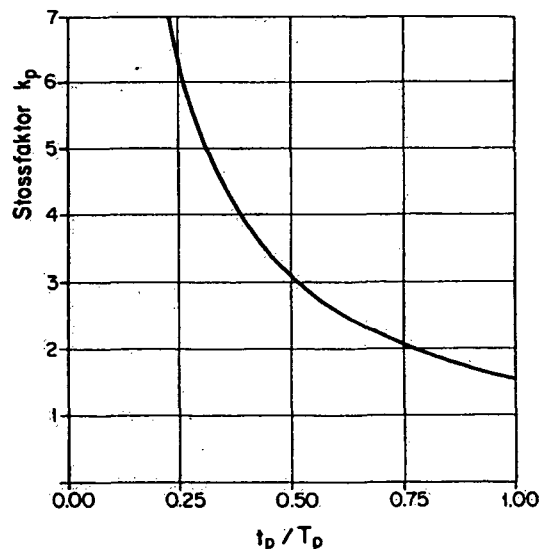


Abb. 5.3: Spektrum des dynamischen Stoßfaktors k_p für Laufen und Hüpfen am Ort, Quelle: Bachmann und Ammann [1, Seite 21]

Wählt man z.B. als Hüpf Frequenz $f_s = 2.00 \text{ Hz}$ und als Kontaktdauer $t_p = 0.25 \text{ s}$, dann ergibt sich der dynamische Stoßfaktor aus Abb. 5.3 zu $k_p = 3.00$. Einsetzen dieser Parameter in die Gl. (5-2) liefert den in Abb. 5.4 exemplarisch dargestellten zeitlichen Verlauf der vertikalen Kontaktkräfte einer Einzelperson durch Hüpfen am Ort.

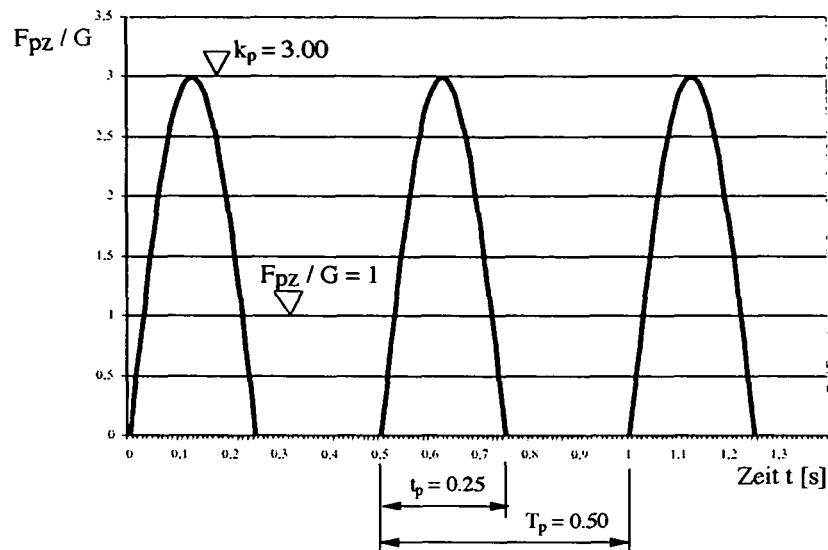


Abb. 5.4: Zeitlicher Verlauf der vertikalen Kontaktkräfte einer Person durch Hüpfen am Ort mit einer Frequenz von $f_s = 2.00 \text{ Hz}$; Halbsinus-Modell, berechnet mittels Gl. (5-2)

In diesem Beispiel erreicht das Kraftmaximum den 3-fachen Wert des Eigengewichtes der Einzelperson, $k_p = 3.00$. Wesentliche Einflussgrößen sind hierbei vor allem die Hüpf Frequenz, die Art des Hüpfens (hoch/niedrig) und des Schuhwerks. Der zeitliche Verlauf gemäß dem Halbsinus-Modell, Abb. 5.4, kann analog zu Gl. (5-1) auch als Summe von Eigengewicht und harmonischen Beschleunigungsanteilen $a_{n,z}$ dargestellt werden,

$$F_{Pz}(t) = m_P g \left[1 + \sum_{n=1}^N \frac{a_{n,z}}{g} \sin(n\omega_s t - \varphi_{n,z}) \right], \quad (5-3)$$

wo bei einem Ansatz von vier Harmonischen, unter Berücksichtigung von $t_p / T_p = 0.50$ woraus $a_{3,z} = 0$ aus Abb. 5.5 folgt, die Phasenwinkel $\varphi_{1,z} = 0$, $\varphi_{2,z} = \pi / 2$ und $\varphi_{4,z} = 0$ zu wählen sind. Die zugehörigen harmonischen Beschleunigungsanteile

erhält man aus einer Fourieranalyse, dargelegt z.B. in Ziegler³, Seite 476. In der Abb. 5.5 sind die Ergebnisse der einzelnen Beschleunigungsanteile in Abhängigkeit vom Verhältnis t_p / T_p graphisch dargestellt.

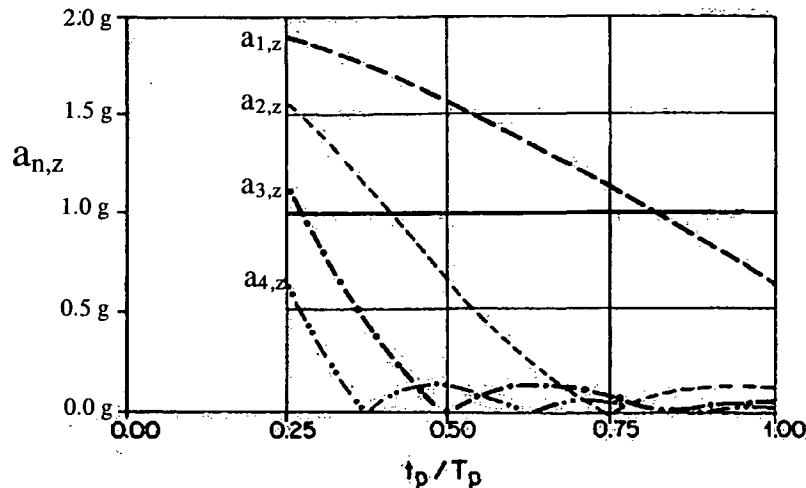


Abb. 5.5: Spektrum der Beschleunigungsanteile der einzelnen Harmonischen beim Halbsinus-Modell, Quelle: Bachmann und Ammann [1, Seite 23]

Man stellt fest, dass je nach dem Verhältnis von t_p / T_p sehr wohl auch die höheren Harmonischen maßgebende Beschleunigungsanteile aufweisen. Es soll an dieser Stelle nochmals ausdrücklich auf die Bedeutung höherer Harmonischer des zeitlichen Verlaufs der vertikalen Kontaktkräfte für Brückenschwingungen hingewiesen werden. Die Resonanzschwingungen von Brücken, wo die relativ niedrige Grundfrequenz f_0 durch die erste Harmonische f_s angeregt wird, ist der einfachste Fall. Manchmal werden aber Brücken mit einer höheren Grundfrequenz durch obere Harmonische angeregt, es ist dann z.B. $2f_s = f_0$ oder $3f_s = f_0$, vergleiche mit dem klassischen „Glockenturmproblem“, wie z.B. in Ziegler [3, Seite 444] oder Eibl et al.⁴ dargelegt.

Abschließend wird noch angemerkt, dass die vertikale Kontaktkraftwirkung durch Gehen und Laufen im allgemeinen als eine örtlich stationäre Anregung aufgefasst werden kann. Die relativ langsame Fortbewegung in Längsrichtung der Brücke hat auf die vertikale Anregung praktisch keine nennenswerten Auswirkungen.

5.3 Kontaktkraftwirkung in horizontaler Richtung (längs und quer zur Fortbewegungsrichtung)

Beim Gehen und Laufen üben Personen sehr wohl auch horizontale Kontaktkräfte, nämlich eine Vortriebskraft (längs) und eine Seitenführungskraft (quer zur Fortbewegungsrichtung), in einer Größenordnung von bis zu 30% des Körpereigengewichtes, auf die Unterlage aus. In der Abb. 5.6 sind die Beschleunigungsanteile $a_{n,z}$ bzw. $a_{n,y}$ der einzelnen Harmonischen die durch einen Fußgänger, Schrittfrequenz $f_s = 2.00 \text{ Hz}$, vertikal und im Vergleich dazu horizontal „quer“ hervorgerufen werden, abgebildet, aus [1, Seite 25].

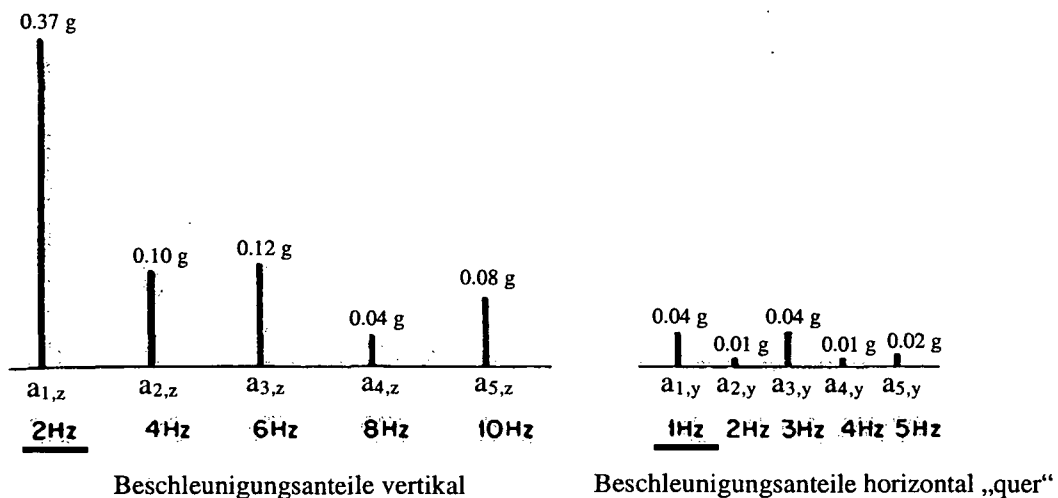


Abb. 5.6: Spektrum der Beschleunigungsanteile der einzelnen Harmonischen die durch einen Fußgänger, Schrittfrequenz $f_s = 2.00 \text{ Hz}$, vertikal und im Vergleich dazu horizontal „quer“ hervorgerufen werden, Quelle: Bachmann und Ammann [1, Seite 25]

Man erkennt, dass die dynamischen Beschleunigungsanteile in horizontaler Querrichtung vor allem in der halben und anderthalbfachen Schrittfrequenz auftreten. Die absolute Bewegung des menschlichen Massenmittelpunktes mit Verschiebungsamplituden von, im allgemeinen ca. 10 mm , quer zur Fortbewegungsrichtung, ist Folge von dynamischen Kraftwirkungen (der Seitenführungskraft) in der Kontaktfläche zur Unterlage. Dabei ist zu beachten, dass die Pendelfrequenz des Massenmittelpunktes exakt der halben Schrittfrequenz f_s entspricht, d.h. sie liegt im Bereich von 0.7 bis 1.2 Hz bei normalen Schrittfrequenzen (Lastfall Gehen), wie anhand der Tabelle 1 ersichtlich ist. Das seitliche Wandern des menschlichen

Massenmittelpunktes beim Gehen und die Induzierung einer horizontalen Schwingung mit 1.00 Hz ($f_s = 2.00\text{ Hz}$) ist in der Abb. 5.7 schematisch dargestellt, aus Nakamura und Fujino⁵

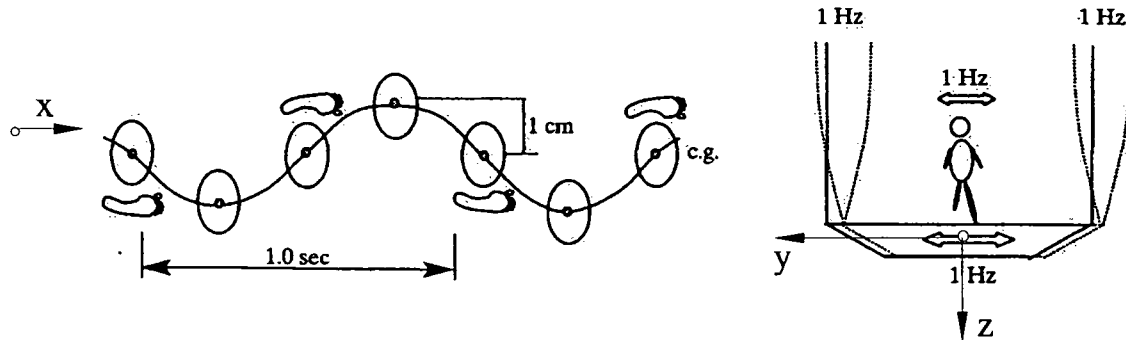


Abb. 5.7: Seitliches Wandern des menschlichen Massenmittelpunktes beim Gehen, Quelle: Nakamura und Fujino [5]

Es ist noch anzumerken, dass die höheren harmonischen Beschleunigungsanteile der induzierten Seitenführungskraft sehr wohl berücksichtigt werden müssen. Je nach Person (Eigengewicht, Art des Gehens, usw.) und Bewegungszustand der Unterlage kann die Größe der einzelnen Beschleunigungsanteile natürlich schwanken, wie in [7, Seite 189] ausführlich dargelegt. Der zeitliche Verlauf der von einer Einzelperson induzierten Seitenführungskraft $F_{py}(t)$ ergibt sich wiederum analog zu Gl. (5-1) als Summe von einzelnen harmonischen Beschleunigungsanteilen

$$F_{py}(t) = m_p g \sum_{n=1}^N \frac{a_{n,y}}{g} \sin\left(n \frac{\omega_s}{2} t - \varphi_{n,y}\right), \quad \omega_s = 2\pi f_s. \quad (5-4)$$

Die Abb. 5.8 zeigt den, mittels Gl. (5-4) berechneten, zeitlichen Verlauf der Seitenführungskraft die durch einen einzelnen Fußgänger mit einer Schrittfrequenz von $f_s = 2.00\text{ Hz}$ induziert wird, unter Verwendung des in Abb. 5.6 dargestellten Amplitudenspektrums.

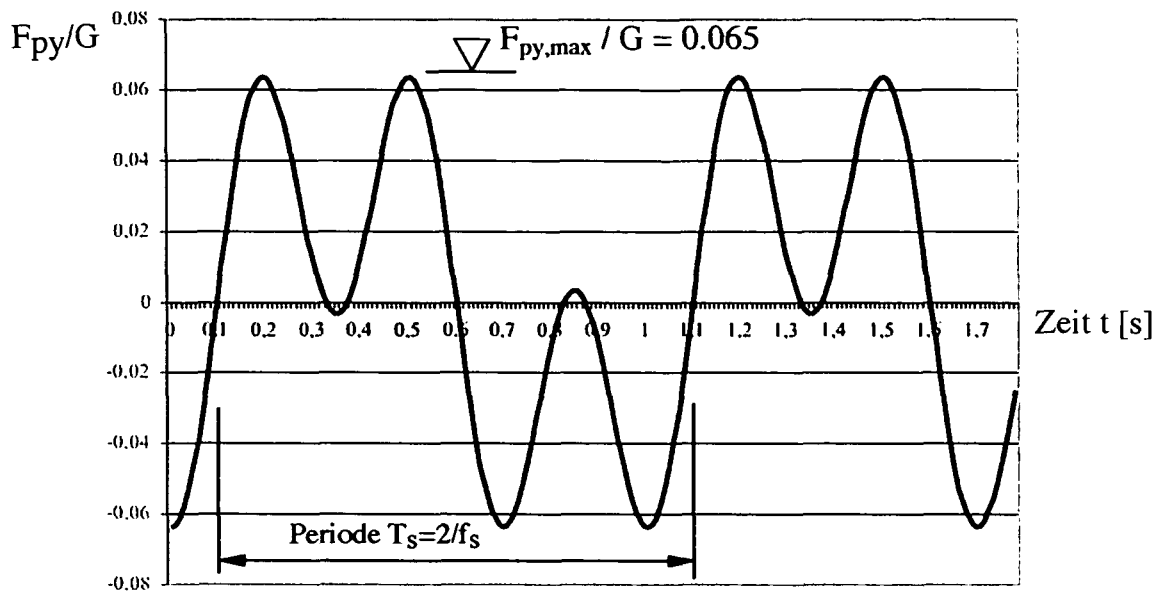


Abb. 5.8: Zeitlicher Verlauf der Seitenführungskraft die durch einen einzelnen Fußgänger mit einer Schrittfrequenz von 2 Hz induziert wird, unter Verwendung des in Abb. 5.6 dargestellten Amplitudenspektrums; berechnet mittels Gl. (5-4)

Dabei werden lediglich die beiden dominierenden Harmonischen $a_{1,y} = 0.04\text{ g}$ und $a_{3,y} = 0.04\text{ g}$ mit einem Phasenwinkel von $\varphi_{1,y} = \pi/5$ und $\varphi_{3,y} = 3\pi/5$ in Rechnung gestellt, wie in Schäpertöns und Schäfer⁶ angegeben. Obwohl die durch Personen beim Gehen und Laufen ausgeübten horizontalen Kontaktkräfte im Vergleich zu den vertikalen Kontaktkräften relativ klein sind, reichen sie doch aus, um bei weichen und somit niederfrequenten Brückentragwerken starke Querschwingungen anzufachen, wie in Kapitel 4, Abschnitt 4.1, anhand exzessiver Querschwingungen der Millennium Bridge in London angemerkt wurde. Insbesondere werden die in Kapitel 6 dargelegten numerischen Studien von ausgewählten Brücken, im Hinblick auf diese gefährliche Anregungsart durchgeführt.

Der Vollständigkeit halber sind in der Abb. 5.9 die Beschleunigungsanteile der einzelnen Harmonischen die durch einen Fußgänger, Schrittfrequenz $f_s = 2.00\text{ Hz}$, in horizontaler Längsrichtung hervorgerufen werden dargestellt, aus [1, Seite 25].

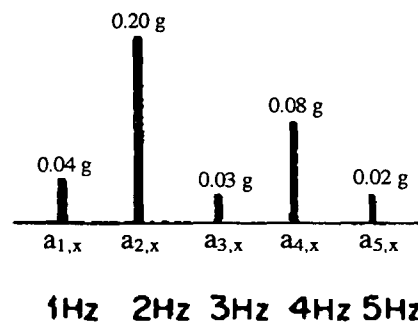


Abb. 5.9: Spektrum der Beschleunigungsanteile der einzelnen Harmonischen die durch einen Fußgänger, Schrittfrequenz $f_s = 2.00 \text{ Hz}$, in horizontaler Längsrichtung hervorgerufen werden, Quelle: Bachmann und Ammann [1, Seite 25]

Man erkennt, dass die dynamischen Beschleunigungsanteile dominierend in der ein- und zweifachen Schrittfrequenz von $f_s = 2.00 \text{ Hz}$ auftreten. Der zeitliche Verlauf der Vortriebskraft die durch einen einzelnen Fußgänger mit einer Schrittfrequenz von $f_s = 2.00 \text{ Hz}$ induziert wird, ergibt sich wiederum aus Gl. (5-4), wobei der Index y durch x zu ersetzen ist, unter Verwendung des in Abb. 5.9 dargestellten Amplitudenspektrums, wie in Abb. 5.10 illustriert.

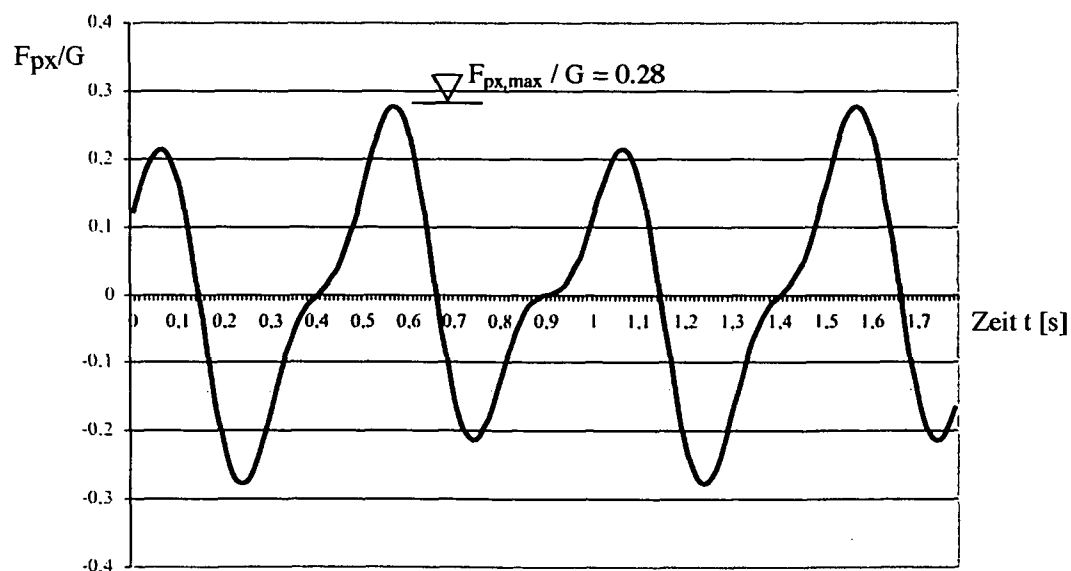


Abb. 5.10: Zeitlicher Verlauf der Vortriebskraft die durch einen einzelnen Fußgänger mit einer Schrittfrequenz von 2 Hz induziert wird, berechnet mittels der modifizierten Gl. (5-4)

Für die Generierung der Kontaktkraft wurden hier die drei maßgebenden harmonischen Anteile $a_{1,x}$, $a_{2,x}$ und $a_{4,x}$ mit den zugehörigen Phasenwinkeln $\varphi_{1,x} = 4\pi/5$, $\varphi_{2,x} = -2\pi/5$ und $\varphi_{4,x} = \pi/5$ herangezogen, wie in Schäpertöns und Schäfer [6] angegeben. Man erkennt, dass die gesamte Vortriebskraftwirkung beinahe 30% des Körpereigengewichtes der Versuchsperson erreicht.

Abschließend wird noch angemerkt, dass die rechnerisch anzusetzenden Größen a_n und φ_n in Abhängigkeit von der Schrittfrequenz f_s , von der Art des Schuhwerks und von der individuell unterschiedlichen Weise des Auftretens und Abrollens der Füße richtungsmäßig nicht unwesentlich variieren können. Weitere Empfehlungen für die anzusetzenden Größen für Gehen, Laufen und Hüpfen (sowie andere rhythmische menschliche Körperbewegungen) in Funktion der Schritt- bzw. Hüppfrequenz finden sich in Bachmann et al.⁷, Seite 189.

5.4 Einwirkung von mehreren Personen

Die obigen Ausführungen beziehen sich auf die Einwirkung durch eine einzige Person. Fußgängerbrücken werden jedoch im Allgemeinen gleichzeitig durch mehrere Personen beansprucht. Dabei ist zu beachten, dass die obere Grenze der Personendichte bis zu der sich die dynamischen Kontaktkräfte noch vollständig ausbilden können bei 1.6 bis 1.8 Personen je m^2 liegt, was einer ruhenden Belastung von 1100 bis 1400 N/m^2 entspricht, wie in [1, Seite 25] angegeben. Grundsätzlich müssen die folgenden zwei Arten von Kontaktkrafteinwirkungen unterschieden werden,

- Regellose Einwirkung,
- Synchrone Einwirkung,

wobei eine vollständige Trennung dieser beiden Einwirkungsarten nicht möglich ist. Betrachtet man nämlich regellose Einwirkungen von Fußgängern auf einer schwingungsfähigen Brückenstruktur so erfolgt ab einer bestimmten Größe der

vertikalen bzw. horizontalen Schwingungsamplitude der Brücke eine Anpassung der Schrittfrequenz an die Eigenfrequenz und damit Synchronisation der anfangs regellos gehenden Personen, wie Schulze⁸ festgestellt hat. Dieser Rückkopplungs- bzw. Synchronisationseffekt wird in Abschnitt 5.4.2 noch ausführlich behandelt. Ein ähnlicher Effekt zeigt sich auch auf rollenden Schiffen, wo Passagiere ihren Schritt nahezu zwangslos an die Rollbewegung des Schiffes anpassen, („Seemannsgang“).

5.4.1 Regellose Einwirkung auf starrer und unbeweglicher Unterlage

Bei der regellosen Einwirkung auf einer starren und unbeweglichen Unterlage, d.h. ein Anpassungseffekt der Personen wird ausgeschlossen (keine Synchronisation), sind die Schrittfrequenzen beim Gehen oder Laufen und das Eigengewicht der beteiligten Personen innerhalb eines bestimmten Bereiches nach einer Häufigkeitskurve verteilt. Die dynamischen Einwirkungen vieler Fußgänger werden sich daher in der Zeit abwechselnd sowohl unterstützen als auch teilweise kompensieren. Exakte Voraussagen sind kaum möglich, da viele verschiedene Parameter und Zufälligkeiten eine Rolle spielen. Für praktische Zwecke hat sich jedoch der Ansatz nach Matsumoto⁹ als genügend genau erwiesen. Dieser nimmt eine Poisson-Verteilung für die Ankunftswahrscheinlichkeit der Fußgänger an. Demnach kann ein Faktor Λ definiert werden, mit dem die für einen einzigen Fußgänger berechnete Schwingungsamplitude in Brückenmitte zu multiplizieren ist,

$$\Lambda = \sqrt{\lambda T_0} \quad , \quad (5-5)$$

wo der Faktor λ eine mittlere Ankunftsrate (Personen/s für die gesamte Brückenbreite) über einen bestimmten Zeitraum (maximal mögliche Ankunftsrate $\lambda_{\max} = 1.5$ Personen/s und Meter Breite) und T_0 die erforderliche Zeit um die Brücke der Länge L mit der Geschwindigkeit v_s zu passieren ($T_0 = L/v_s$), definieren. Das Produkt λT_0 bestimmt dann die Anzahl der sich bei der mittleren Ankunftsrate gleichzeitig auf der Brücke befindlichen Personen. Zum Beispiel ergibt sich bei einer

Brücke mit $B = 2\text{ m}$ und $L = 26\text{ m}$ beim Durchgang von 100 Personen/Minute ($\lambda = 1.66$ Personen/s) und $v_s \approx 1.5\text{ m/s}$ eine Passierzeit von $T_0 = 17.3\text{ s}$ und damit ein Faktor $\Lambda = 5.4$, d.h. die für einen einzelnen Fußgänger berechnete Schwingungsamplitude in Brückenmitte ist mit dem Faktor 5.4 zu multiplizieren.

5.4.2 Synchronische Einwirkung auf schwingungsfähiger Unterlage – Rückkopplungseffekt

Von wesentlich größerer praktischer Bedeutung als die regellose Einwirkung und damit auch maßgebend für jede dynamische Bemessung eines Brückentragwerkes, ist das gefährliche Phänomen der Rückkopplung bzw. Synchronisation, wie von Newland¹⁰ dargelegt. In Anlehnung an ähnliche Erscheinungen in der Aeroelastik bei Wirbelablösungen an umströmten schwingenden Körpern, wie z.B. in Petersen [15, Seite 74] erläutert, wird auch die aus dem englischen stammende Bezeichnung „Lock-in“ Effekt verwendet.

Bereits im Jahre 1980 vertritt Schulze [8] die später von Bachmann und Ammann [1, Seite 25] im Jahre 1987 bestätigte Auffassung, dass ein Teil der eine Fußgängerbrücke regellos begehenden Passanten die Schritte unbewusst den Schwingungen der Unterlage anzupassen versucht und sich damit synchronisiert. Ausschlaggebend für das Auftreten dieses Phänomens ist die Größe der vorhandenen Schwingungsamplitude der Brückenstruktur. Ab einem bestimmten Schwellenwert ist nämlich kein unbeeinflusstes Gehen bzw. Laufen mehr möglich, man fällt sozusagen aus dem Tritt und passt sich bezüglich Schrittfrequenz f_s und Phasenlage (φ_1) den Schwingungen der Unterlage an. Dieser Schwellenwert ist sowohl richtungs- als auch frequenzabhängig und kann je nach Individuum leicht variieren. Für vertikale Schwingungen der Unterlage mit rund 2 Hz liegt der Schwellenbeiwert bei einer Amplitude von ca. $10\text{--}20\text{ mm}$, wie in [10] angegeben. Für horizontale Schwingungen quer zur Fortbewegungsrichtung mit rund 1 Hz ist er kleiner, in manchen Fällen erfolgt die Synchronisation bereits bei Schwingungsamplituden der Unterlage von 2 bis 3 mm . Wenn nun der individuelle

Schwellenwert einer Person überschritten und die Synchronisation mit der Brückenschwingung erfolgt, tritt die Person nun gewissermaßen in jedes Wellental der Schwingung (mit Phasenverschiebung) womit die Brücke eine resonanzähnliche und damit ungünstige dynamische Anregung erfährt. Die Verschiebungsamplituden nehmen zu, wodurch weitere Personen mit höheren Schwellenwerten in die Synchronisation hereingelockt werden. In bestimmten Fällen wurde eine Synchronisation von mehr als 80% der beteiligten Personen beobachtet.

Als Beispiel wird hier wiederum die Millenium Bridge in London zitiert, wie in Kapitel 4, Abschnitt 4.1 bereits erwähnt, bei deren Eröffnung im Juni 2000 starke Querschwingungen mit einer Frequenz von rund 1 Hz beobachtet wurden. Die horizontalen Schwingungsamplituden erreichten dabei Werte von bis zu 70 mm , angegeben in Dallard et al.¹¹. Im Rahmen der dynamischen Ertüchtigung wurden Laborversuche auf einer quer schwingenden Plattform am Imperial College in London durchgeführt. Diese ergaben, dass sich bei einer horizontalen Schwingungsamplitude der Unterlage von nur 5 mm bereits zwischen 30 bis 50% der Fußgänger (abhängig von der Eigenfrequenz 0.75 bzw. 0.95 Hz) synchronisieren und bei 30 mm sind es bereits bis zu 80%, wie in Abb. 5.11 illustriert.

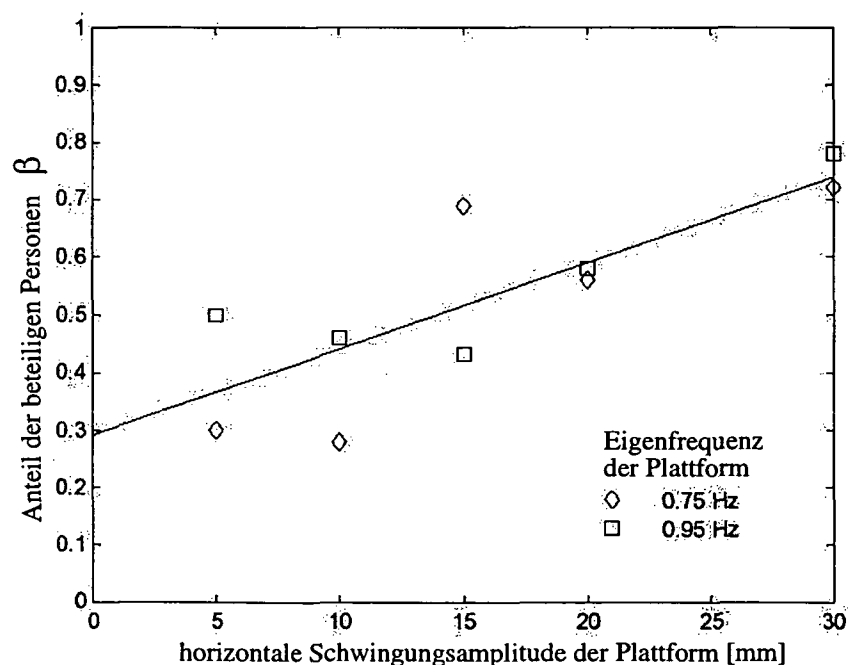


Abb. 5.11: Anteil der bei Synchronisation beteiligten Personen β in Abhängigkeit von der Schwingungsamplitude der Unterlage sowie der Eigenfrequenz, Quelle: Newland [10].

Das Phänomen der Synchronisation führt zu einem für die Brückenstruktur äußerst schädlichen Effekt. Anhand von Laborversuchen wurde nämlich festgestellt, dass die von sich gegenseitig synchronisierenden Fußgängern induzierte Seitenführungskraft, $F_{py}(t)$, näherungsweise proportional zur Schwingungsamplitude der Brücke zunimmt (=Rückkopplungseffekt), wie in Abb. 5.12 dargestellt,

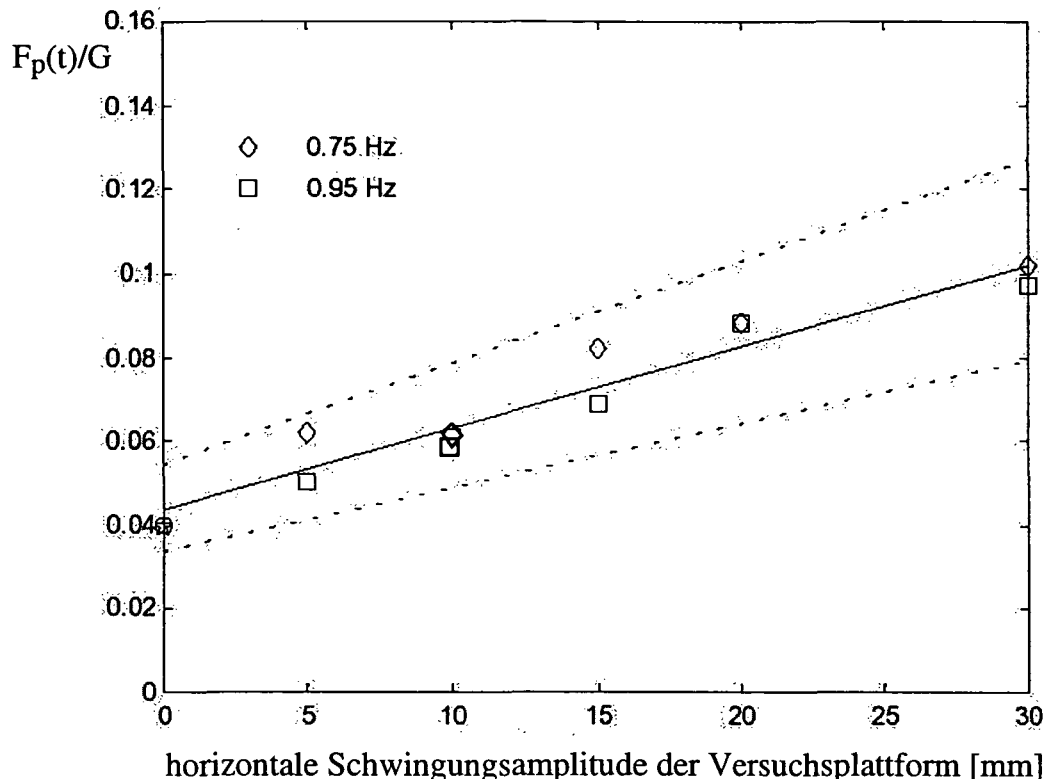


Abb. 5.12: Horizontal induzierte Seitenführungskraft $F_{py}(t)$ bezogen auf das statische Gewicht $G = m_p g$ als Funktion der Schwingungsamplitude der Unterlage, Quelle: Newland [10]

Die Amplitudenabhängigkeit der Erregerfunktion führt unweigerlich auf ein nichtlineares dynamisches System mit entsprechenden Instabilitätsgebieten, ähnlich dem instabilen Verhalten des vertikal erregten und ungenügend gedämpften Flüssigkeitstilgers (Parameterresonanzgefahr, Kapitel 3, Abschnitt 3.2.5). Die numerische Behandlung derartiger Systeme ist äußerst aufwendig und beschränkt sich fast ausschließlich auf Stabilitätsuntersuchungen, d.h. auf das Auffinden von Grenzbedingungen die ein stabiles Verhalten im Verlauf der Zeit garantieren.

Prinzipiell kann festgestellt werden, dass die dynamische Anregung einer Brücke durch synchronisierende Fußgänger einem selbsterregten System entspricht, d.h. ab einem bestimmten Grenzwert der äußeren Erregung (Anzahl der Fußgänger bzw. Größe der Schwingungsamplitude der Unterlage) wird ein instabiles Schwingverhalten des dynamischen Systems angefacht, dadurch wachsen die Schwingungsamplituden bei Annahme einer linearen geschwindigkeitsproportionalen Dämpfung über alle Grenzen. In der Abb. 5.13 ist ein derartiges Verhalten am Beispiel der Millennium Bridge – nördliches Seitenfeld - veranschaulicht, aus Dallard et al.¹²

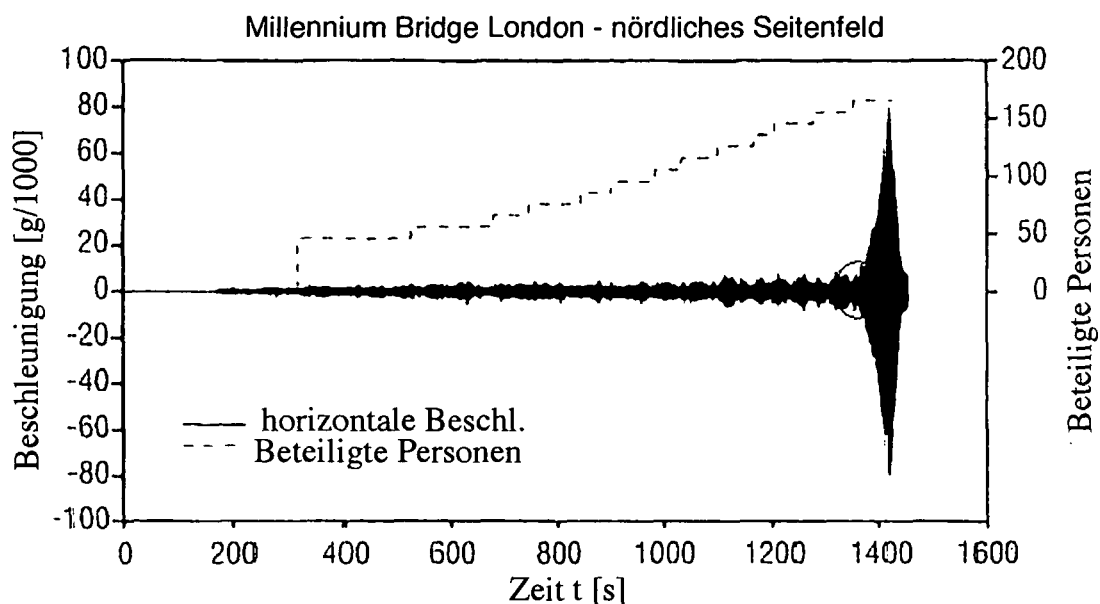


Abb. 5.13: Zeitlicher Verlauf der horizontale Beschleunigung am Beispiel der Millennium Bridge und zugehörige Anzahl der beteiligten Personen, Quelle: Dallard et al. [12]

Man erkennt deutlich das rasche Anwachsen der Schwingbeschleunigung nach Überschreiten einer kritischen Anzahl von Personen in Synchronisation. Die stark nichtlinearen Effekte zufolge anwachsender Schwingungsamplituden führen nun dazu, dass in der Praxis die instabile Bewegung der Brücke im Gegensatz zur linearisierten Theorie beschränkt bleibt. Auch der naturgemäße Gefahreninstinkt des Menschen wirkt sich hier positiv aus und führt bei übermäßig großen Schwingungsamplituden der Brücke zu einem automatischen Abbruch des Fortbewegungszustandes und gleichzeitigem Festhalten am Geländer.

5.5 Untersuchung des Systems Brücke – synchronisierende Fußgänger

Um das schädliche Phänomen der Rückkopplung zu vermeiden, wird in diesem Abschnitt eine geeignete Grenzbedingung erarbeitet welche aus der näheren Betrachtung des Systems Brücke – synchronisierende Fußgänger hervorgeht. Wie bereits zur Vermeidung von Parameterresonanz (Kapitel 3, Abschnitt 3.2.5) ein Schwellenwert für die mindest erforderliche Flüssigkeitsdämpfung ζ_A angegeben werden konnte, definiert in Gl.(3-48), wird analog dazu im Falle des Rückkopplungseffektes nach einer erforderlichen modalen Systemdämpfung der Brückenstruktur ζ_s gesucht. In der Abb. 5.14 ist das mechanische Modell einer Brücke, modale Masse M und modale Steifigkeit K , belastet durch eine, zufolge synchronisierender Fußgänger hervorgerufene, Rückkopplungskraft $F_p(t-\Delta)$ mit Totzeit Δ , dargestellt. Dabei wird nur ein einziger Freiheitsgrad der Brücke mit modaler Lagekoordinate $Y(t)$ betrachtet.

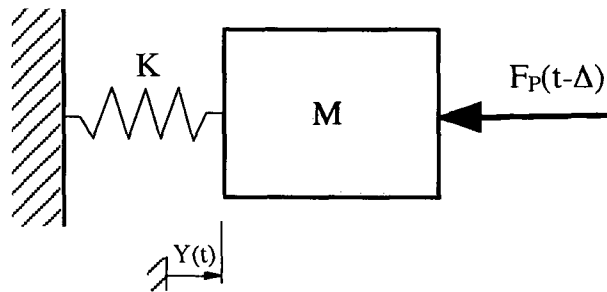


Abb. 5.14: Mechanisches Modell einer Brücke, belastet durch eine, zufolge synchronisierender Fußgänger hervorgerufene, Rückkopplungskraft $F_p(t-\Delta)$ mit Totzeit Δ ; modale Masse M und modale Steifigkeit K ; modale Lagekoordinate $Y(t)$; Quelle: Newland [10]

Die Rückkopplungskraft $F_p(t-\Delta)$ mit Totzeit Δ ist dabei wie folgt definiert,

$$F_p(t-\Delta) = \alpha \beta m_p^* \ddot{Y}(t-\Delta), \quad (5-6)$$

wo β den Anteil der an der Synchronisation beteiligten Personen, dargestellt in Abb. 5.11, und α einen konstanten Abminderungsfaktor bezeichnen. Letzterer gibt das Verhältnis von relativer Massenmittelpunktsbewegung des Körpers zur absoluten

Schwingungsamplitude der Brücke an. Aufgrund der zeitlich verzögernden Anregung des Fußgängers, Totzeit Δ , (Begründung: Die Anpassung der Schrittfrequenz an die Eigenfrequenz der Brücke erfolgt erst nach Überschreiten eines personenbezogenen Grenzwertes der modalen Schwingungsamplitude der Brücke, d.h. die Bewegung der Fußgängers ist jener der Brücke immer nachgeschaltet) folgt unmittelbar $\alpha < 1$. Newland [10] gibt die folgenden, aus Feldversuchen ermittelten, unteren bzw. oberen Grenzwerte für β und α an,

$$\frac{2}{5} < \beta < 1 , \quad (5-7)$$

$$\frac{2}{3} < \alpha < 1 .$$

In der Gl. (5-6) bezeichnet m_p^* die anteilige Personenmasse,

$$m_p^* = n_p m_p \frac{a_n}{g} , \quad (5-8)$$

wobei n_p die Anzahl aller auf der Brücke befindlichen Personen, m_p die mittlere Masse des einzelnen Fußgängers und a_n den jeweiligen harmonischen Beschleunigungsanteil definieren. Letzterer ist von der durch synchronisierende Fußgänger angeregten Eigenfrequenz der Brücke abhängig.

Die Anwendung des Impulssatzes auf das System Brücke – synchronisierende Fußgänger, Abb. 5.14, liefert die folgende Bewegungsgleichung der modalen Schwingung der ungedämpften Brücke, die Beziehung Gl. (5-6) eingesetzt,

$$M \ddot{Y}(t) + K Y(t) = -F_p(t - \Delta) = -\alpha \beta m_p^* \ddot{Y}(t - \Delta) , \quad (5-9)$$

woraus unter nachträglicher Berücksichtigung einer modalen viskosen Dämpfung ζ_s der Brückenstruktur, sowie zweckmäßiger Umordnung, die Bewegungsgleichung mit Totzeit Δ ,

$$\ddot{Y}(t) + 2\zeta_s \Omega \dot{Y}(t) + \Omega^2 Y(t) + \alpha\beta \frac{m_P^*}{M} \ddot{Y}(t - \Delta) = 0, \quad \Omega = \sqrt{\frac{K}{M}}, \quad (5-10)$$

folgt. Dabei definiert Ω eine ungedämpfte Eigenkreisfrequenz der Brücke. Die Gl. (5-10) beschreibt einen sogenannten Schwinger mit Totzeit, wie z.B. in Klotter¹³, Seite 334, näher erläutert. Derartige Differentialgleichungen bezeichnet man als sogenannte Differenzen-Differentialgleichungen, deren strenge Lösung nur in wenigen Fällen möglich ist. Für die folgende Stabilitätsuntersuchung wird ein komplexer Lösungsansatz für harmonische Schwingungen,

$$Y(t) = \hat{Y} \exp(i\Omega t), \quad (5-11)$$

in die Bewegungsgleichung der Brücke, Gl. (5-10), eingesetzt. Man erhält dann den folgenden komplexen Ausdruck

$$-\Omega^2 + i2\zeta_s \Omega^2 + \Omega^2 - \alpha\beta \frac{m_P^*}{M} \Omega^2 \exp(-i\phi) = 0, \quad \phi = \Omega\Delta, \quad (5-12)$$

wo $\phi = \Omega\Delta$ den Phasenwinkel der zeitlich verschobenen Anregung durch synchronisierende Fußgänger, Rückkopplungskraft $F_p(t - \Delta)$ mit Totzeit Δ , definiert. Die Gl. (5-12) lässt sich nun, nach Darstellung der Exponentialfunktion durch Trigonometrische Funktionen (Eulersche Formel), in Real- und Imaginärteil aufspalten und getrennt anschreiben

$$\alpha\beta \frac{m_P^*}{M} \Omega^2 \cos \phi = 0, \quad (5-13)$$

$$2\zeta_s + \alpha\beta \frac{m_P^*}{M} \sin \phi = 0, \quad (5-14)$$

wobei der Phasenwinkel ϕ für numerische Simulationen mit $\phi = -\pi/2$ angenommen werden kann, d.h. der Wert von ζ_s weist dann ein Maximum $\zeta_{s,0}$ auf und aus der Gl.

(5-14) folgt unmittelbar die gesuchte Grenzbedingung für eine stabile harmonische Bewegung der Brücke

$$\zeta_{s,0} > \frac{\alpha \beta m_p^*}{2 M} . \quad (5-15)$$

Damit ist die erforderliche Strukturdämpfung $\zeta_{s,0}$ definiert welche notwendig ist um das Anfachen der selbsterregten Schwingung zu verhindern. Alternativ dazu kann für eine bereits bestehende Brückenstruktur mit gegebener modaler Masse M und modaler Strukturdämpfung ζ_s der maximal zulässige Wert für die anteilige Personenmasse m_p^* ermittelt werden, z.B. für die Fußgänger sensitive Auckland Harbour Bridge In Neuseeland.

5.6 Analogie zur Windanregung von elastischen Strukturen

Wie bereits am Beginn des Abschnittes 5.4 erwähnt, wird das Synchronisationsphänomen von Personengruppen in Anlehnung an ähnliche Erscheinungen in der Aeroelastik auch als „Lock-in“ Effekt bezeichnet. Es ist bekannt, dass bei der stationären Anströmung eines zylindrisches Körpers periodische Nachlaufströmungen zu beobachten sind, (v.-Kármánsche Wirbelstraße), die bei einer kritischen Windgeschwindigkeit v_k zu resonanzartigen Schwingungen quer zur Strömungsrichtung führen können, wie in Ziegler [3, Seite 535] dargelegt. Diese kritische Windgeschwindigkeit wird z.B. in Sockel¹⁴ [Seite 322] wie folgt definiert,

$$v_k = \frac{1}{St} f_k d \quad (5-16)$$

wo f_k die kritische Wirbelablösefrequenz, d die Körperdicke und St die dimensionslose Strouhal-Zahl bezeichnen, die für Kreiszyylinder mit rund $St=0.20$ angenommen werden kann.

Aus Messungen im Windkanal und an Bauwerken geht nun aber hervor, dass unerwünschte Querschwingungen zufolge Wirbelablösung nicht erst bei exakter Übereinstimmung von Ablöse- und Eigenfrequenz, also bei der kritischen Windgeschwindigkeit v_k , sondern bereits bei einer knapp darunter- bzw. darüberliegenden Frequenz, als Folge der instationären Umströmung einer Struktur, einsetzen, wie von Petersen¹⁵, Seite 74, dargelegt. Eine zur Eigenfrequenz benachbart liegende Wirbelablösefrequenz wird somit in die Eigenschwingung der Struktur hineingeführt (=“Lock-in“ Effekt). Das Geschwindigkeitsplateau innerhalb dessen eine Resonanzanregung aufrecht erhalten bleibt ist umso breiter, je geringer die Systemdämpfung ζ_s ist, wie die rein qualitativen Darstellungen, Abb. 5.15, veranschaulichen.

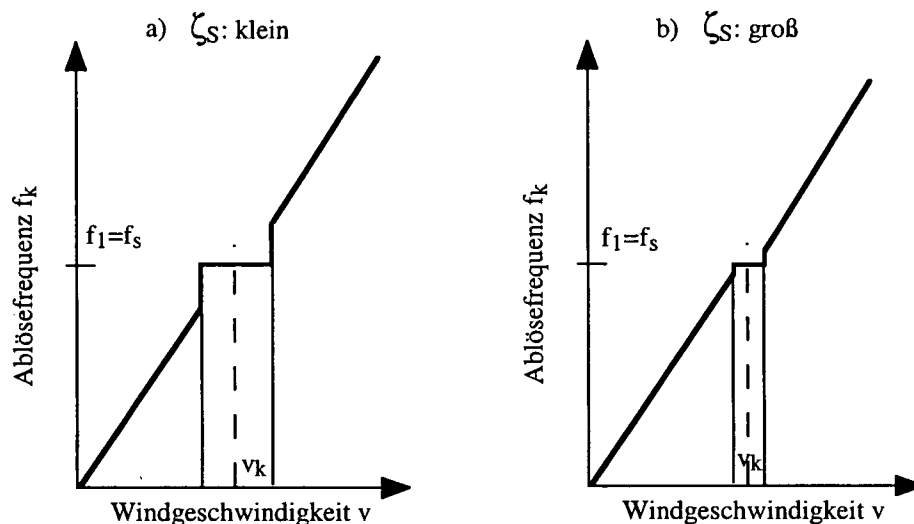


Abb. 5.15: Geschwindigkeitsplateaus innerhalb dessen eine Resonanzanregung erfolgt, rein qualitative Darstellung, a) kleine Systemdämpfung, b) große Systemdämpfung, Quelle: Petersen [15]

In Abb. 5.15 bezeichnet f_1 die kritische Wirbelablösefrequenz und f_s die Grundfrequenz der Baukonstruktion. Es lässt sich nun zeigen, dass zwischen der Windanregung einer elastischen Struktur und der Anregung einer Brücke durch Personen eine Analogie besteht, wie von McRobie und Morgenthal¹⁶ beschrieben. Ausgangspunkt dieser Analogie bildet die sogenannte Scruton-Zahl (= ein dimensionsloser Massendämpfungsparameter) dessen Wert im Windingenieurwesen ein Kriterium für die Beurteilung der Querschwingungsanfälligkeit bei instationärer Umströmung einer elastischen Struktur darstellt,

$$Sc = 4\pi\zeta_s \frac{m}{\rho_L d^2} . \quad (5-17)$$

Dabei ist ζ_s die Systemdämpfung, ρ_L das spezifische Gewicht von Luft (unter atmosphärischen Bedingungen, $\rho_L = 1.25 \text{ kg/m}^3$), d der Durchmesser im Falle von zylindrischen Strukturen und m die Masse pro Längeneinheit. Liegt Sc unter ca. 25 ist die elastische Struktur als querschwingungsanfällig einzustufen, d.h. hohe Werte von Sc sind anzustreben, (wobei eine zuverlässige Schätzung von ζ_s vorausgesetzt wird). Von McRobie und Morgenthal [16] wird nun derselbe Ansatz zur Beurteilung von personeninduzierten Schwingungen von Brückentragwerken vorgeschlagen. Die Definition der personenbezogenen Scruton-Zahl lautet hier

$$Scp = 2\zeta_s \frac{M}{m_p^*} , \quad (5-18)$$

wo M und m_p^* wiederum die modale Masse der Brücke und die anteilige Personenmasse bezeichnen. Nach Substitution der Ungleichung. (5-15) in die Gl. (5-18) erhält man die gesuchte Grenzbedingung in der einfachen Form

$$Scp > \alpha\beta . \quad (5-19)$$

Bei Wahl von $\alpha = 2/3$ und $\beta = 2/5$, aus Gl. (5-7), erhält man einen unteren Grenzwert für die personenbezogene Scruton-Zahl

$$Scp > \frac{4}{15} = 0.267 , \quad (5-20)$$

und bei Wahl von $\alpha = \beta = 1.00$, wiederum aus Gl. (5-7), einen entsprechenden oberen Grenzwert,

$$Scp > 1.00 . \quad (5-21)$$

Vergleicht man Gl. (5-20) mit Gl. (5-21) wird die Notwendigkeit eines möglichst hohen Wertes von $Scp > 1$ verständlich. Kommt es nun bei einer bestehenden Brücke

zum gefährlichen Rückkopplungsphänomen stehen prinzipiell drei Möglichkeiten zur Verfügung um das System nachträglich zu stabilisieren,

- 1) Erhöhung des Dämpfungskoeffizienten ζ_s durch Einbau von geeigneten energiedissipierenden Elementen, z.B. von Flüssigkeitstilgern wie in dieser Dissertation vorgeschlagen
- 2) Erhöhung der modalen Strukturmasse M (nur dann zulässig wenn Tragsicherheit und Gebrauchstauglichkeit der Brücke weiterhin gewährleistet sind)
- 3) Begrenzung der maximal auf das Tragwerk einwirkenden anteiligen Personenmasse m_p^*

Eine Bestätigung dieser Analogie und der damit gerechtfertigten Definition einer personenbezogenen Scruton-Zahl Sc_p erfolgt in der Arbeit von Newland [10]. Dabei werden die für ausgewählte Brücken (London Millennium Bridge, Toda Park Bridge und Auckland Harbour Bridge in Neuseeland) ermittelten Scruton-Zahlen als Funktion der Eigenfrequenz graphisch dargestellt, Abb. 5.16.

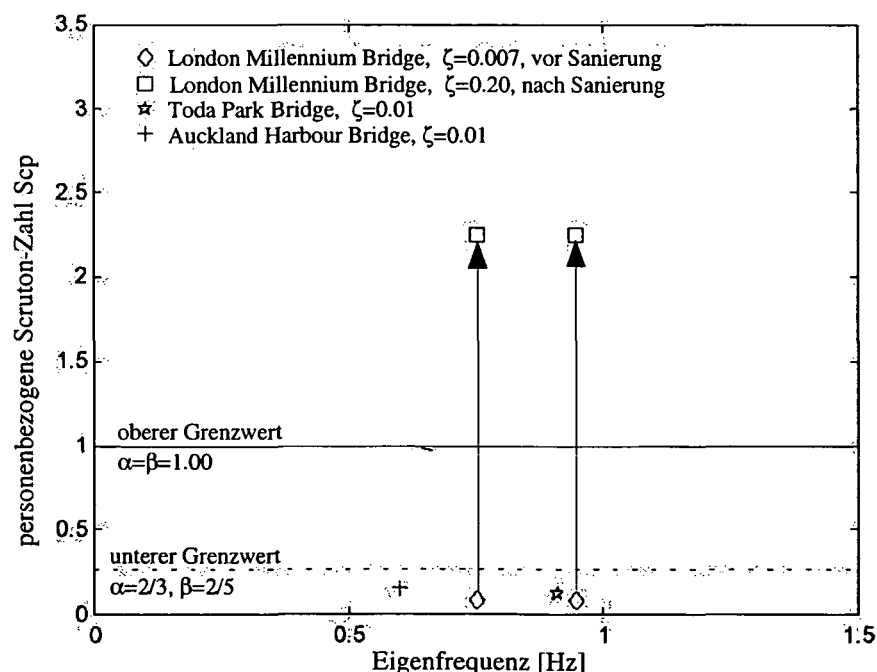


Abb. 5.16: Personenbezogene Scruton-Zahl Sc_p , Gl. (5-19), als Funktion der Eigenfrequenz für ausgewählte Brücken, Quelle: Newland [10]

Aus der Abb. 5.16 erkennt man sehr deutlich die Problematik einer geringen Systemdämpfung. Die personenbezogene Scruton-Zahl ist nämlich bei allen drei exemplarisch dargestellten Brücken kleiner als der mindest erforderliche untere Grenzwert, $Scp = 0.267$. Diese Tatsache führt bei Anregung der Brücke durch eine ausreichend große Anzahl von Personen (Überschreiten des Grenzwertes der anteiligen Personenmasse m_p^* , Gl. (5-15)) unweigerlich zum Synchronisations- bzw. Rückkopplungseffekt, der in allen drei Fällen auch praktisch beobachtet wurde bzw. wird. Um dieses Phänomen zu vermeiden muss die Systemdämpfung entsprechend erhöht werden. Im Falle der Millennium Bridge konnte durch den aufwändigen Einbau von viskosen Dämpferelementen sowie konventionellen Feder-Masse Dämpfern eine Anhebung des Dämpfungskoeffizienten erreicht werden. Aufgrund dieser Erhöhung liegt die Scruton-Zahl Scp über dem oberen Grenzwert $Scp = 1.00$ und damit auf der sicheren Seite – das Rückkopplungsphänomen wurde damit erfolgreich unterdrückt.

5.7 Parameterresonanzgefahr zufolge Fußgängeranregung

In Abschnitt 5.3 dieses Kapitels wurde darauf hingewiesen, dass die gesamte induzierte Vortriebskraft, des sich fortbewegenden Menschen, bis zu 30% des Körpereigengewichts betragen kann, wie in Abb. 5.9 illustriert. Bei stark frequentierten Fußgängerbrücken kann diese harmonische Vortriebskraft unter der Annahme eines Synchronisationseffektes der Fußgänger zu einem weiteren gefährlichen Phänomen führen, dass im Zuge dieser Dissertation umfassend untersucht werden soll.

Die Synchronisation einer sich anfangs regellos bewegenden Fußgängergruppe führt neben der horizontalen („quer“) und vertikalen Anregung der Brücke zu einer Überlagerung der dynamischen Kontaktkraftwirkung in horizontaler Brückenlängsrichtung. Eine Harmonische dieser Axialkraft kann nun aber unter bestimmten Bedingungen Parameterresonanz, wie in Kapitel 3, Abschnitt 3.2.5, näher ausgeführt, der schiefen Biegeschwingung hervorrufen. In der Abb. 5.17 ist ein

kontinuierlicher Bernoulli-Euler Balken, Masse pro Längeneinheit $m = \rho A$ und Biegesteifigkeit EJ_z bzw. EJ_y , jeweils in horizontaler und vertikaler ausgelenkter Lage dargestellt. Der Träger wird durch eine periodische Axialkraft pro Längeneinheit $p_x(t)$, als Gleichlast über die Länge λl ($\lambda \leq 1$), wirkend ab der Stelle $x = a$ der Spannweite belastet.

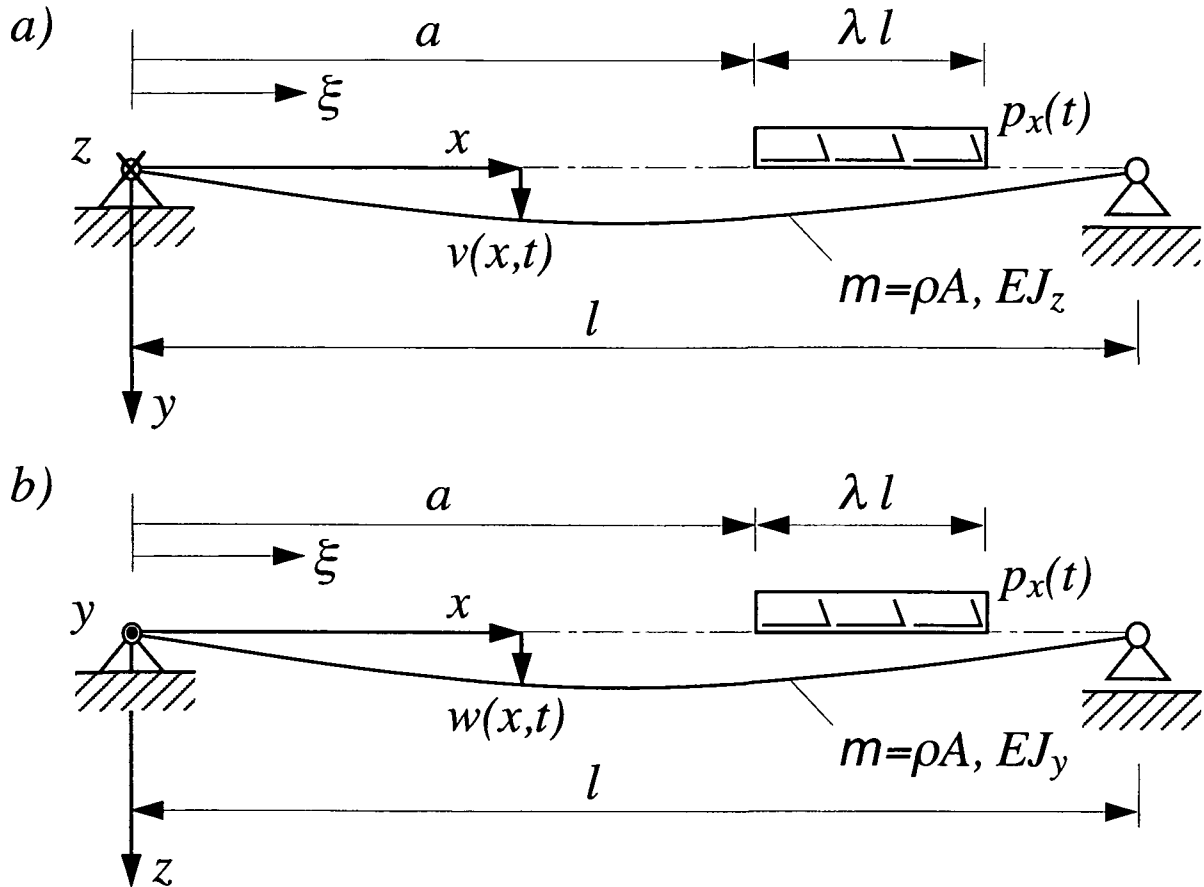


Abb. 5.17: Schiefe Biegeschwingung eines Bernoulli-Euler Balkens; Masse pro Längeneinheit $m = \rho A$; Axialkraft pro Längeneinheit $p_x(t)$, eine Gleichlast über λl ($\lambda \leq 1$) wirkend ab der Stelle $x = a$; a) horizontale Schwingungskomponente; b) vertikale Schwingungskomponente

Die zeitlich periodische Axialkraft $p_x(t)$ erhält man aus Gl. (5-4) sowie unter Berücksichtigung der Einwirkung einer vordefinierten Personenanzahl n_p zu,

$$p_x(t) = \frac{n_p m_p g}{\lambda l} \sum_{n=1}^N \frac{a_{n,x}}{g} \sin\left(n \frac{\omega_S}{2} t - \varphi_{n,x}\right), \quad (5-22)$$

wobei in Gl. (5-4) der Index y durch x ersetzt wurde. Für die Stabilitätsuntersuchung der schiefen Biegeschwingung des mit einer veränderlichen periodischen Axialkraft belasteten Trägers, nach Theorie zweiter Ordnung, wird die potentielle Energie $V = W + U$ benötigt. Die Ausbiegung erfolgt unter der Annahme einer undeformbaren Stabachse, d.h. die Verzerrung $\varepsilon_{xx}^{(0)} = 0$, woraus für die Streckungsenergie des Trägers zwanglos $U_s = 0$ folgt, wie in Ziegler [3, Seite 410] dargelegt. Also mit der geometrischen Beziehung

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right], \quad (5-23)$$

ergibt sich $V = W + U$ durch Überlagerung der beiden achsrechten Biegungen $v(x, t)$ und $w(x, t)$ zu,

$$V = \frac{1}{2} \int_a^{a+\lambda l} \left\{ \int_0^x p_x \left[\left(\frac{\partial v}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial \xi} \right)^2 \right] d\xi \right\} dx + \frac{1}{2} \int_0^l EJ_z \left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^l EJ_y \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right)^2 dx. \quad (5-24)$$

In der Gl. (5-24) wird die Arbeit der äußeren Kräfte W in Form eines sogenannten „Schachtelintegrals“ angeschrieben, (Integrationsvariable: x und ξ). Dabei ist zu beachten, dass die periodische äußere Axialkraft $p_x(t)$ nur im Bereich von $a \leq x \leq a + \lambda l$ wirkt, jedoch die Längsverschiebung des Trägers von $\xi = 0$ bis $\xi = x$ aufzusummieren ist. Substituiert man nun in Gl. (5-24) die Schwingungskomponenten $v(x, t)$ und $w(x, t)$ jeweils durch eine Eigenfunktion des beidseitig gabelgelagerten Trägers, definiert in Gl. (4-90),

$$v(x, t) = v_k(t) \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right), \quad w(x, t) = w_k(t) \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right), \quad k = 1, 2, 3, \dots, \quad (5-25)$$

so ergibt sich nach entsprechender Integration für das Gesamtpotential V ,

$$\begin{aligned}
V = & \frac{1}{2} p_x \lambda l \left(\frac{k\pi}{l} \right)^2 v_k^2 \left[\frac{\lambda l}{4} + \frac{a}{2} + \frac{l}{8k^2\pi^2\lambda} \left(\cos \frac{2k\pi a}{l} - \cos \frac{2k\pi(a+\lambda l)}{l} \right) \right] + \\
& + \frac{1}{2} p_x \lambda l \left(\frac{k\pi}{l} \right)^2 w_k^2 \left[\frac{\lambda l}{4} + \frac{a}{2} - \frac{l}{8k^2\pi^2\lambda} \left(\cos \frac{2k\pi a}{l} - \cos \frac{2k\pi(a+\lambda l)}{l} \right) \right] + \\
& + \frac{1}{2} \left(\frac{k\pi}{l} \right)^4 \frac{l}{2} [EJ_z v_k^2 + EJ_y w_k^2] .
\end{aligned} \tag{5-26}$$

Für die folgende Untersuchung wird der maßgebende Fall betrachtet: $\lambda=1, a=0$. Dieser ergibt ein Maximum der Normalkraftverteilung über die Trägerlänge l . Die Gl. (5-26) degeneriert dann zu,

$$V = \frac{1}{2} p_x \frac{k^2\pi^2}{4} [v_k^2 + w_k^2] + \frac{1}{2} \frac{k^4\pi^4}{2l^3} [EJ_z v_k^2 + EJ_y w_k^2] . \tag{5-27}$$

Zur Formulierung der Lagrange'sche Bewegungsgleichung, angegeben z.B. in Ziegler [3, Seite 440], wird noch die kinetische Energie T des schlanken Trägers benötigt,

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l m \left[\left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] dx , \quad m = \rho A = \text{const} , \tag{5-28}$$

die nach Substitution des Ansatzes für $v(x,t)$ bzw. $w(x,t)$, Gl. (5-25), und entsprechender Integration die folgende Form annimmt,

$$T = \frac{1}{2} \frac{m_T}{2} [\dot{v}_k^2 + \dot{w}_k^2] , \quad m_T = \rho A l , \tag{5-29}$$

Die kinetische und potentielle Energie, Gl. (5-29) und Gl. (5-27), wird nun gemäß der Lagrange'schen Gleichung abgeleitet und man erhält dann die gesuchten

parametererregten Bewegungsgleichungen des mit einer gleichförmig verteilten Axialkraft $p_x(t)$ belasteten Bernoulli-Euler Balkens,

$$\ddot{v}_k + \bar{\bar{\Omega}}_k^2 \left[1 + p_x(t) \frac{l^3}{2EJ_z k^2 \pi^2} \right] v_k = 0, \quad \bar{\bar{\Omega}}_k = \frac{k^2 \pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ_z}{m}}, \quad (5-30)$$

$$\ddot{w}_k + \bar{\Omega}_k^2 \left[1 + p_x(t) \frac{l^3}{2EJ_y k^2 \pi^2} \right] w_k = 0, \quad \bar{\Omega}_k = \frac{k^2 \pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ_y}{m}},$$

wo $\bar{\bar{\Omega}}_k$ und $\bar{\Omega}_k$ die k -ten ungedämpften Eigenkreisfrequenzen des Brückenträgers mit zugehöriger horizontaler und vertikaler Schwingungsform bezeichnen. Einsetzen von $p_x(t)$, Gl. (5-22), in die Gln. (5-30) liefert unter Berücksichtigung von $\lambda = 1$ sowie $\varphi_{n,x} = 0$ weiters

$$\ddot{v}_k + \bar{\bar{\Omega}}_k^2 \left[1 + \frac{n_P m_P g l^2}{2EJ_z k^2 \pi^2} \sum_{n=1}^N \frac{a_{n,x}}{g} \sin\left(n \frac{\omega_S}{2} t\right) \right] v_k = 0, \quad (5-31)$$

$$\ddot{w}_k + \bar{\Omega}_k^2 \left[1 + \frac{n_P m_P g l^2}{2EJ_y k^2 \pi^2} \sum_{n=1}^N \frac{a_{n,x}}{g} \sin\left(n \frac{\omega_S}{2} t\right) \right] w_k = 0.$$

Die Einführung der dimensionslosen Zeit $\tau = \omega_S t$ in die Gln. (5-31), liefert dann in Analogie zur Gl. (3-46) die für Stabilitätsuntersuchungen übliche Normalform der beiden Gleichungen, nämlich

$$\ddot{v}_k + \left[\lambda_k^v + \sum_{n=1}^N \gamma_{k,n}^v \sin(n\tau/2) \right] v_k = 0, \quad \tau = \omega_S t, \quad (5-32)$$

$$\ddot{w}_k + \left[\lambda_k^w + \sum_{n=1}^N \gamma_{k,n}^w \sin(n\tau/2) \right] w_k = 0,$$

wo λ_k^v und $\gamma_{k,n}^v$ bzw. λ_k^w und $\gamma_{k,n}^w$ dimensionslose Stabilitätsparameter darstellen,

$$\lambda_k^v = \frac{\overline{\Omega}_k^2}{\omega_s^2}, \quad \gamma_{k,n}^v = \frac{k^2 \pi^2}{2} \frac{n_P m_P}{m_T} \frac{a_{n,x}}{l \omega_s^2}, \quad (5-33)$$

$$\lambda_k^w = \frac{\overline{\Omega}_k^2}{\omega_s^2}, \quad \gamma_{k,n}^w = \frac{k^2 \pi^2}{2} \frac{n_P m_P}{m_T} \frac{a_{n,x}}{l \omega_s^2}.$$

Wie in Kapitel 3, Abschnitt 3.2.5 bereits vorweg diskutiert, treten in Abhängigkeit von der Wahl der Parameter λ_k^v und $\gamma_{k,n}^v$ bzw. λ_k^w und $\gamma_{k,n}^w$ stabile oder instabile Lösungen auf, (Ince-Strutt'sche Stabilitätskarte, dargestellt in Abb. 3.10 bzw. Abb. 3.11), wobei die Gefahr für das Entstehen von Parameterresonanz an der ersten Resonanzstelle der schiefen Biegeschwingung,

$$\lambda_k^v = \frac{\overline{\Omega}_k^2}{\omega_s^2} = \frac{1}{4} \quad \text{bzw.} \quad \lambda_k^w = \frac{\overline{\Omega}_k^2}{\omega_s^2} = \frac{1}{4}, \quad (5-34)$$

dominiert. Aufgrund des in Abschnitt 5.4.2 beschriebenen Synchronisations- bzw. „Lock-in“ Effektes passt ein Fußgänger seine Schrittfrequenz f_s der benachbart liegenden horizontalen Eigenfrequenz $\overline{\Omega}_k / 2\pi = f_s / 2$ einer Brücke an und induziert somit eine Seitenführungskraft, wie in Abb. 5.6 dargestellt. Da nun aber in horizontaler Brückenlängsrichtung der harmonische Beschleunigungsanteil $a_{2,x}$ mit der Frequenz $2\pi f_s = 2\overline{\Omega}_k$ dominiert, erkennbar aus Abb. 5.9, entsteht aus menschlichen Bewegungsvorgängen automatisch die kritische Anregung der Parameterresonanz für die horizontale Biegeschwingung der Brücke, d.h.

$$\lambda_k^v = \frac{(f_s/2)^2}{(f_s)^2} = \frac{1}{4}, \quad \gamma_{k,2}^v = \frac{k^2 \pi^2}{2} \frac{m_{P,x}^*}{m_T} \frac{g}{l \omega_s^2}, \quad m_{P,x}^* = n_P m_P \frac{a_{2,x}}{g}, \quad a_{2,x} \approx 0.20 g. \quad (5-35)$$

Auch für die vertikale Biegeschwingung besteht die Gefahr von Parameterresonanz, jedoch in einem wesentlich geringeren Ausmaß. In diesem Fall ergeben sich die beiden Stabilitätsparameter zu,

$$\lambda_k^w = \frac{(f_s)^2}{(2f_s)^2} = \frac{1}{4} = \lambda_k^v, \quad \gamma_{k,4}^w = \frac{k^2 \pi^2}{2} \frac{m_{P,x}^*}{m_T} \frac{g}{l \omega_s^2} = \gamma_{k,2}^v, \quad m_{P,x}^* = n_P m_P \frac{a_{4,x}}{g}, \quad a_{4,x} \approx 0.08 g, \quad (5-36)$$

wo $a_{4,x}$ wiederum der Abb. 5.9 zu entnehmen ist. Aus dem Verhältnis von $a_{4,x} / a_{2,x} \approx 0.40$ folgt, dass die Parameterresonanzgefahr für die vertikale Biegeschwingung ca. um die Hälfte geringer ist als jene für die horizontale. Die weitere Aufgabe besteht nun darin, eine hinreichende Grenzbedingung in Form einer mindest erforderlichen Strukturdämpfung ζ_s zu formulieren, dass die mögliche Entstehung von Parameterresonanz der maßgebenden horizontalen Biegeschwingung verhindert. In Analogie zu Gl.(3-48) erhält man dann unter Verwendung des Ausdruckes für $\gamma_{k,2}^v$, Gl. (5-33), die folgende Grenzbedingung

$$\zeta_{s,x0} > \frac{k^2 \pi^2}{2} \frac{m_{P,x}^*}{m_T} \frac{g}{l \omega_s^2}. \quad (5-37)$$

Es existieren somit die beiden hinreichenden Grenzbedingungen, Gln. (5-15) und (5-37), welche stabile horizontale Querschwingungen einer Brücke bei Anregung durch in Synchronisation befindliche Personengruppen gewährleisten. Nämlich, einerseits die von Newland [10], Gl. (5-15), und andererseits die in diesem Abschnitt erstmalig erarbeitete Grenzbedingung, Gl. (5-37). Der wesentliche Unterschied besteht darin, dass in der Formulierung von Newland [10] die in Richtung horizontal „quer“ induzierte anteilige Personenmasse $m_{P,y}^*$ eingeht, wohingegen die zweite Bedingung die in Richtung horizontal „längs“ induzierte anteilige Personenmasse $m_{P,x}^*$, die im Allgemeinen wesentlich größer ist, beinhaltet. Weiters wird angemerkt, dass in der hier erstmalig gezeigten Grenzbedingung wesentlich mehr Einflussgrößen enthalten sind und daher eine sehr genaue Aussage gemacht werden kann. Da Fußgängerbrücken in Ihrer Konstruktionsart und Spannweite sehr unterschiedlich sind, sollen beide Kriterien zur Stabilitätsuntersuchung herangezogen und verglichen werden. Maßgebend ist natürlich jenes mit dem größeren Wert für die

erforderliche modale Strukturdämpfung ζ_s , wie in Kapitel 6, Abschnitt 6.3.3 dargelegt. Um die Wichtigkeit der hier präsentierten Grenzbedingung, Gl. (5-37), zu veranschaulichen wird das folgende fiktive Zahlenbeispiel vorgelegt. Die betrachteten Parameter und Ergebnisse sind in der Tabelle 2 gelistet.

Tabelle 2: Fiktives Zahlenbeispiel, Vergleich der beiden Grenzbedingungen

Grenzbedingung nach Newland Gl. (5-15)	Grenzbedingung (Parameterresonanz) Gl. (5-37)
Anzahl der auf der Brücke befindlichen Personen $n_p = 500$ Mittlere Masse einer Person $m_p = 80 \text{ kg}$ Dritte Eigenkreisfrequenz ($k=3$) mit horizontale Schwingungsform, $\Omega_3 = 4.71 \text{ rad/s}$ Brückenmasse $m_T = 100000 \text{ kg}$ Modale Brückenmasse $M = m_T / 2 = 50000 \text{ kg}$ Brückenlänge $l = 20 \text{ m}$ Parameter $\alpha = 1.00$, $\beta = 1.00$, (obere Grenzwerte)	
harm. Beschleunigungsanteil $a_{1,y} = 0.04 \text{ g}$ (folgt aus Abb. 5.6) <u>anteilige Personenmasse</u> $m_{p,y}^* = 1600 \text{ kg}$	harm. Beschleunigungsanteil $a_{2,x} = 0.20 \text{ g}$ (folgt aus Abb. 5.9) <u>anteilige Personenmasse</u> $m_{p,x}^* = 8000 \text{ kg}$ Erregerkreisfrequenz $\omega_s = 2\Omega_3$
$\zeta_{s,0} > \frac{\alpha \beta m_{p,y}^*}{2 M} = 0.016 = 1.6\%$	$\zeta_{s,x0} > \frac{k^2 \pi^2 m_{p,x}^*}{2 m_T} \frac{g}{l \omega_s^2} = 0.020 = 2.0\%$

Obwohl für die Grenzbedingung von Newland der obere Grenzwert betrachtet wurde, d.h. $\alpha = \beta = 1.00$ bzw. $Scp = 1.00$, liegt der Wert für ζ_s zur sicheren Vermeidung von Parameterresonanz über jenem von Newland. Brücken die eine Systemdämpfung aufweisen welche kleiner als der geforderte Wert ist, sind nachträglich unbedingt zu sanieren. Durch den Einbau von energiedissipierenden Sekundärstrukturen, z.B. Flüssigkeitstilgern, lässt sich die vorhandene Systemdämpfung sehr effizient erhöhen.

Abschließend sei noch angemerkt, dass der im Zuge der vorliegenden Dissertation ausführlich diskutierte Flüssigkeitstilger (mit all seinen unbestreitbaren Vorteilen wie Kostengünstigkeit, einfache Installation und Wartung, einfache

Abstimmung von Frequenz und Dämpfungsverhältnis, usw.) ebenso das Ziel einer Erhöhung der effektiven Strukturdämpfung erreicht, wie in der Schlussbemerkung von Kapitel 4, Abschnitt 4.7, dargelegt. Die im Amplitudenspektrum sichtbaren, gefährlichen Resonanzspitzen werden durch die Installation von ein oder mehreren Tilgern auf ein ungefährliches Minimum reduziert.

LITERATUR

- ¹ Bachmann, H., Ammann, W., 1987, 'Schwingungsprobleme bei Bauwerken', Durch Menschen und Maschinen induzierte Schwingungen, Structural Engineering Documents, IABSE-AIPC-IVBH.
- ² Baumann, K., Bachmann, H., 1988, 'Durch Menschen verursachte dynamische Lasten und deren Auswirkungen auf Balkentragwerke', Institut für Baustatik und Konstruktion ETH Zürich, Bericht Nr. 7501-3, Birkhäuser Verlag Basel.
- ³ Ziegler, F., 1998, 'Technische Mechanik der festen und Flüssigen Körper', Dritte, verbesserte Auflage, Springer Wien New York.
- ⁴ Eibl, J., Henseleit, O., Schlüter, F., H., 1988, 'Baudynamik', Taschenbuch für Beton-, Stahlbeton- und Spannbetonbau sowie die verwandten Fächer, Teil II, 77. Jahrgang, Ernst & Sohn, Verlag für Architektur und technische Wissenschaften.
- ⁵ Nakamura, S., Fujino, Y., 2002, 'Lateral Vibration on a Pedestrian Cable-Stayed Bridge', Structural Engineering International, IABSE, 4.
- ⁶ Schäpertöns, B., Schäfer, D., 2003, 'Begehbare Doppelhelix – Eine unendlich lange Fußgängerbrücke', Dokumentation D 0198 der D-A-CH Tagung 2003, Aktuelle Probleme der Brückendynamik, Herausgeber: Glauco Feltrin und Thomas Wenk, ETH Zürich, S. 27-34.
- ⁷ Bachmann et al., 1995, 'Vibration Problems in Structures', Practical Guidelines, Birkhäuser Verlag, Basel.
- ⁸ Schulze, H., 1980, 'Dynamische Einflüsse der Verkehrslast auf Fußgängerbrücken', Signal und Schiene, Heft 2, S. 91-93 und Heft 3, S. 143-144.
- ⁹ Matsumoto, Y., Nishioka, T., Shiojiri, H., Matsuzaki, K., 1980, 'Dynamic Design of Footbridges', in: IABSE-Proceedings, p. 17-18.
- ¹⁰ Newland, D., E., 2003, 'Pedestrian Excitation Of Bridges – Recent Results', Tenth International Congress on Sound and Vibration, Stockholm, Sweden, 7-10 July 2003, CD-Rom Paper, p. 533-547.
- ¹¹ Dallard, P., Fitzpatrick, A., J., Flint, A., Bourva, S., L., Low, A., Smith, R., M., R., Willford, M., 2001, 'The London Millenium Footbridge', The Structural Engineer, Vol. 79, No 22, p. 17-33.
- ¹² Dallard, P., Fitzpatrick, T., Flint, A., Low, A., Smith, R., R., Willford, M., Roche, M., 2001, 'London Millenium Bridge: Pedestrian – Induced Lateral Vibration', Journal of Bridge Engineering, p. 412-417.
- ¹³ Klotter, K., 1980, 'Technische Schwingungslehre', Erster Band: Einfache Schwinger, Teil B: Nichtlineare Schwingungen, Dritte Auflage, Springer Verlag Berlin.
- ¹⁴ Sockel, H., 1984, 'Aerodynamik der Bauwerke', Friedr. Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft mbH, Braunschweig.
- ¹⁵ Petersen, C., 2001, Herausgeber: Maurer Söhne GmbH & Co. KG, 'Schwingungsdämpfer im Ingenieurbau', München.
- ¹⁶ McRobie, A., Morgenthal, G., 2002, 'Risk Management for Pedestrian-Induced Dynamics of Footbridges', in: Proc. Int. Conference Footbridge 2002, Paris.

6. TILGUNG PERSONENINDUZierter SCHWINGUNGEN VON BRÜCKEN – NUMERISCHE SIMULATIONEN

Im folgenden Kapitel wird die schwingungsdämpfende Wirkung von Flüssigkeitstilgern anhand realer Brückenkonstruktionen numerisch untersucht. Die Reduzierung der Schwingungsantwort wird anhand ausgewählter schwingungsanfälliger Fußgängerbrücken, nämlich der Millennium Bridge in London, der Toda Park Bridge in Japan und einer selbst entworfenen fiktiven Fußgängerbrücke, dargelegt. Die Modellierung des komplexen Fortbewegungsprozesses von Personengruppen erfolgt dabei entsprechend den Ausführungen in Kapitel 5, durch die Überlagerung mehrerer harmonischer Beschleunigungsanteile.

6.1 Millennium Bridge in London

6.1.1 Allgemeines

Das problematische Schwingungsverhalten der Millennium Bridge in London zufolge Fußgängeranregung, wurden bereits in Kapitel 4, Abschnitt 4.1 diskutiert. Als eine Alternative zu den ausgeführten Sanierungsmaßnahmen, wie von Fitzpatrick et al.¹ dargelegt, wird die Installation von Flüssigkeitsstilgern vorgeschlagen und numerisch simuliert. Insbesondere wird die Abstimmung mehrerer Flüssigkeitsstilger im jeweiligen Brückenfeld und deren Positionierung untersucht. Die Millennium Bridge besteht aus drei Teilbereichen, nämlich das nördliche Nebefeld, das Hauptfeld und das südliche Nebefeld mit Spannweiten von jeweils 81 m, 144 m und 108 m, wie in Abb. 6.1 illustriert.

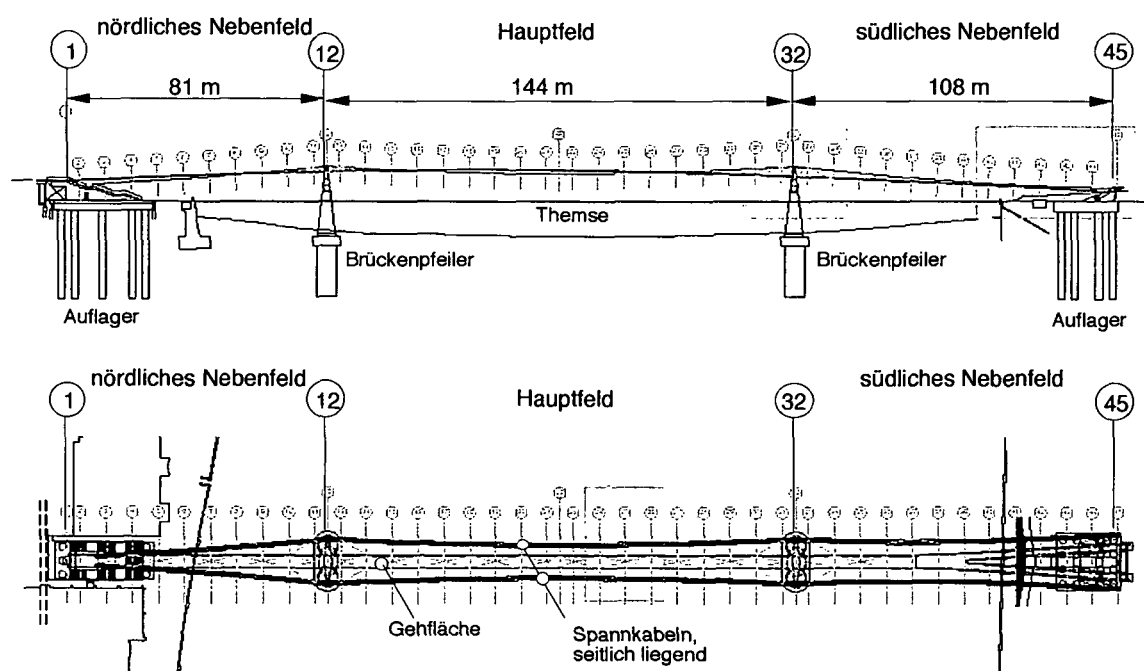


Abb. 6.1: Grundriss und Seitenansicht der Millennium Bridge in London, Quelle: Internetseite, <http://www.arup.com/millenniumbridge/>

Die Konstruktionsart entspricht einer flachen Hängebrücke, wobei die einzelnen Spannkabel feldweise vom Auflager zum Brückenpfeiler (nördliches und südliches

Nebenfeld) bzw. zwischen den Brückenpfeilern (Hauptfeld) geführt sind. In regelmäßigen Abständen von 8 m sind einzelne Stahlhohlprofile quer zur Kabelführung angeordnet. Die Position der Stahlhohlprofile ist in der Abb. 6.1 durch die jeweilige Achsenbezeichnung festgelegt. Als Tragelement für die Gehfläche, ein aus Aluminium gefertigtes kontinuierliches Rechteckprofil mit der Breite $b = 4.00\text{ m}$, sind runde Hohlprofile in Brückenlängsrichtung aufgesetzt, wie in der Abb. 6.2 dargestellt. Weitere Angaben zur Konstruktionsart der Millennium Bridge finden sich in Dallard et al.².

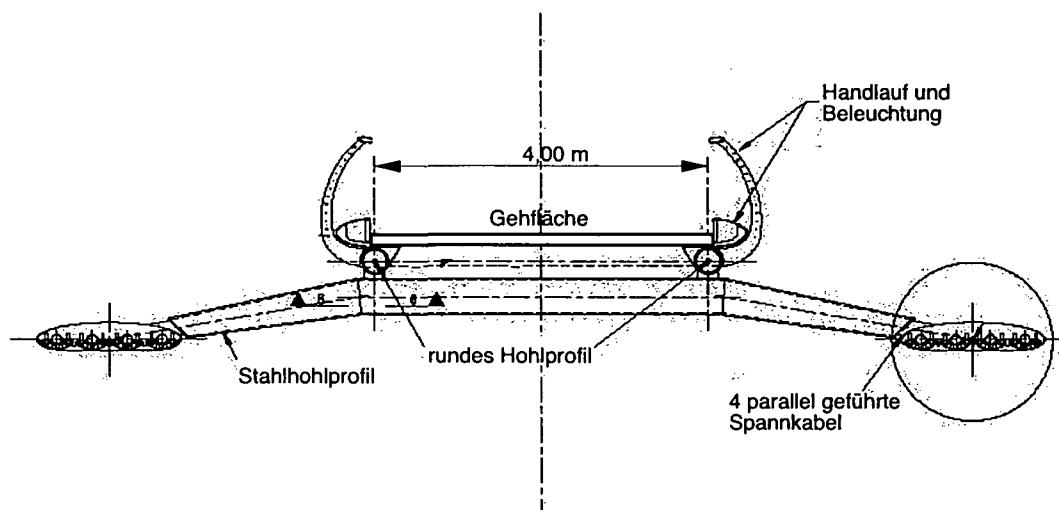


Abb. 6.2: Querschnitt der Millennium Bridge, Quelle: Internetseite,
<http://www.arup.com/millenniumbridge/>

Insbesondere wird darauf hingewiesen, dass die Biege- und Torsionssteifigkeiten der Brücke maßgebend durch die Spannkabel gegeben sind. Für die Anordnung der Kabel wurde ein möglichst großer Abstand von der Gehfläche angestrebt, wodurch die Torsionssteifigkeit einen entsprechend hohen Wert aufweist. Dadurch werden einerseits die Verdrehungen der Brücke zufolge unsymmetrischer Kraftwirkungen minimiert und andererseits führen die hohen Torsionssteifigkeiten zu einer weitgehenden Entkopplung der Biege- und Drehschwingungen, wie auch Dallard et al. [2] ausführlich erläutert. In der folgenden numerischen Simulation werden das Hauptfeld sowie das nördliche und südliche Nebenfeld jeweils als Einfeldträger betrachtet. Die feldweise Betrachtung der Millennium Bridge ist zulässig, da die Spannkabel immer nur über jeweils ein Brückenfeld gespannt sind und der

kontinuierliche Brückenquerschnitt nur einen vernachlässigbar geringen Beitrag zur gesamten Biege- bzw. Torsionssteifigkeit liefert.

Alle notwendigen Brückenparameter, wie geometrische Größen und Masse pro Längeneinheit werden der Internetseite, <http://www.arup.com/millenniumbridge/>, entnommen. Die linearen Eigenfrequenzen sind in der Arbeit von Dallard et al. [2] gelistet. Die gesamten numerischen Studien werden mit den nichtlinearen modalen Gleichungen (4-123) und (4-125) durchgeführt, wobei die Eigenschwingungsformen sinusförmig angenommen werden können, wie auch Dallard et al. [2] bestätigt. Es zeigt sich außerdem, dass die Eigenschwingungsformen eine dominierende, weitgehend entkoppelte Bewegung in horizontaler, vertikaler und rotatorischer Richtung aufweisen. Diese Tatsache erlaubt die Bezeichnung, z.B. der ersten horizontalen Schwingungsform.

6.1.2 Hauptfeld – Installation von drei Flüssigkeitstilgern

Das Hauptfeld mit einer Spannweite von $l=144\text{ m}$, Achse 12 bis 32, hat eine Masse pro Längeneinheit $m=1500\text{ kg/m}$. Die ersten sechs gemessenen Eigenfrequenzen und linear viskosen Dämpfungskoeffizienten sind in der Tabelle 6.1 gelistet.

Tabelle 6.1: Eigenfrequenzen u. viskose Dämpfungskoeffizienten, Hauptfeld, Quelle: Dallard et al. [2]

	Eigenfrequenz f_{Si} [Hz]	Dämpfung ζ_{Si} [%]
Hh1 = f_{S1}	0.48	0.6
Hh2 = f_{S2}	0.95	0.65
Hv3 = f_{S3}	1.15	0.70
Hv4 = f_{S4}	1.54	0.75
Hv5 = f_{S5}	1.89	0.80
Hv6 = f_{S6}	2.32	0.85

Dabei bezeichnet Hh1 (H=Hauptfeld, h=horizontal) z.B. die erste Eigenfrequenz des Hauptfeldes mit zugehöriger horizontaler Schwingungsform und Hv3 (H=Hauptfeld,

v=vertikal) z.B. die dritte Eigenfrequenz mit vertikaler Schwingungsform. Die Schwingungsformen in horizontaler und vertikaler Richtung sind für den beidseitig gelenkig gelagerten Träger in Gl. (4-88) angegeben, und im Fall des Hauptfeldes mit, $\lambda_n = n\pi / l$,

$$\chi_1(x) = \sin \lambda_1 x, \quad \chi_2(x) = \sin \lambda_2 x, \quad (6-1)$$

$$\phi_1(x) = \sin \lambda_1 x, \quad \phi_2(x) = \sin \lambda_2 x, \quad \phi_3(x) = \sin \lambda_3 x, \quad \phi_4(x) = \sin \lambda_4 x,$$

festgelegt, wobei die Konstanten mit $C_n = D_n = 1$ gewählt werden, wie in der Abb. 6.3 illustriert.

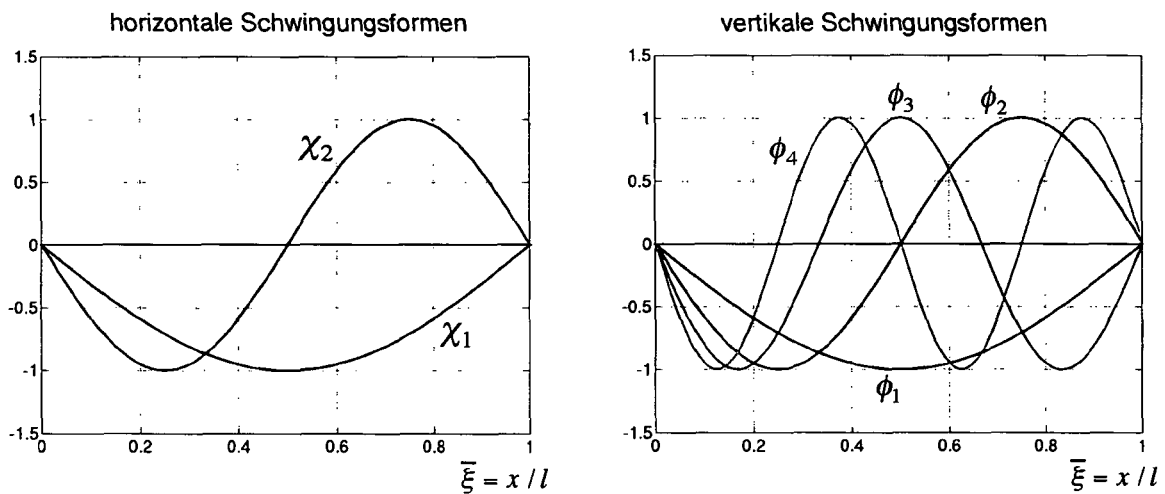


Abb. 6.3: Schwingungsformen χ_1 , χ_2 und ϕ_1 , ϕ_2 , ϕ_3 , ϕ_4 , Hauptfeld; errechnet aus Gl. (6-1)

Die Hauptstruktur wird somit als ein System mit sechs Freiheitsgraden modelliert, wobei die Verschiebungen horizontal $v(x,t)$, quer zur Längsachse x , und vertikal $w(x,t)$ betrachtet werden. Aufgrund der hohen Torsionssteifigkeit und der daraus resultierenden hohen Drehschwingungseigenfrequenzen des Hauptfeldes kann die Verdrehung $\vartheta(x,t)$ als vernachlässigbar klein betrachtet werden, wie auch von Dallard et al. [2] bestätigt.

Um nun für die numerischen Simulationen eine möglichst realistische Nachbildung des menschlichen Fortbewegungsprozesses zu erreichen, wie in Kapitel 5 detailliert beschrieben, wird das Hauptfeld durch periodische Erregerkräfte zufolge eines einzelnen Fußgängers in horizontaler, $F_y(t)$ quer zur Längsachse x ,

und vertikaler $F_z(t)$ Richtung zu erzwungenen Schwingungen angeregt. Der zeitliche Verlauf dieser Erregerkräfte ist in der Abb. 6.4 dargestellt. Dabei entsprechen die Erregerfrequenzen f_{y1} , $f_{y2} = 2f_{y1}$ und $f_{y3} = 3f_{y1}$ der horizontalen Kraftharmonischen immer genau den halben Erregerfrequenzen $f_{z1} = 2f_{y1}$, $f_{z2} = 4f_{y1}$ und $f_{z3} = 6f_{y1}$ der vertikalen Kraftharmonischen. In der Abb. 6.4 ist die Erregerfrequenz exemplarisch mit $f_{y1} = 0.48 \text{ Hz}$ gewählt.

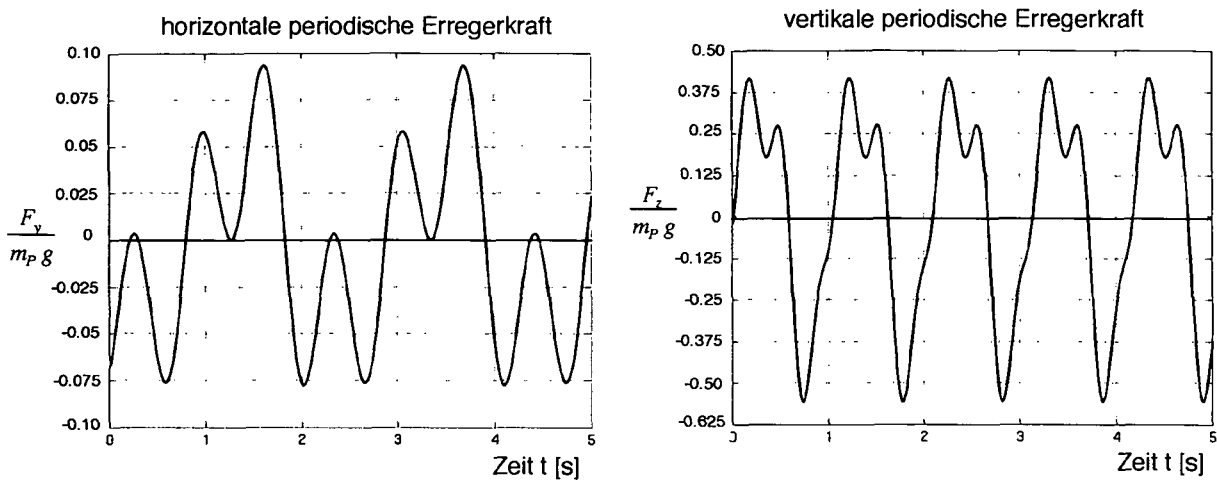


Abb. 6.4: Zeitlicher Verlauf der periodischen Erregerkräfte, zufolge eines einzelnen Fußgängers, in horizontaler und vertikaler Richtung; errechnet aus den Gln. (5-1) und (5-4); $m_p = 80 \text{ kg}$,
 $a_{1,y} = 0.05g$, $a_{2,y} = 0.01g$, $a_{3,y} = 0.05g$; $\varphi_{1,y} = 4\pi/5$, $\varphi_{2,y} = 2\pi/5$, $\varphi_{3,y} = \pi/5$;
 $a_{1,z} = 0.40g$, $a_{2,z} = 0.10g$, $a_{3,z} = 0.12g$, $\varphi_{1,z} = 0$, $\varphi_{2,z} = \pi/2$, $\varphi_{3,z} = \pi/2$

Die Seitenführungskraft $F_y(t)$ ergibt sich dabei aus der Überlagerung von drei Beschleunigungsanteilen, wie in Gl. (5-4) angegeben, wobei die Beschleunigungsanteile mit $a_{1,y} = 0.05g$, $a_{2,y} = 0.01g$, $a_{3,y} = 0.05g$ und die zugehörigen Phasenwinkel mit $\varphi_{1,y} = 4\pi/5$, $\varphi_{2,y} = 2\pi/5$, $\varphi_{3,y} = \pi/5$ festgelegt werden. Für die Ermittlung von $F_z(t)$ wird $a_{1,z} = 0.40g$, $a_{2,z} = 0.10g$, $a_{3,z} = 0.12g$ und $\varphi_{1,z} = 0$, $\varphi_{2,z} = \pi/2$, $\varphi_{3,z} = \pi/2$ festgelegt und mit Gl. (5-1) ausgewertet. Unter der Annahme eines Synchronisationseffektes der Fußgänger, wie in Kapitel 5, Abschnitt 5.4.2 ausführlich beschrieben, ist die Masse eines einzelnen Fußgängers m_p , (im Mittel wird $m_p = 80 \text{ kg}$ angenommen), mit der in Synchronisation befindlichen Anzahl von Personen βn_p zu multiplizieren. Im Falle des Hauptfeldes wird die Personenanzahl mit $n_p = 450$ und der

Abminderungsfaktor mit $\beta = 0.50$ festgelegt, d.h. 50% der auf der Brücke befindlichen Personen befinden sich in Synchronisation. Mit Hilfe dieser Angaben können die periodischen Erregerkräfte pro Längeneinheit in horizontaler und vertikaler Richtung $p_y(t)$ und $p_z(t)$ wie folgt angeschrieben werden,

$$p_y(t) = 125 \left[0.05 g \sin(2\pi f_{y1} - 4\pi/5) + 0.01 g \sin(2\pi f_{y2} - 2\pi/5) + 0.05 g \sin(2\pi f_{y3} - \pi/5) \right],$$

$$p_z(t) = 125 \left[0.40 g \sin 2\pi f_{z1} + 0.10 g \sin(2\pi f_{z2} - \pi/2) + 0.12 g \sin(2\pi f_{z3} - \pi/2) \right],$$

(6-2)

wobei der Vorfaktor, $\beta n_p m_p / l = 125 \text{ kg/m}$, aus Gl. (5-22) berechnet wird. Es werden insgesamt zwei maßgebliche Anregungszustände des Hauptfeldes untersucht, nämlich einerseits eine symmetrische, gleichmäßig verteilte, periodische Anregung in horizontaler und vertikaler Richtung und andererseits eine unsymmetrische, sogenannte „schlangenlinienförmige“, periodische Anregung in horizontaler Richtung. Die letztere wurde durch Video Aufnahmen am Tag der Eröffnung beobachtet, wie von Dallard et al. [2] beschrieben. In der Abb. 6.5 sind die beiden unterschiedlichen Anregungszustände dargestellt.

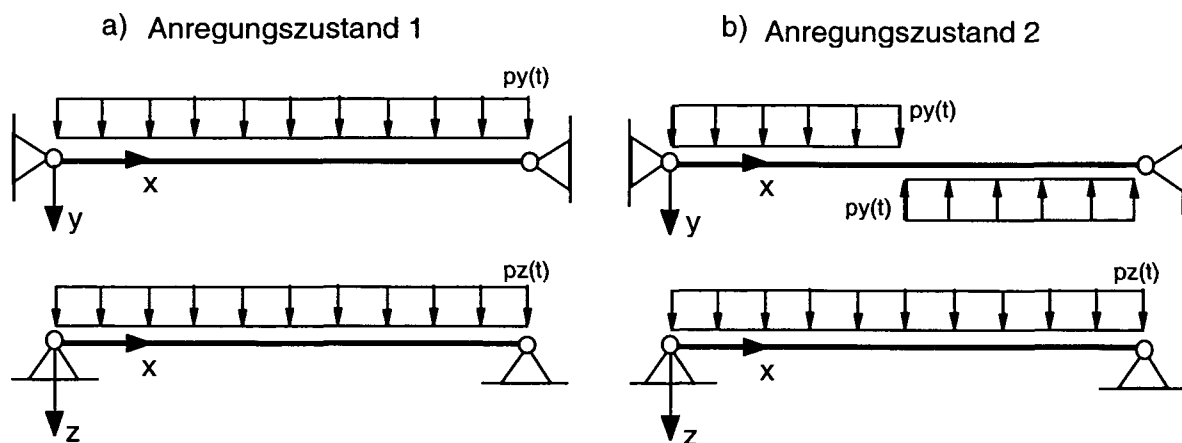


Abb. 6.5: Anregungszustände des Hauptfeldes, a) symmetrische Kraftanregung in horizontaler und vertikaler Richtung, b) unsymmetrische, sogenannte „schlangenlinienförmige“, Kraftanregung in horizontaler Richtung und beibehaltene symmetrische Kraftanregung in vertikaler Richtung

Zur Reduzierung der Schwingungsantwort des Hauptfeldes werden nun insgesamt drei Flüssigkeitstilger an diskreten Stellen des Brückenquerschnittes installiert. Der Entwurf und die optimale Abstimmung erfolgt dabei auf die Grundfrequenz f_{s1} , (Flüssigkeitstilger 1), und auf die erste Oberfrequenz f_{s2} , (Flüssigkeitstilger 2 und 3), deren zugehörige symmetrische bzw. unsymmetrische Schwingungsformen dominierend horizontal sind, wie der Tabelle 6.1 zu entnehmen ist. Als günstigste Installationsposition der Tilger ergeben sich die Stellen größter Ausschläge der relevanten Schwingungsformen (Abb. 6.3), $x_1 = l/2$, $x_2 = l/4$ und $x_3 = 3l/4$, wie in der Abb. 6.6 illustriert.

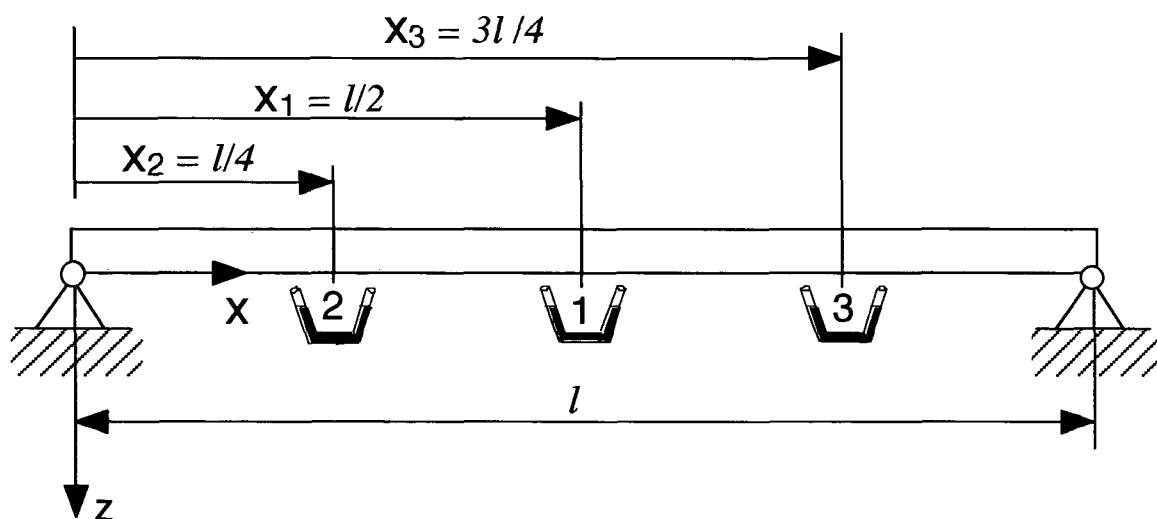


Abb. 6.6: Drei zu installierende Flüssigkeitstilger an diskreten Stellen des Brückenquerschnittes; Flüssigkeitstilger 1: optimal abgestimmt auf die Grundfrequenz f_{s1} ; Flüssigkeitstilger 2 und 3: optimal abgestimmt auf die erste Oberfrequenz f_{s2}

6.1.3 Hauptfeld: Optimale Abstimmung der geschlossenen Flüssigkeitstilger mit Luftfeder

In Analogie zu der Vorgehensweise in Kapitel 3, Abschnitt 3.6.2, wird in einem ersten Schritt das Verhältnis von Flüssigkeitsmasse zur jeweiligen modalen (bewegten) Brückenmasse der zu tilgenden Schwingungsform und die Geometrie festgelegt. In

unserem Fall betragen die modalen Brückenmassen $M_1^* = M_2^* = m_T / 2 = 108000 \text{ kg}$ mit $m_T = \rho A l$, woraus sich bei Wahl von $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 \approx 1\%$ die Flüssigkeitsmassen $m_{f1} = m_{f2} = m_{f3} = 1000 \text{ kg}$ ergeben. Die an den Brückenquerschnitt angepasste Geometrie der geschlossenen Flüssigkeitstilger mit Luftfeder ist in Tabelle 6.2 gelistet.

Tabelle 6.2: An den Brückenquerschnitt angepasste Geometrie der geschlossenen Flüssigkeitstilger 1 bis 3 mit Luftfeder; Hauptfeld

	Tilger 1	Tilger 2	Tilger 3
Horizontale Länge des Flüssigkeitsfadens B [m]	2.00	2.00	2.00
Schräge Länge des Flüssigkeitsfadens H [m]	2.00	1.50	1.50
Rohrquerschnitte $A_B = A_H$ [m ²]	0.17	0.20	0.20
Effektive Länge $L_{eff} = 2H + B$, aus Gl. (3-17) [m]	6.00	5.00	5.00
Neigungswinkel der Rohrschenkel β [rad]	$\pi / 4$	$\pi / 4$	$\pi / 4$
Geometriefaktor $\kappa = \bar{\kappa}$, aus Gl. (3-17) und (3-35)	0.80	0.82	0.82
Geometriefaktor $\bar{\kappa}_1$, aus Gl. (3-35)	0.47	0.42	0.42

Die Ermittlung der optimalen Entwurfparameter (ungedämpfte Eigenkreisfrequenzen ω_{Ai} und linear viskose Dämpfungskoeffizienten ζ_{Ai}) erfolgt in einem ersten Optimierungsschritt modal nach Den Hartog und anschließend erfolgt eine Nachbesserung dieser Parameter mit Hilfe des Gütekriteriums im Zustandsraum, wie in Kapitel 3, Abschnitt 3.6.2 ausgeführt.

6.1.3.1 Optimierung mit Hilfe der Analogie zu Den Hartog

Unter Verwendung der in Tabelle 6.2 gelisteten Parameter der geschlossenen Flüssigkeitstilger 1 bis 3, ergeben sich die konjugierten Masseverhältnisse mit Gl. (3-56) zu $\mu_1^* = 0.0059$ und $\mu_2^* = \mu_3^* = 0.0062$. Einsetzen dieser Werte in die konjugierten Entwurfparameter nach Den Hartog, gelistet in Tabelle 1.1 (Fall 1),

$$\delta_{opt}^* = \frac{1}{1 + \mu^*}, \quad \zeta_{opt}^* = \sqrt{\frac{3\mu^*}{8(1 + \mu^*)}}, \quad (6-3)$$

und anschließend Auswerten der Gl. (3-58), liefern die folgenden optimalen Entwurfparameter der Flüssigkeitstilger 1 bis 3,

$$f_{A1} = \frac{\omega_{A1}}{2\pi} = 0.48 \text{ Hz}, \quad f_{A2} = \frac{\omega_{A2}}{2\pi} = 0.94 \text{ Hz}, \quad f_{A3} = \frac{\omega_{A3}}{2\pi} = 0.94 \text{ Hz}, \quad (6-4)$$

$$\zeta_{A1} = 0.047, \quad \zeta_{A2} = 0.048, \quad \zeta_{A3} = 0.048.$$

Aus der Gl. (6-4) erkennt man, dass die Optimierung mit Hilfe der Analogie zu Den Hartog, für die Flüssigkeitstilger 2 und 3 identische Ergebnisse liefert. Diese Tatsache wurde bereits in Kapitel 1, Abschnitt 1.3 erwähnt.

6.1.3.2 Optimierung mit Hilfe des Gütekriteriums im Zustandsraum

Die Anwendung des Gütekriteriums erfordert die Transformation des linearen gekoppelten Differentialgleichungssystem 2. Ordnung, Gln. (4-123) und (4-125), in ein System von Differentialgleichungen 1. Ordnung, wie in Kapitel 1, Abschnitt 1.3 beschrieben. Für eine anfangs allgemeine Brückenstruktur mit N Freiheitsgraden und n installierten Flüssigkeitstilgern an r verschiedenen Stellen ξ_k , somit insgesamt $n \times r$ Flüssigkeitstilger, ergibt sich die zeitliche Ableitung des Zustandsvektors identisch zur Gl. (1-52),

$$\dot{\bar{z}} = (\mathbf{A} + \mathbf{BR})\bar{z} + \bar{b}, \quad \bar{b} = \frac{2}{m_T} \int_0^l \begin{bmatrix} \chi(x) & 0 \\ 0 & \phi(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{p}_y \\ \bar{p}_z \end{bmatrix} dx. \quad (6-5)$$

Die Hypermatrizen \mathbf{A} , \mathbf{B} und \mathbf{R} sind dabei in Gl. (3-69) definiert. Insbesondere ist jedoch zu beachten, dass die Massenmatrix \mathbf{M}_s hier wie folgt definiert ist,

$$\mathbf{M}_S = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{Yn} + \sum_{k=1}^r \chi(\xi_k) \mathbf{L}_k \boldsymbol{\mu}_k \mathbf{L}_k^T \chi(\xi_k) + \sum_{k=1}^r \phi(\xi_k) \mathbf{L}_k^w \boldsymbol{\mu}_k \mathbf{L}_k^{Tw} \phi(\xi_k) & - \sum_{k=1}^r \chi(\xi_k) \mathbf{L}_k \boldsymbol{\mu}_k \bar{\mathbf{K}}_k \\ - \mathbf{K}_k \mathbf{L}_k^T \chi(\xi_k) & \mathbf{I}_r \end{bmatrix}. \quad (6-6)$$

In Gl. (6-6) bezeichnen \mathbf{I}_{Yn} und \mathbf{I}_r Einheitsmatrizen mit den Dimensionen $[N \times N]$ und $[n \times n]$. $\chi(\xi_k)$ und $\phi(\xi_k)$ definieren Diagonalmatrizen der Eigenschwingungsformen in horizontaler und vertikaler Richtung. Die Auswertung dieser Matrizen erfolgt an der Stelle ξ_k , d.h. dort wo der betrachtete Flüssigkeitstilger installiert ist. Die Matrix \mathbf{L} bezeichnet weiters die Einflussmatrix mit der Dimension $[N \times n]$,

$$\mathbf{L}_k^w = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \leftarrow \text{Anzahl der Freiheitsgrade } N \quad (6-7)$$

↑

Anzahl der installierten Flüssigkeitstilger n an der Stelle ξ_k .

Die Matrizen $\boldsymbol{\mu}_k$, \mathbf{K}_k und $\bar{\mathbf{K}}_k$ beziehen sich auf die installierten Flüssigkeitstilger und sind wie folgt definiert, $m_T = \rho A l$,

$$\boldsymbol{\mu}_k = \text{diag} [2m_{f1k} / m_T, 2m_{f2k} / m_T, \dots, 2m_{fnk} / m_T],$$

$$\mathbf{K}_k = \text{diag} [\kappa_{1k}, \kappa_{2k}, \dots, \kappa_{nk}], \quad \bar{\mathbf{K}}_k = \text{diag} [\bar{\kappa}_{1k}, \bar{\kappa}_{2k}, \dots, \bar{\kappa}_{nk}]. \quad (6-8)$$

In Bezugnahme auf das Hauptfeld der Millennium Bridge wird das Gütekriterium, Gl. (3-73), mit dem Zustandsvektor, $\bar{\mathbf{z}}_S = [Y_1 \ Y_2 \ Y_3 \ Y_4 \ Y_5 \ Y_6 \ \dot{Y}_1 \ \dot{Y}_2 \ \dot{Y}_3 \ \dot{Y}_4 \ \dot{Y}_5 \ \dot{Y}_6]^T$, des Hauptsystems, wie folgt formuliert,

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{z}_S^T(v) \mathbf{S} \bar{z}_S(v) dv = 2\pi \bar{b}^T \mathbf{P} \bar{b} \rightarrow \text{Minimum} . \quad (6-9)$$

Dabei wird der Kraftvektor mit $\bar{b} = [1 \ 1 \ \dots \ 1]^T$ so gewählt, dass alle betrachteten Schwingungsformen in horizontaler und vertikaler Richtung, wie in Abb. 6.3 dargestellt, angeregt werden. Die Gewichtung der Verschiebungsgrößen des Hauptsystems erfolgt wiederum durch die spezielle Wahl der Gewichtsmatrix $\mathbf{S} = [10 \ 10 \ 10 \ 10 \ 10 \ 10 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]^T$. Diese Bauart der Gewichtsmatrix hat sich im Zuge der nachfolgenden numerischen Simulationen als günstig erwiesen. Die Minimumsuche der Zielfunktion $J = J(\omega_{A1}, \omega_{A2}, \omega_{A3}, \zeta_{A1}, \zeta_{A2}, \zeta_{A3})$ mit Hilfe Matlab 6.5, $x = \text{fminsearch}(J, \bar{x}_0)$, liefert nach Definition der Startwerte, wobei diese direkt aus der Optimierung mit Hilfe der Analogie zu Den Hartog entnommen werden, Gl. (6-4), $\bar{x}_0 = [2\pi \ 0.48 \ 2\pi \ 0.94 \ 2\pi \ 0.94 \ 0.047 \ 0.048 \ 0.048]^T$, das folgende Ergebnis für die optimalen Entwurfparameter der drei installierten Flüssigkeitstilger,

$$\begin{aligned} f_{A1} = \frac{\omega_{A1}}{2\pi} = 0.47 \text{ Hz}, \quad f_{A2} = \frac{\omega_{A2}}{2\pi} = 0.98 \text{ Hz}, \quad f_{A3} = \frac{\omega_{A3}}{2\pi} = 0.91 \text{ Hz}, \\ \zeta_{A1} = 0.038, \quad \zeta_{A2} = 0.0353, \quad \zeta_{A3} = 0.0314 . \end{aligned} \quad (6-10)$$

Anhand der Gln. (6-4) und (6-10) erkennt man, dass sowohl in den ungedämpften Eigenfrequenzen als auch in den linearen Dämpfungskoeffizienten, Unterschiede zur modalen Optimierung nach Den Hartog feststellbar sind. Der Einfluss von benachbart liegenden Eigenfrequenzen ist somit spürbar vorhanden. Insbesondere wird mit Hilfe des Gütekriteriums die Robustheit des Tilgungsverhaltens erhöht, wie in Kapitel 1, Abschnitt 1.3 beschrieben. Die optimalen Eigenfrequenzen f_{A2} und f_{A3} liegen hier nämlich jeweils links und rechtsseitig von der zu tilgenden Eigenfrequenz f_{S2} . Eine Nachbesserung der Entwurfparameter ist daher durchzuführen. Unter Verwendung dieser optimierten Parameter, Gl. (6-10), ergibt sich der Amplitudenfrequenzgang der gewichteten Zustandsvariablen $\sum_{i=1}^{12} s_i |z_i(v)|$ der Brücke mit und ohne linearisierten

Flüssigkeitstilgern im Dezibel Maßstab, $z_i[dB] = 20 \log z_i$, wie in Abb. 6.7 dargestellt. Man erkennt die erzielte deutliche Reduktion der Schwingungsspitzen zufolge der optimal auf die Grund- und Oberfrequenz des Hauptfeldes abgestimmten Flüssigkeitstilger.

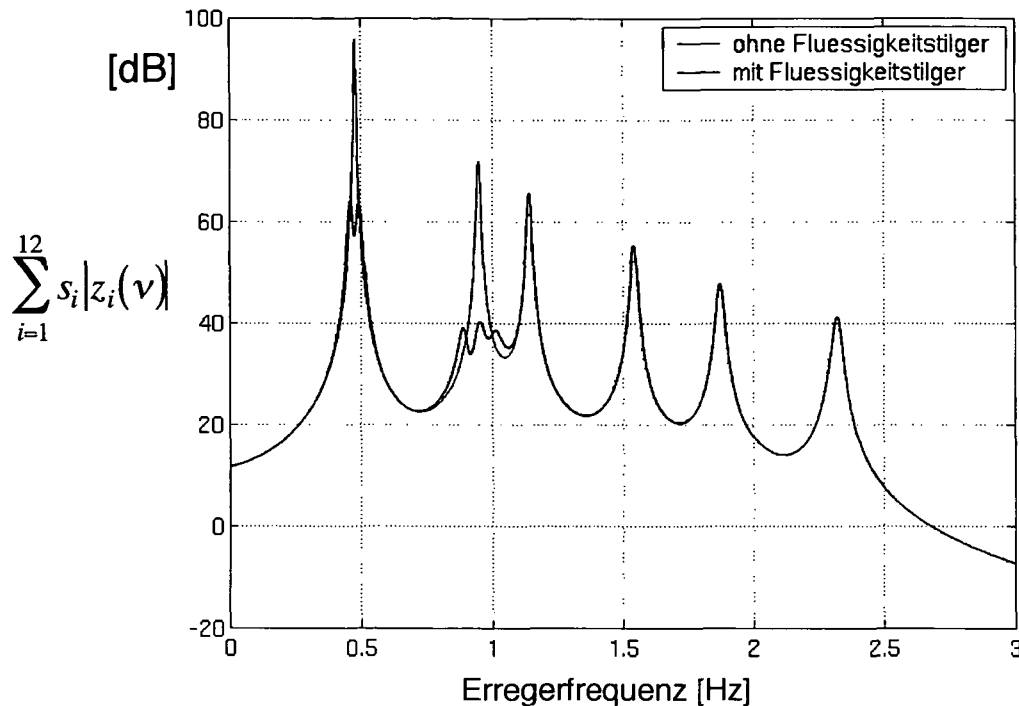


Abb. 6.7: Amplitudenfrequenzgang der gewichteten Zustandsvariablen $\sum_{i=1}^{12} s_i |z_i(v)|$ des Hauptfeldes mit und ohne linearisierten Flüssigkeitstilger; optimale Entwurfsparameter aus Gl. (6-10)

Insbesondere ist anhand der Abb. 6.7 die Aufspaltung der jeweiligen Resonanzspitze in zwei benachbart liegende reduzierte Resonanzspitzen sichtbar, die Grundfrequenz ist $f_{s1} = 0,48 \text{ Hz}$.

Um die in Gl. (6-10) angegebenen optimalen Eigenfrequenzen der Flüssigkeitstilger praktisch zu realisieren, werden die Rohrenden verschlossen und eine zusätzliche Luftfeder wird ausgelegt. Die erforderlichen Höhen der Luftfedern $H_{L,i} = V_{0,i} / A_{H,i}$ für die Flüssigkeitstilger 1 bis 3 ergeben sich dann, mit dem Polytropenexponenten $n = 1,2$ und den Ausgangsdrücken $p_{0,1} = p_{0,2} = p_{0,3} = 10^5 \text{ Pa}$, aus Gl. (3-29) und den vorweggenommenen Parametern der Flüssigkeitstilger, Tabelle 6.2, zu

$$\begin{aligned}
 H_{L,1} &= \frac{2n p_{0,1}}{\rho \omega_{A,1}^2 \Delta L_{eff,1}} = 6.24 \text{ m} , & \Delta L_{eff,1} &= L_{eff,1} - \frac{2g \sin \beta}{\omega_{A,1}^2} = 4.41 \text{ m} , \\
 H_{L,2} &= \frac{2n p_{0,2}}{\rho \omega_{A,2}^2 \Delta L_{eff,2}} = 1.37 \text{ m} , & \Delta L_{eff,2} &= L_{eff,2} - \frac{2g \sin \beta}{\omega_{A,2}^2} = 4.63 \text{ m} , \\
 H_{L,3} &= \frac{2n p_{0,3}}{\rho \omega_{A,3}^2 \Delta L_{eff,3}} = 1.60 \text{ m} , & \Delta L_{eff,3} &= L_{eff,3} - \frac{2g \sin \beta}{\omega_{A,3}^2} = 4.58 \text{ m} .
 \end{aligned} \tag{6-11}$$

Die Luftvolumina im jeweiligen Flüssigkeitstilger betragen somit $A_{H,1}H_{L,1}=1.07 \text{ m}^3$, $A_{H,2}H_{L,2}=0.274 \text{ m}^3$ und $A_{H,3}H_{L,3}=0.32 \text{ m}^3$. Dabei wird das doch relativ große Luftvolumen des Flüssigkeitstilgers 1 durch Aufsetzen eines Rechteckbehälters mit den Abmessungen $1.20 / 1.20 / 0.57 \text{ m}$ sichergestellt. Bei den Flüssigkeitstilgern 2 und 3 wird das mit Wasser gefüllte Rohr einfach um $H_{L,2}=1.37 \text{ m}$ und $H_{L,3}=1.60 \text{ m}$ verlängert, wie in der Abb. 6.8 - Abb. 6.10 dargestellt.

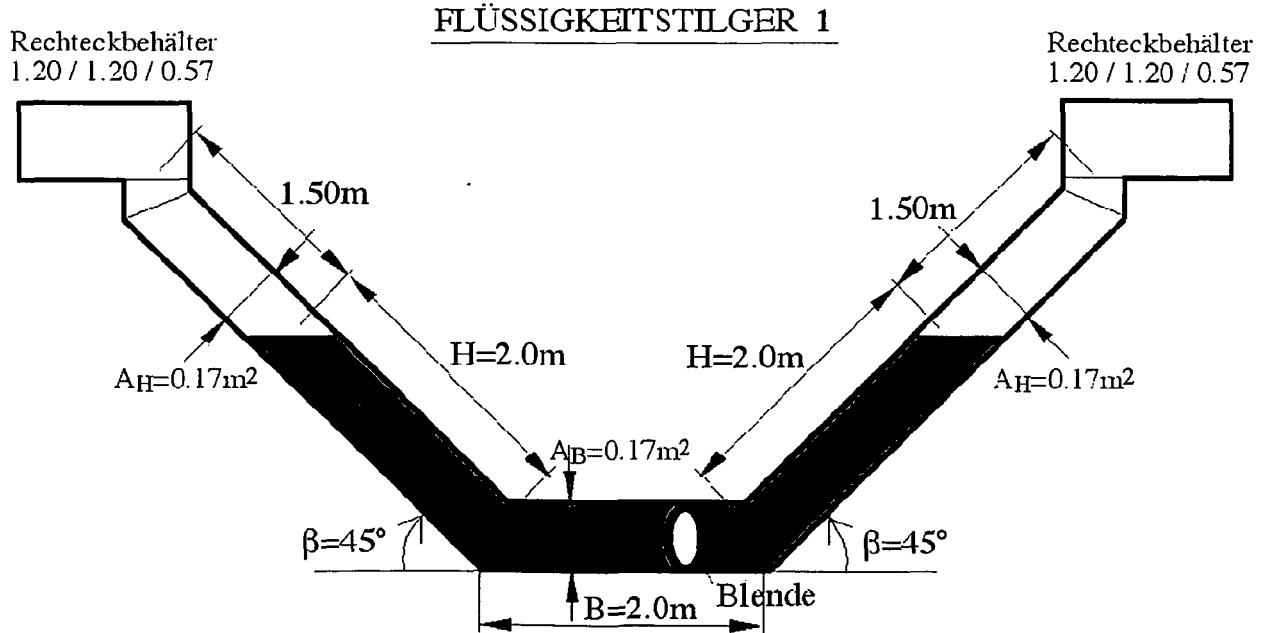


Abb. 6.8: Maßstäbliche Skizze des optimal abgestimmten Flüssigkeitstilgers 1 mit Luftfeder, Hauptfeld; $U_{\max} / H_{L,1} = 0.13 < 0.30$

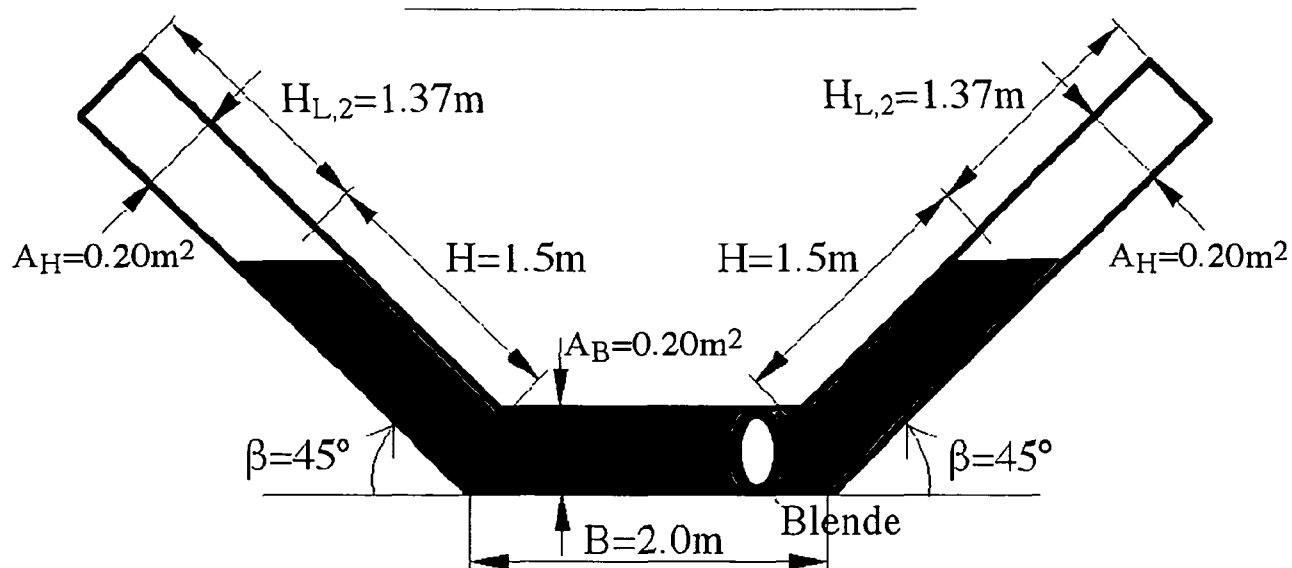
FLÜSSIGKEITSTILGER 2

Abb. 6.9: Maßstäbliche Skizze des optimal abgestimmten Flüssigkeitstilgers 2 mit Luftfeder, Hauptfeld; $U_{\max} / H_{L,2} = 0.07 < 0.30$

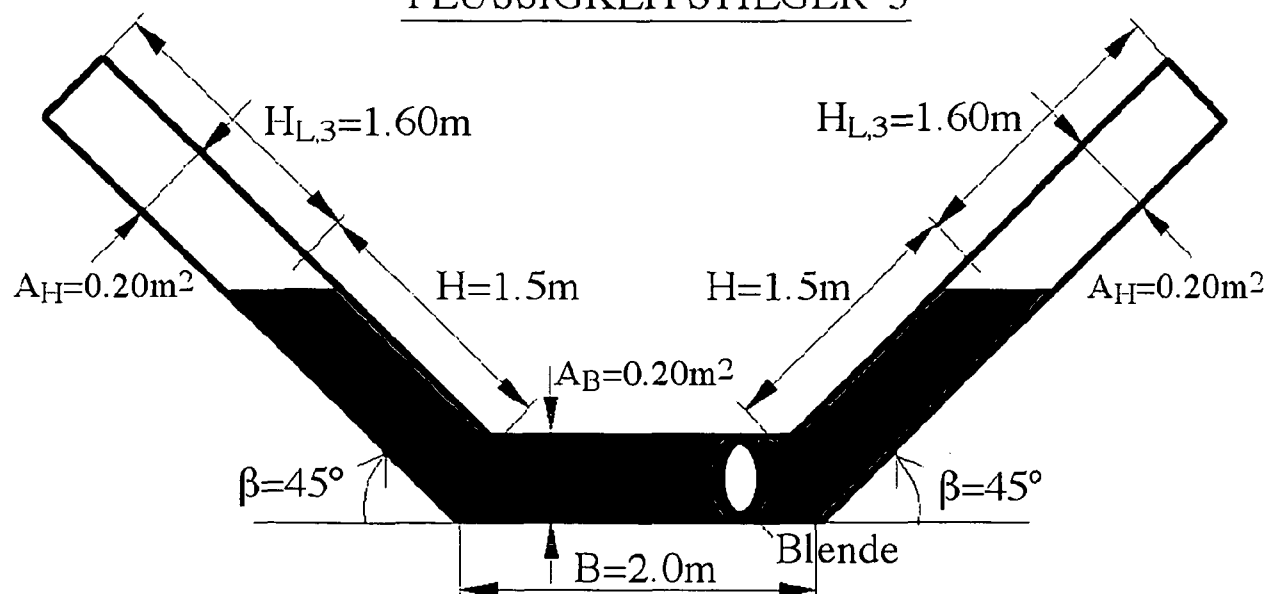
FLÜSSIGKEITSTILGER 3

Abb. 6.10: Maßstäbliche Skizze des optimal abgestimmten Flüssigkeitstilgers 3 mit Luftfeder, Hauptfeld; $U_{\max} / H_{L,3} = 0.06 < 0.30$

6.1.4 Numerische Simulation der Hauptfeldschwingungen

Die numerischen Studien des Hauptfeldes werden nun ohne und mit den optimal abgestimmten Flüssigkeitstilgern durchgeführt. Die Kraftanregung des Brückenfeldes erfolgt dabei entsprechend den in Abb. 6.5 dargestellten symmetrischen und antisymmetrischen Anregungszuständen. Für die gesamten Simulationen wird die nichtlineare Turbulenzdämpfung δ_L aus Gl. (3-20) berücksichtigt. Diese ergibt sich aus Gl. (3-60) mit dem linearen optimalen Dämpfungskoeffizienten $\zeta_{A,i}$ des jeweiligen Flüssigkeitstilgers und einer abgeschätzten maximalen Schwingungsamplitude des Flüssigkeitsfadens U_{\max} . Zusätzlich werden in der modalen Bewegungsgleichung der Hauptstruktur und des Flüssigkeitstilgers die vorhandenen Nichtlinearitäten und auch die Parameteranregung aus der vertikalen Schwingung beibehalten, wie in den Gln. (4-123) und (4-125) berücksichtigt. Die Lösung dieses nichtlinearen Gleichungen erfolgt mit Hilfe von Matlab 6.5 / Simulink.

An dieser Stelle werden noch die hinreichenden Stabilitätsbedingungen der erforderlichen linearen Flüssigkeitsdämpfungen im Falle von geschlossenen Rohrenden, Gl. (3-49), die zur sicheren Vermeidung von Parameterresonanz notwendig sind, angeschrieben,

$$\zeta_{A1,G} = \frac{2w_1}{L_{eff}} \sin\beta = 0.005 < \zeta_{A1} = 0.038 ,$$

$$\zeta_{A2,G} = \frac{2w_2}{L_{eff}} \sin\beta = 0.004 < \zeta_{A2} = 0.0353 , \quad (6-12)$$

$$\zeta_{A3,G} = \frac{2w_3}{L_{eff}} \sin\beta = 0.004 < \zeta_{A3} = 0.0314 ,$$

wobei die maximalen vertikalen Schwingungsamplituden $w_1 = 20\text{ mm}$, $w_2 = 15\text{ mm}$ und $w_3 = 15\text{ mm}$ aus einer numerischen Simulation des linearen Hauptfeldes mit Flüssigkeitstilger, an der kritischen Resonanzstelle $\lambda = 1/4$, Gl. (3-47), ermittelt werden. Aus den Gln. (6-12) folgt, dass die vorhandene optimale Flüssigkeitsdämpfung der Tilger 1 bis 3 ausreichend ist und daher eine schädliche

Auswirkung der vertikalen Anregung der Brücke auf das optimale Dämpfungsverhalten der Flüssigkeitstilger nicht zu erwarten ist.

6.1.4.1 Anregungszustand 1 – symmetrische Anregung in horizontaler und vertikaler Richtung

Zufolge der symmetrischen Krafterregung des Hauptfeldes werden nur die symmetrischen Schwingungsformen angeregt, wie in der Abb. 6.3 dargestellt. Die maximalen Verschiebungen treten daher in Feldmitte auf. Die äquivalenten optimalen Turbulenzdämpfungsterme ergeben sich aus Gl. (3-60) zu $\delta_{L1} = 0.11$, $\delta_{L2} = 4.16$ und $\delta_{L3} = 3.70$, wobei die maximalen Schwingungsamplituden mit $U_{\max,1} = 800 \text{ mm}$ und $U_{\max,2} = U_{\max,3} = 20 \text{ mm}$ abgeschätzt werden. Letztere folgen aus einer numerischen Simulation des Hauptsystems mit linearisierten Flüssigkeitstilgern. Das zeitliche Schwingungsverhalten des Hauptfeldes mit und ohne Flüssigkeitstilger in nichtlinearer Modellierung, horizontale Verschiebung $v(t, x = l/2)$, bei symmetrischer horizontaler und vertikaler Krafterregung, gemäß Gl. (6-2), mit $f_{y1} = 0.48 \text{ Hz}$, $f_{y2} = 2f_{y1}$, $f_{y3} = 3f_{y1}$ und $f_{z1} = 0.96 \text{ Hz}$, $f_{z2} = 2f_{z1}$, $f_{z3} = 3f_{z1}$ ist in der Abb. 6.11 illustriert. Die Erregerfrequenz f_{y1} wird dabei identisch mit der Grundfrequenz f_{s1} gewählt. Dies entspricht der Theorie des in Kapitel 5, Abschnitt 5.4.2 dargelegten Rückkoppelungs- bzw. „Lock-in“ Effektes, wo sich eine anfangs regellos fortbewegende Fußgängergruppe an die Eigenfrequenz der schwingenden Unterlage anpasst.

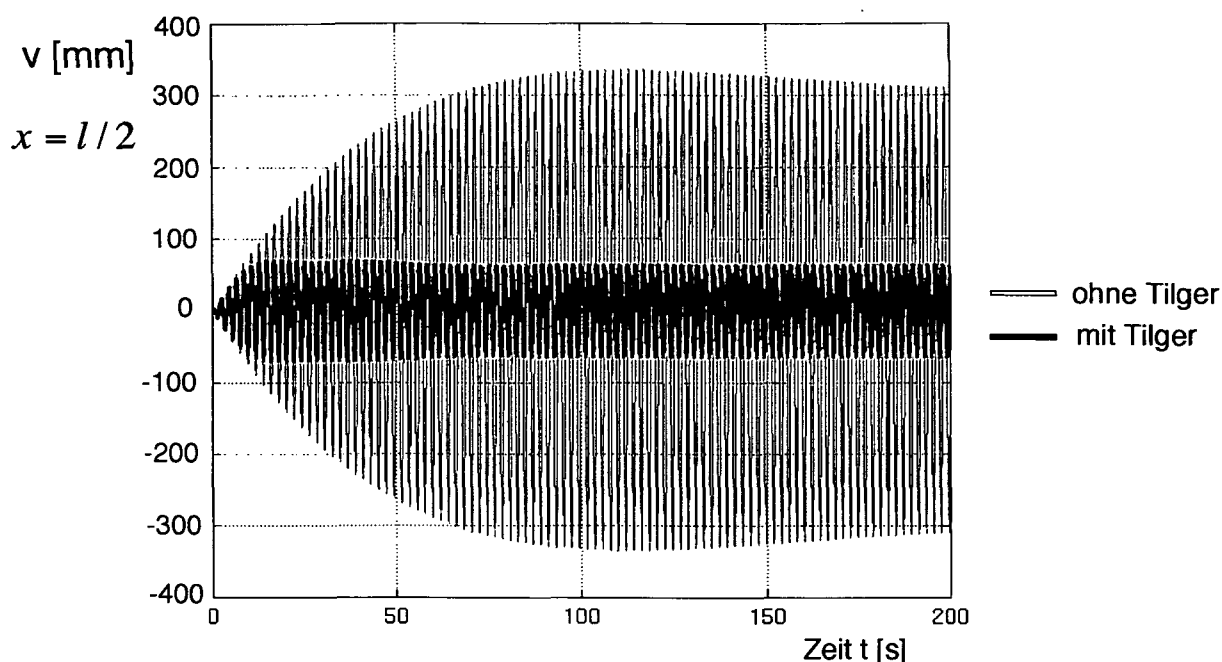


Abb. 6.11: Zeitliches Schwingungsverhalten des Hauptfeldes mit und ohne Flüssigkeitstilger; horizontale Verschiebung $v(t, x = l/2)$; symmetrische horizontale und vertikale Kraftanregung gemäß Gl. (6-2); Erregerfrequenzen: $f_{y1} = 0.48 \text{ Hz}$, $f_{y2} = 2f_{y1}$, $f_{y3} = 3f_{y1}$ und $f_{z1} = 0.96 \text{ Hz}$, $f_{z2} = 2f_{z1}$, $f_{z3} = 3f_{z1}$; nichtlineares Modellverhalten; Turbulenzdämpfungsterme $\delta_{L1} = 0.11$, $\delta_{L2} = 4.16$ und $\delta_{L3} = 3.70$

Man erkennt eine deutliche Reduktion der maximalen Verschiebungen $v(t)$ zufolge der installierten Flüssigkeitstilger. Die stationäre Schwingungsantwort wird von ca. 300 mm auf 70 mm , d.h. um mehr als 75% reduziert. Ergänzend ist in der Abb. 6.12 das stationäre Schwingungsverhalten des Hauptfeldes mit und ohne Flüssigkeitstilger in nichtlinearer Modellierung, vertikale Verschiebung $w(t, x = l/2)$, bei symmetrischer horizontaler und vertikaler Krafterregung, gemäß Gl. (6-2), mit $f_{y1} = 0.48 \text{ Hz}$, $f_{y2} = 2f_{y1}$, $f_{y3} = 3f_{y1}$ und $f_{z1} = 0.96 \text{ Hz}$, $f_{z2} = 2f_{z1}$, $f_{z3} = 3f_{z1}$ dargestellt.

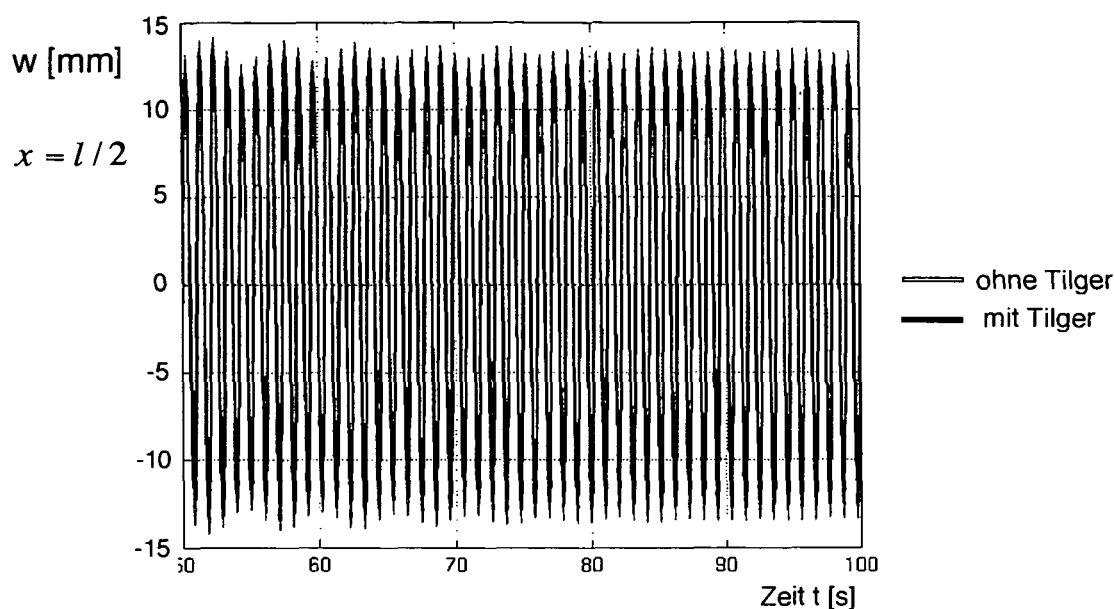


Abb. 6.12: Stationäres Schwingungsverhalten des Hauptfeldes mit und ohne Flüssigkeitstilger; vertikale Verschiebung $w(t, x = l/2)$; symmetrische horizontale und vertikale Kraftanregung gemäß Gl. (6-2); Erregerfrequenzen: $f_{y1} = 0.48 \text{ Hz}$, $f_{y2} = 2f_{y1}$, $f_{y3} = 3f_{y1}$ und $f_{z1} = 0.96 \text{ Hz}$, $f_{z2} = 2f_{z1}$, $f_{z3} = 3f_{z1}$; nichtlineares Modellverhalten; Turbulenzdämpfungsterme $\delta_{L1} = 0.11$, $\delta_{L2} = 4.16$ und $\delta_{L3} = 3.70$

Die Abb. 6.12 zeigt, dass ein Einfluss der Flüssigkeitstilger auf die vertikale Schwingung des Hauptfeldes nur in geringem Maße vorhanden ist. Die installierten Flüssigkeitstilger bewirken daher nur eine vernachlässigbare Verschlechterung des vertikalen Schwingungsverhaltens. Insbesondere wird darauf hingewiesen, dass die in Abb. 6.11 dargestellte schwingungsdämpfende Wirkung allein durch den Flüssigkeitstilger 1 erzielt wird, der optimal auf die Grundschiwingung $f_{s1} = 0.48 \text{ Hz}$ abgestimmt ist. Die Flüssigkeitstilger 2 und 3 reagieren in dem betrachteten Frequenzbereich der Erregung nur geringfügig.

Um die Wirkung der Flüssigkeitstilger in der Umgebung der ersten Resonanzstelle, $f_{s1} = 0.48 \text{ Hz}$, genauer zu untersuchen werden weitere numerische Simulationen durchgeführt und die maximalen Schwingungsantworten aufgezeichnet. Der an diskreten Stellen der Erregerfrequenzen f_{yi} und f_{zi} numerisch ermittelte DVF der horizontalen Verschiebung $v(t, x = l/2)$ mit und ohne Flüssigkeitstilger in nichtlinearer Modellierung, ist in der Umgebung der ersten Resonanzstelle in Abb. 6.13 illustriert.

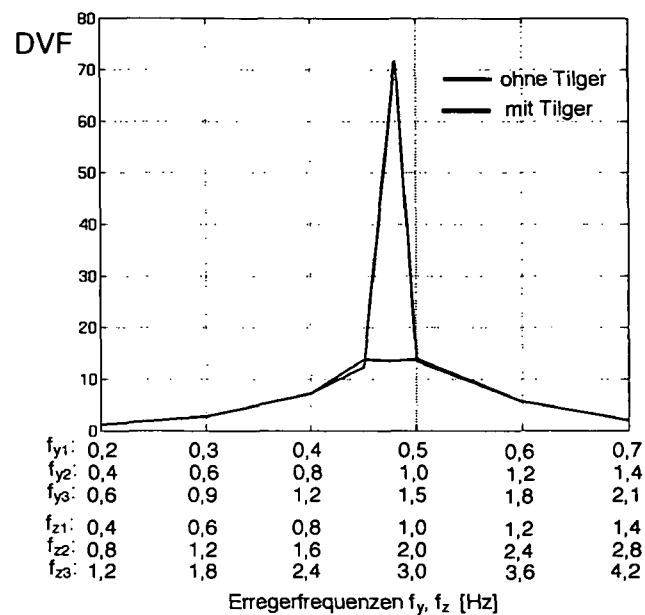


Abb. 6.13: Numerisches Ergebnis des dynamischen Vergrößerungsfaktors (DVF) des Hauptfeldes mit und ohne Flüssigkeitstilger; horizontale Verschiebung $v(t, x = l/2)$; symmetrische horizontale und vertikale Kraftanregung; Erregerfrequenzen: f_{y1} , f_{y2} , f_{y3} und f_{z1} , f_{z2} , f_{z3} ; nichtlineares Modellverhalten; Turbulenzdämpfungsterme $\delta_{L1} = 0.11$, $\delta_{L2} = 4.16$ und $\delta_{L3} = 3.70$

Ein stark reduzierter Verlauf des DVF mit Flüssigkeitstilgern wird erzielt. Die vertikale Anregung zeigt keinen negativen Einfluss auf das Tilgungsverhalten des auf die Grundschiwingung f_{s1} optimal abgestimmten Flüssigkeitstilgers 1. Die Schwingungsantwort des Hauptfeldes wird somit erfolgreich reduziert. Insbesondere wird anhand der Abb. 6.13 eine Erhöhung der natürlichen Dämpfung $\zeta_{s1} = 0.60\%$ auf die resultierende $\zeta_{res} \approx 3.6\%$ mit installierten Flüssigkeitstilgern festgestellt, wie in Kapitel 4, Abschnitt 3.7 beschrieben.

6.1.4.2 Anregungszustand 2 – unsymmetrische horizontale und symmetrische vertikale Anregung

Die Anregung des Hauptfeldes erfolgt nun gemäß dem in Abb. 6.5 dargestellten Anregungszustand 2. Zufolge dieser unsymmetrischen, sogenannten „schlangenlinienförmigen“ Kräfteerregung in horizontaler Querrichtung des Hauptfeldes, wird die zweite Schwingungsform χ_2 , dargestellt in der Abb. 6.3, angeregt. Die Dissipation der im Hauptfeld aufgespeicherten Schwingungsenergie

erfolgt daher vorwiegend durch die auf die erste Oberfrequenz f_{s2} abgestimmten Flüssigkeitstilger 2 und 3. Die dynamische Kraftwirkung in vertikaler Richtung wird wiederum symmetrisch angenommen. Der Anpassungseffekt der Schrittfrequenz von synchronisierenden Fußgängergruppen, an diese zweite Schwingungsform des Hauptfeldes, wurde insbesondere am Tag der Eröffnung beobachtet, wie von Dallard et al. [2] beschrieben. Die maximalen horizontalen Verschiebungen $v(t)$ treten hier an der Stelle $x = l/4$ auf.

Die optimalen Turbulenzdämpfungsterme ergeben sich wiederum aus Gl. (3-60) zu $\delta_{L1} = 8.95$, $\delta_{L2} = 0.83$ und $\delta_{L3} = 0.74$, mit den aus einer numerischen Simulation des Hauptsystems mit linearen Flüssigkeitstilgern ermittelten, maximalen Schwingungsamplituden $U_{\max,1} = 10 \text{ mm}$ und $U_{\max,2} = U_{\max,3} = 100 \text{ mm}$. Das zeitliche Schwingungsverhalten mit und ohne Flüssigkeitstilger in nichtlinearer Modellierung, horizontale Verschiebung $v(t, x = l/4)$, bei unsymmetrischer horizontaler und symmetrischer vertikaler Krafterregung, gemäß Gl. (6-2), mit $f_{y1} = 0.95 \text{ Hz}$, $f_{y2} = 2 f_{y1}$, $f_{y3} = 3 f_{y1}$ und $f_{z1} = 1.90 \text{ Hz}$, $f_{z2} = 2 f_{z1}$, $f_{z3} = 3 f_{z1}$, ist in der Abb. 6.14 dargestellt.

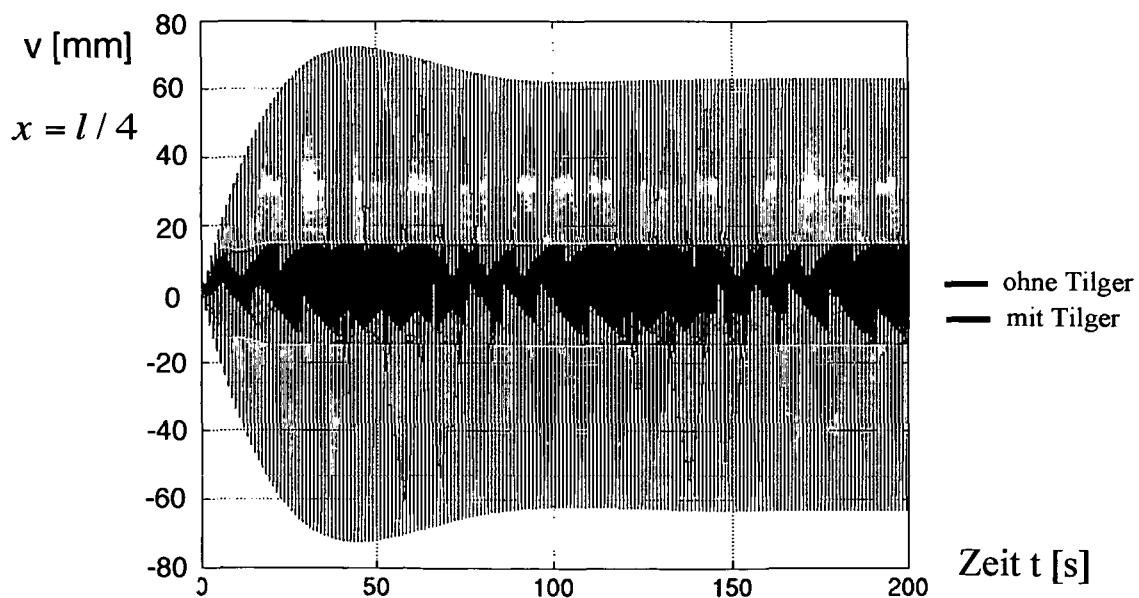


Abb. 6.14: Zeitliches Schwingungsverhalten des Hauptfeldes mit und ohne Flüssigkeitstilger; horizontale Verschiebung $v(t, x = l/4)$; unsymmetrische horizontale und symmetrische vertikale Krafterregung, gemäß Gl. (6-2); Erregerfrequenzen: $f_{y1} = 0.95 \text{ Hz}$, $f_{y2} = 2 f_{y1}$, $f_{y3} = 3 f_{y1}$ und $f_{z1} = 1.90 \text{ Hz}$, $f_{z2} = 2 f_{z1}$, $f_{z3} = 3 f_{z1}$; nichtlineares Modellverhalten; Turbulenzdämpfungsterme $\delta_{L1} = 8.95$, $\delta_{L2} = 0.83$ und $\delta_{L3} = 0.74$

Die Erregerfrequenz f_{y1} wird dabei identisch mit der ersten Oberfrequenz f_{s2} des Hauptfeldes gewählt. Die positive Wirkung der Flüssigkeitstilger 2 und 3 ist deutlich erkennbar: die maximalen Amplituden der stationären Schwingungsantwort, Verschiebung $v(t, x = l/4)$, werden hier um rund 70% reduziert. In der Abb. 6.15 ist das stationäre Schwingungsverhalten mit und ohne Flüssigkeitstilger in nichtlinearer Modellierung, vertikale Verschiebung $w(t, x = l/4)$, bei unsymmetrischer horizontaler und symmetrischer vertikaler Krafterregung, gemäß Gl. (6-2), mit $f_{y1} = 0.95 \text{ Hz}$, $f_{y2} = 2 f_{y1}$, $f_{y3} = 3 f_{y1}$ und $f_{z1} = 1.90 \text{ Hz}$, $f_{z2} = 2 f_{z1}$, $f_{z3} = 3 f_{z1}$, illustriert.

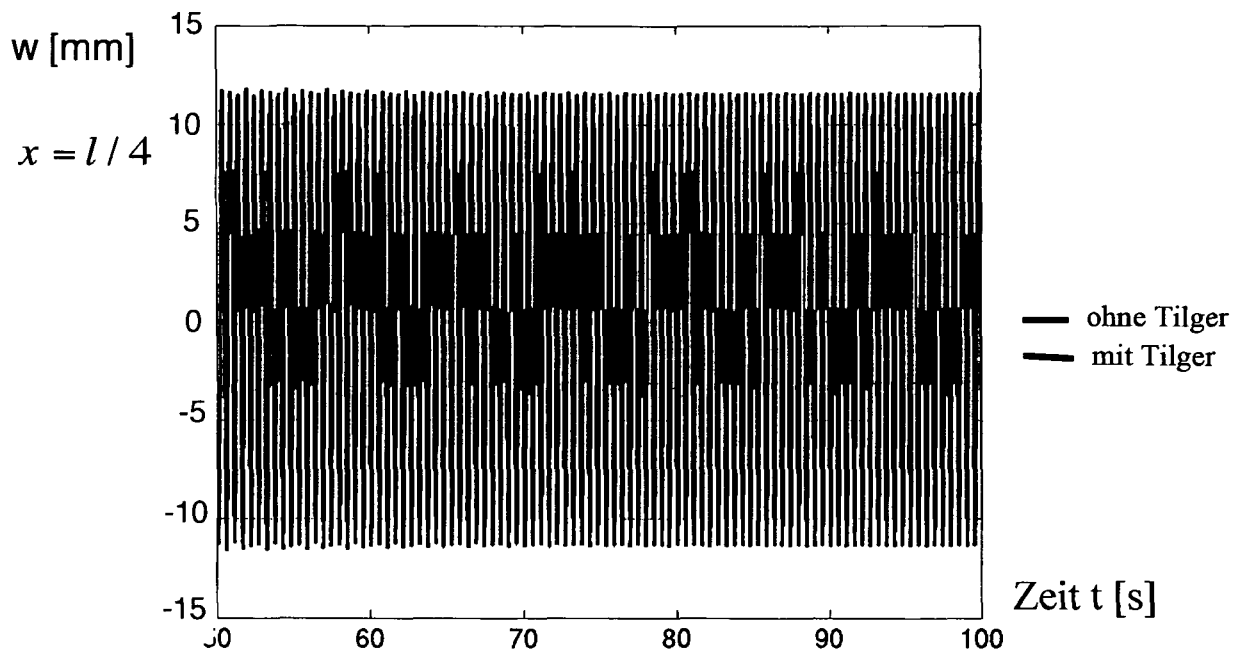


Abb. 6.15: Zeitliches Schwingungsverhalten des Hauptfeldes mit und ohne Flüssigkeitstilger; vertikale Verschiebung $w(t, x = l/4)$; unsymmetrische horizontale und symmetrische vertikale Krafterregung gemäß Gl. (6-2); Erregerfrequenzen: $f_{y1} = 0.95 \text{ Hz}$, $f_{y2} = 2 f_{y1}$, $f_{y3} = 3 f_{y1}$ und $f_{z1} = 1.90 \text{ Hz}$, $f_{z2} = 2 f_{z1}$, $f_{z3} = 3 f_{z1}$; nichtlineares Modellverhalten; Turbulenzdämpfungsterme $\delta_{L1} = 8.95$, $\delta_{L2} = 0.83$ und $\delta_{L3} = 0.74$

Man erkennt, dass auch in diesem Fall kein bzw. nur ein sehr geringer Einfluss der Flüssigkeitstilger auf das vertikale Schwingungsverhalten der Brücke vorhanden ist. Der an diskreten Stellen der Erregerfrequenzen f_{yi} und f_{zi} numerisch ermittelte DVF, Verschiebung $v(t, x = l/4)$ mit und ohne Flüssigkeitstilger in nichtlinearer

Modellierung, ist in der Umgebung der zweiten Resonanzstelle $f_{s2} = 0.95 \text{ Hz}$ des Hauptfeldes in der Abb. 6.16 illustriert.

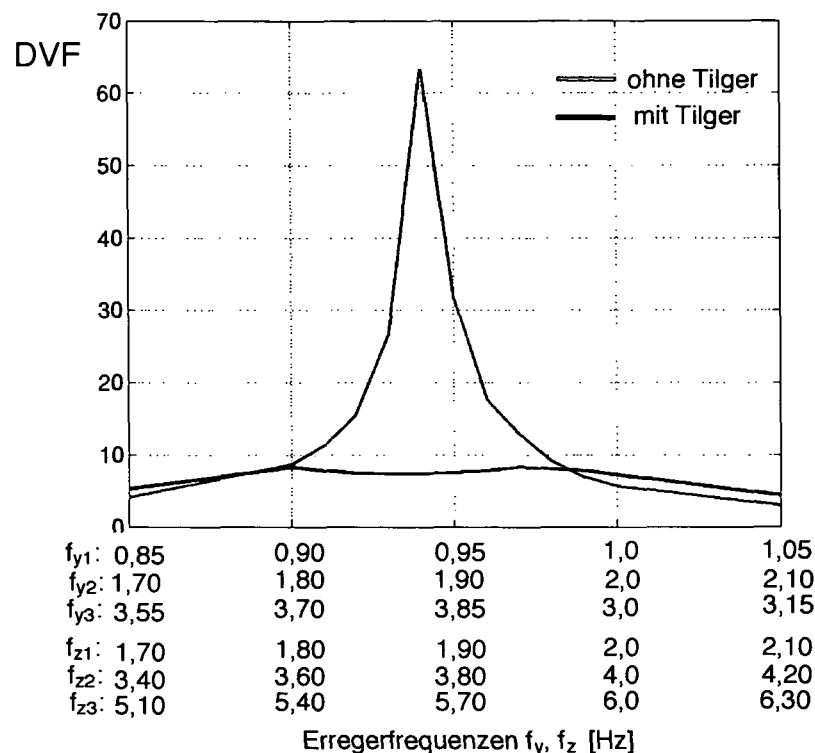


Abb. 6.16: Numerisches Ergebnis des dynamischen Vergrößerungsfaktors (DVF) des Hauptfeldes mit und ohne Flüssigkeitstilger; horizontale Verschiebung $v(t, x = l/4)$; unsymmetrische horizontale und symmetrische vertikale Kraftanregung; Erregerfrequenzen: f_{y1}, f_{y2}, f_{y3} und f_{z1}, f_{z2}, f_{z3} ; nichtlineares Modellverhalten; Turbulenzdämpfungsterme $\delta_{L1} = 8.95$, $\delta_{L2} = 0.83$ und $\delta_{L3} = 0.74$

Man erkennt, dass die Resonanzspitze zufolge der installierten Flüssigkeitstilger beträchtlich reduziert wird. Somit kann auch die Schwingungsantwort des Hauptfeldes zufolge unsymmetrischer, sogenannter „schlangelinienförmiger“, horizontaler und symmetrischer vertikaler Anregung erfolgreich reduziert werden. Die resultierende Dämpfung mit Flüssigkeitstilger beträgt hier $\zeta_{res} \approx 6.3\%$.

6.1.5 Nördliches Seitenfeld – Installation von einem Flüssigkeitstilger

Das nördliche Seitenfeld mit einer Spannweite von $l = 81 \text{ m}$, wie in der Abb. 6.1 dargestellt, hat eine Masse pro Längeneinheit $m = 1520 \text{ kg/m}$. In der Arbeit von

Dallard et al. [2] wird die Grundfrequenz $f_{s1} = 1.03 \text{ Hz}$ mit zugehöriger horizontaler Schwingungsform $\chi_1 = \sin \lambda_1 x$ angegeben. Angaben über die weiteren Oberfrequenzen stehen nicht zur Verfügung. Dallard et al. [8] beschreibt das zeitliche Schwingungsverhalten des nördlichen Seitenfeldes am Tag der Eröffnung jedoch als sehr gering. Insbesondere vertikale Biegeschwingungen wurden nur in einem sehr kleinem Ausmaß beobachtet. Die Vernachlässigung des Einflusses der vertikalen Bewegungen scheint damit von vorneherein gerechtfertigt. Dem zur Folge wird die hinreichende Stabilitätsbedingung zur sicheren Vermeidung von Parameterresonanz des geschlossenen Flüssigkeitstilgers, Gl. (3-49), zwanglos erfüllt, d.h. $\zeta_A > \zeta_{A,G}$.

Das nördliche Seitenfeld wird somit als Einfreiheitsgrad-System modelliert, d.h. die dynamische Analyse beschränkt sich nur auf die Betrachtung der Grundfrequenz f_{s1} . Als viskoser Dämpfungskoeffizient wird $\zeta_{s1} = 0.6\%$ angegeben. Die Erregerkraft in horizontaler Richtung wird analog zu Abschnitt 6.1.2 (Anregungszustand 1, Abb. 6.5) gewählt. Dabei wird die Personenanzahl mit $n_p = 250$ und die Anzahl der in Synchronisation befindlichen Personen mit dem Abminderungsfaktor $\beta = 0.50$ festgelegt. Die periodische Erregerkraft pro Längeneinheit $p_y(t)$ ergibt sich dann analog zu Gl. (6-2),

$$p_y(t) = 123.5 \left[0.05 g \sin(2\pi f_{y1} - 4\pi/5) + 0.01 g \sin(2\pi f_{y2} - 2\pi/5) + 0.05 g \sin(2\pi f_{y3} - \pi/5) \right], \quad (6-13)$$

wobei der Vorfaktor aus Gl. (5-22) berechnet wird. Da auch beim nördlichen Seitenfeld, zufolge synchronisierender Fußgängergruppen, starke Querschwingungen zu erwarten sind, wird ein geschlossener Flüssigkeitstilger mit Luftfeder an der Stelle $x = l/2$ installiert. Die optimale Abstimmung erfolgt entsprechend der in Abschnitt 6.1.3 dargelegten Vorgehensweise. Es soll hier ein Vergleich des Gütekriteriums im Zustandsraum (angewendet auf das 1-DOF Hauptsystem mit Flüssigkeitstilger) und der Optimierung mit Hilfe einer Analogie zu Den Hartog vorgelegt werden. Aus der modalen Brückenmasse $M_1^* = m_T/2 = 61560 \text{ kg}$ ergibt sich bei Wahl von $\mu_1 \approx 1.5\%$ die Flüssigkeitsmasse $m_f = 1000 \text{ kg}$. Die gewählte Geometrie des geschlossenen Flüssigkeitstilgers mit Luftfeder ist in Tabelle 6.3 gelistet.

Tabelle 6.3: An den Brückenquerschnitt angepasste Geometrie des geschlossenen Flüssigkeitstilgers mit Luftfeder, nördliches Seitenfeld

		Tilger
Horizontale Länge des Flüssigkeitsfadens B	$[m]$	2.00
Schräge Länge des Flüssigkeitsfadens H	$[m]$	1.50
Rohrquerschnitte $A_B = A_H$	$[m^2]$	0.20
Effektive Länge $L_{eff} = 2H + B$, aus Gl. (3-17)	$[m]$	5.00
Neigungswinkel der Rohrschenkel β	$[rad]$	$\pi / 4$
Geometriefaktor $\kappa = \bar{\kappa}$, aus Gl. (3-17) und (3-35)		0.82

Die optimalen Entwurfparameter, $f_A = \omega_A / 2\pi$ und ζ_A , des Flüssigkeitstilgers ergeben sich aus der Analogie zu Den Hartog, wie in Abschnitt 6.1.3.1 für das Hauptfeld ausgeführt, zu

$$f_A = \frac{\omega_A}{2\pi} = 1.02 \text{ Hz}, \quad \zeta_A = 0.064, \quad (6-14)$$

wobei das konjugierte Masseverhältnis $\mu^* = 0.011$ mit Gl. (3-56) berechnet wird. Im Vergleich dazu wird das Gütekriterium im Zustandsraum, analog zu Abschnitt 6.1.3.2, angewendet. Der Zustandsvektor des Hauptsystems ist mit $\bar{z} = [Y \dot{Y}]$ definiert und die Gewichtsmatrix wird mit $S = [10 \ 1]$ angenommen. Die folgende Minimumsuche der Zielfunktion $J = J(\omega_A, \zeta_A)$, Gl. (6-9), erfolgt mit Matlab 6.5, $x = fminsearch(J, \bar{x}_0)$, und liefert nach Definition der Startwerte aus Gl. (6-14), $\bar{x}_0 = [2\pi 1.02 \ 0.05]^T$, die folgenden optimalen Entwurfparameter des Flüssigkeitstilgers,

$$f_A = \frac{\omega_A}{2\pi} = 1.02 \text{ Hz}, \quad \zeta_A = 0.061. \quad (6-15)$$

Wie zu erwarten war, sind die optimalen Entwurfparameter aus dem Gütekriterium und aus der Analogie zu Den Hartog, Gl. (6-14) und Gl. (6-15), nahezu identisch. Die

Verwendung der optimalen Parameter, Gl. (6-15), ergibt den in Abb. 6.17 dargestellten optimalen Amplitudenfrequenzgang der gewichteten Zustandsvariablen

$\sum_{i=1}^2 s_i |z_i(\nu)|$ des nördlichen Brückenfeldes mit und ohne linearisiertem Flüssigkeitstilger.

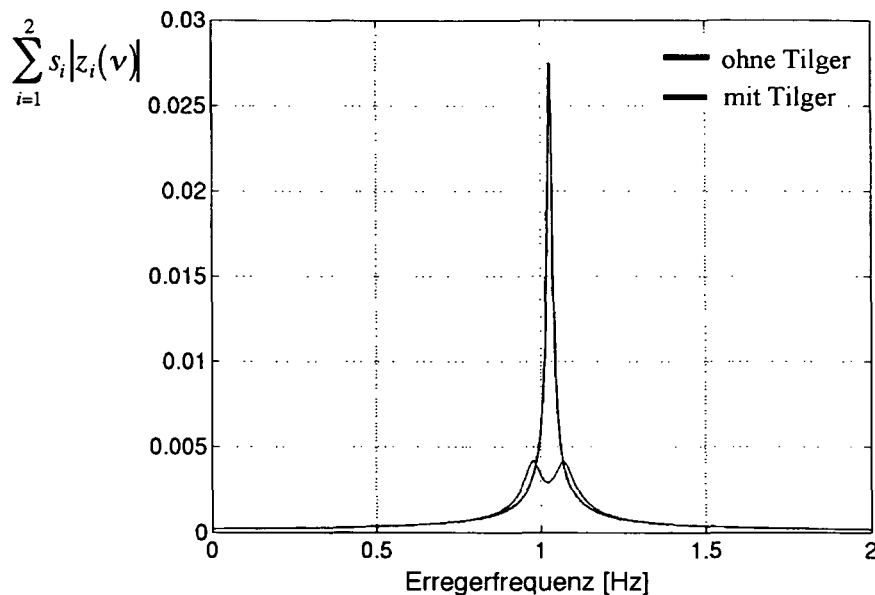


Abb. 6.17: Amplitudenfrequenzgang der gewichteten Zustandsvariablen $\sum_{i=1}^2 s_i |z_i(\nu)|$ des nördlichen Brückenfeldes mit und ohne linearisiertem Flüssigkeitstilger; optimale Entwurfsparameter aus Gl. (6-15)

Die starke Reduktion der Schwingungsspitze zufolge des optimal abgestimmten Flüssigkeitstilgers ist bemerkenswert. Die in Gl. (6-15) angegebene lineare Eigenfrequenz des Flüssigkeitstilgers $f_A = 1.02 \text{ Hz}$ wird durch die Auslegung von H_L praktisch realisiert. Unter Benützung der in Tabelle 6.3 vorweggenommen Parameter des Flüssigkeitstilgers, errechnet sich die erforderliche Luftfederhöhe mit dem Polytropenexponenten $n = 1.2$ und dem Anfangsdruck $p_0 = 10^5 \text{ Pa}$ aus der Gl. (3-29) zu,

$$H_L = \frac{2 n p_0}{\rho \omega_A^2 \Delta L_{eff}} = 1.25 \text{ m} , \quad \Delta L_{eff} = L_{eff} - \frac{2 g \sin \beta}{\omega_A^2} = 4.66 \text{ m} . \quad (6-16)$$

Das erforderliche Luftvolumen beträgt somit $A_H H_L = 0.25 \text{ m}^3$. Der so entworfene optimale Flüssigkeitstilger ist in der Abb. 6.18 maßstäblich dargestellt.

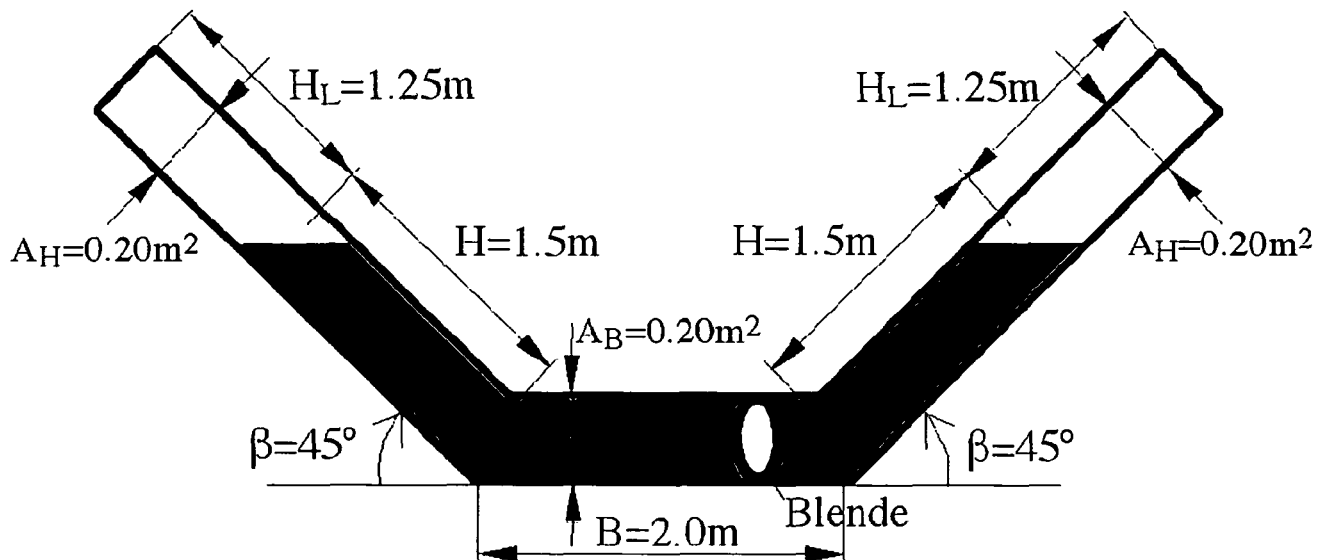


Abb. 6.18: Maßstäbliche Skizze des optimal abgestimmten Flüssigkeitstilgers mit Luftfeder, nördliches Brückenfeld; $U_{\max} / H_L = 0.08 < 0.30$

Das zeitliche Schwingungsverhalten des nördlichen Seitenfeldes mit und ohne Flüssigkeitstilger in nichtlinearer Modellierung, horizontale Verschiebung $v(t, x = l/2)$, bei symmetrischer horizontaler Krafterregung, entsprechend Gl. (6-13), mit $f_{y1} = 1.03 \text{ Hz}$, $f_{y2} = 2 f_{y1}$ und $f_{y3} = 3 f_{y1}$ ist in der Abb. 6.19 dargestellt. Die Erregerfrequenz f_{y1} wird dabei identisch mit der Grundfrequenz f_{s1} gewählt. Der turbulente Dämpfungsterm $\delta_L = 1.44$ ergibt sich mit Gl. (3-60), wobei die maximale Schwingungsamplitude des Flüssigkeitsfadens mit $U_{\max} = 100 \text{ mm}$ abgeschätzt wurde. Dieser Wert folgt aus einer numerischen Simulation des Hauptsystems mit linearem Flüssigkeitstilger.

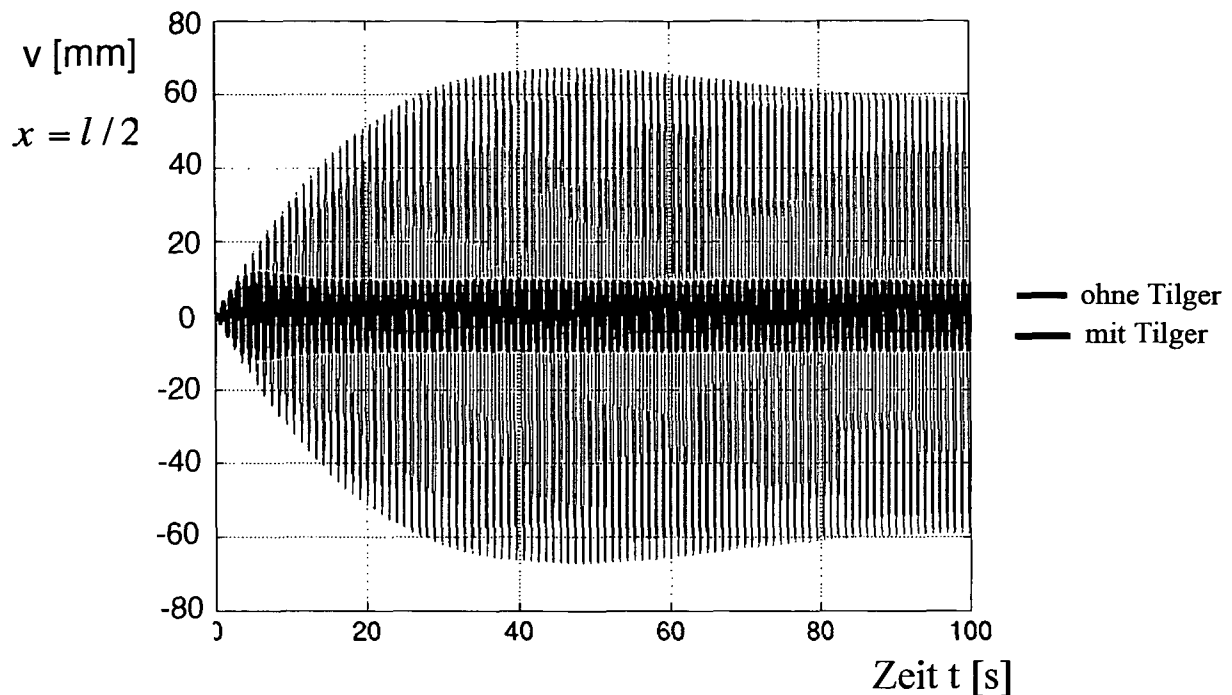


Abb. 6.19: Zeitliches Schwingungsverhalten des nördlichen Brückenfeldes mit und ohne Flüssigkeitstilger; horizontale Verschiebung $v(t, x = l/2)$; symmetrische horizontale Kraftanregung, entsprechend Gl. (6-13); Erregerfrequenzen: $f_{y1} = 1.03 \text{ Hz}$, $f_{y2} = 2f_{y1}$ und $f_{y3} = 3f_{y1}$; nichtlineare Turbulenzdämpfung $\delta_L = 1.44$

Der optimal abgestimmte Flüssigkeitstilger zeigt ein außerordentlich gutes Dämpfungsverhalten im nichtlinearen System mit Turbulenzdämpfung. Die stationäre Schwingungsantwort wird von ca. 60 mm auf 10 mm , d.h. um mehr als 80% reduziert.

Ergänzend ist in der Abb. 6.20 noch der an diskreten Stellen der Erregerfrequenz f_{yi} numerisch ermittelte DVF, Verschiebung $v(t, x = l/2)$, mit und ohne Flüssigkeitstilger in nichtlinearer Modellierung illustriert. Die Resonanzspitze wird zufolge des optimal abgestimmten Flüssigkeitstilgers stark reduziert. Insbesondere beträgt die resultierende Dämpfung des nördlichen Brückenfeldes mit Flüssigkeitstilger, $\zeta_{res} \approx 6.3\%$.

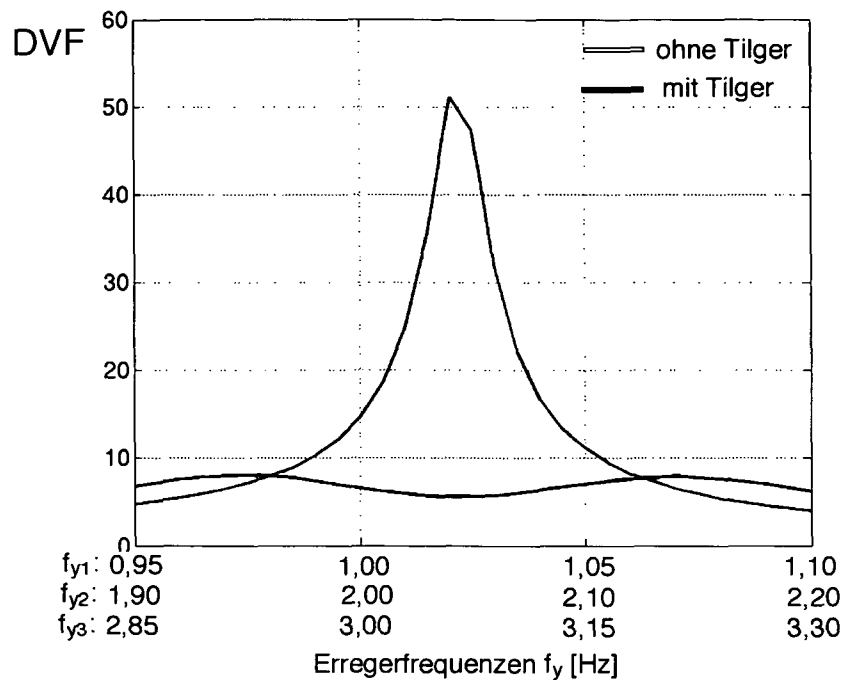


Abb. 6.20: Numerisches Ergebnis des dynamischen Vergrößerungsfaktors (DVF) des nördlichen Brückenfeldes mit und ohne Flüssigkeitstilger; horizontale Verschiebung $v(t, x = l/2)$; symmetrische horizontale Kraftanregung, entsprechend Gl. (6-13); Erregerfrequenzen: f_{y1} , $f_{y2} = 2f_{y1}$ und $f_{y3} = 3f_{y1}$; nichtlineare Turbulenzdämpfung $\delta_L = 1.44$

6.1.6 Südliches Seitenfeld – Installation von einem Flüssigkeitstilger

Das südliche Seitenfeld hat eine Spannweite von $l=108m$, wie in der Abb. 6.1 illustriert, und eine Masse pro Längeneinheit von $m=2250 kg/m$. Am Tag der Eröffnung wurden insbesondere in diesem Brückenfeld unzulässige horizontale Schwingungen zufolge synchronisierender Fußgänger beobachtet. Die vertikalen Biegeschwingungen waren hingegen nur in vernachlässigbar kleinem Ausmaß vorhanden, wie von Dallard et al. [2] angegeben wird. Dem zur Folge wird die hinreichende Stabilitätsbedingung, Gl. (3-49), wiederum zwanglos erfüllt, d.h. $\zeta_A > \zeta_{AG}$. Weiters wird die Grundfrequenz des südlichen Seitenfeldes mit $f_{s1}=0.80Hz$ und der viskose Dämpfungskoeffizient mit $\zeta_{s1}=0.6\%$ vorgegeben. Dabei ist die zugehörige Schwingungsform in horizontaler Richtung mit

$\chi_1 = \sin \lambda_1 x$, $\lambda_1 = \pi / l$ definiert. Als symmetrische Erregerkraft pro Längeneinheit $p_y(t)$ ergibt sich analog zu Gl. (6-2),

$$p_y(t) = 118.5 \left[0.05 g \sin(2\pi f_{y1} - 4\pi/5) + 0.01 g \sin(2\pi f_{y2} - 2\pi/5) + 0.05 g \sin(2\pi f_{y3} - \pi/5) \right], \quad (6-17)$$

wobei die Personenanzahl mit $n_p = 320$ und der Abminderungsfaktor mit $\beta = 0.50$ gewählt und in Gl. (5-22) eingesetzt wird. Die Installation des Flüssigkeitstilgers erfolgt in Feldmitte, d.h. an der Stelle $x = l/2$. Bei einer modalen Brückenmasse von $M_1^* = \rho A l / 2 = 121500 \text{ kg}$ ergibt sich bei Wahl von $\mu_1 \approx 0.8\%$ eine Flüssigkeitsmasse von $m_f = 1000 \text{ kg}$. Die Geometrie des geschlossenen Flüssigkeitstilgers mit Luftfeder ist in Tabelle 6.4 gelistet.

Tabelle 6.4: An den Brückenquerschnitt angepasste Geometrie des geschlossenen Flüssigkeitstilgers mit Luftfeder, südliches Seitenfeld

		Tilger
Horizontale Länge des Flüssigkeitsfadens B	$[m]$	2.00
Schräge Länge des Flüssigkeitsfadens H	$[m]$	1.50
Rohrquerschnitte $A_B = A_H$	$[m^2]$	0.20
Effektive Länge $L_{eff} = 2H + B$, aus Gl. (3-17)	$[m]$	5.00
Neigungswinkel der Rohrschenkel β	$[rad]$	$\pi / 4$
Geometriefaktor $\kappa = \bar{\kappa}$, aus Gl. (3-17) und (3-35)		0.82

Die Optimierung des Flüssigkeitstilgers mit der Analogie zu Den Hartog, wie in Abschnitt 6.1.3.1 für das Hauptfeld ausgeführt, liefert die folgenden optimalen Entwurfsparameter

$$f_A = \frac{\omega_A}{2\pi} = 0.79 \text{ Hz}, \quad \zeta_A = 0.045, \quad (6-18)$$

wobei das konjugierte Masseverhältnis $\mu^* = 0.0055$ mit Gl. (3-56) berechnet wird. Im Vergleich dazu, liefert das Gütekriterium im Zustandsraum, wie in Abschnitt 6.2.2.2 ausgeführt, mit der gewählten Gewichtsmatrix $S = [10 \ 1]$ und dem Startvektor aus Gl.

(6-18), $\bar{x}_0 = [2\pi \ 0.79 \ 0.045]^T$, nahezu identische Ergebnisse für die optimalen Entwurfparameter des Flüssigkeitstilgers,

$$f_A = \frac{\omega_A}{2\pi} = 0.79 \text{ Hz}, \quad \zeta_A = 0.044. \quad (6-19)$$

Der optimierte Amplitudenfrequenzgang der gewichteten Zustandsvariablen $\sum_{i=1}^2 s_i |z_i(\nu)|$ des südlichen Brückenfeldes mit und ohne linearisiertem Flüssigkeitstilger, unter Verwendung der optimalen Entwurfparameter aus Gl. (6-19), ist in Abb. 6.21 illustriert. Die Schwingungsspitze wird zufolge des Flüssigkeitstilgers stark reduziert.

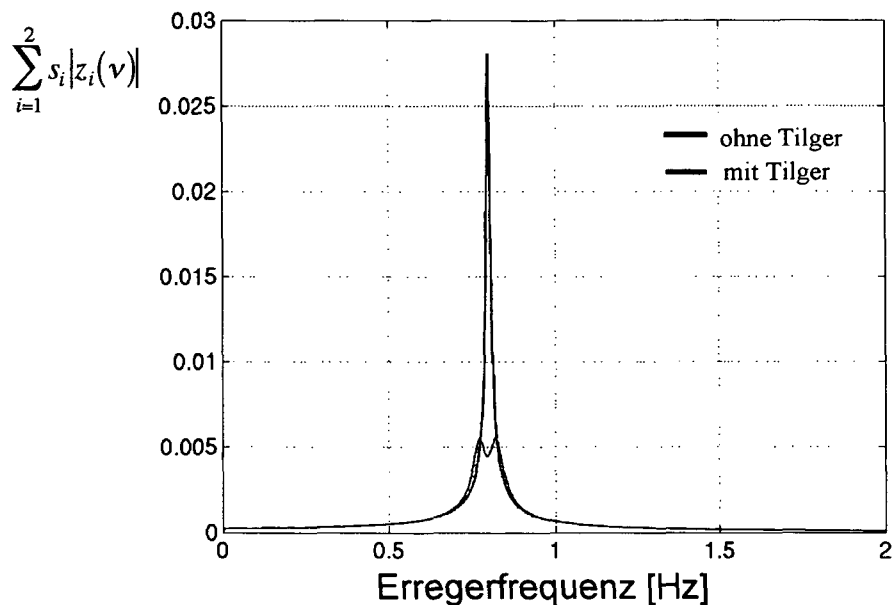


Abb. 6.21: Amplitudenfrequenzgang der gewichteten Zustandsvariablen $\sum_{i=1}^2 s_i |z_i(\nu)|$ des südlichen Brückenfeldes mit und ohne linearisiertem Flüssigkeitstilger; optimale Entwurfparameter aus (6-20)

Für die praktische Realisierung der Eigenfrequenz $f_A = 1.02 \text{ Hz}$ ist wiederum eine zusätzliche Luftfeder durch Verschließen der Rohrenden notwendig. Die erforderliche Luftfederhöhe errechnet sich aus Gl. (3-78) mit dem Polytropenexponenten $n = 1.2$ und dem Anfangsdruck $p_0 = 10^5 \text{ Pa}$ zu,

$$H_L = \frac{2 n p_0}{\rho \omega_A^2 \Delta L_{eff}} = 2.20 m, \quad \Delta L_{eff} = L_{eff} - \frac{2 g \sin \beta}{\omega_A^2} = 4.44 m. \quad (6-20)$$

Das erforderliche Luftvolumen beträgt somit $A_H H_L = 0.44 m^3$. Die Abb. 6.22 illustriert eine maßstäbliche Skizze des so entworfenen optimal abgestimmten Flüssigkeitstilgers.

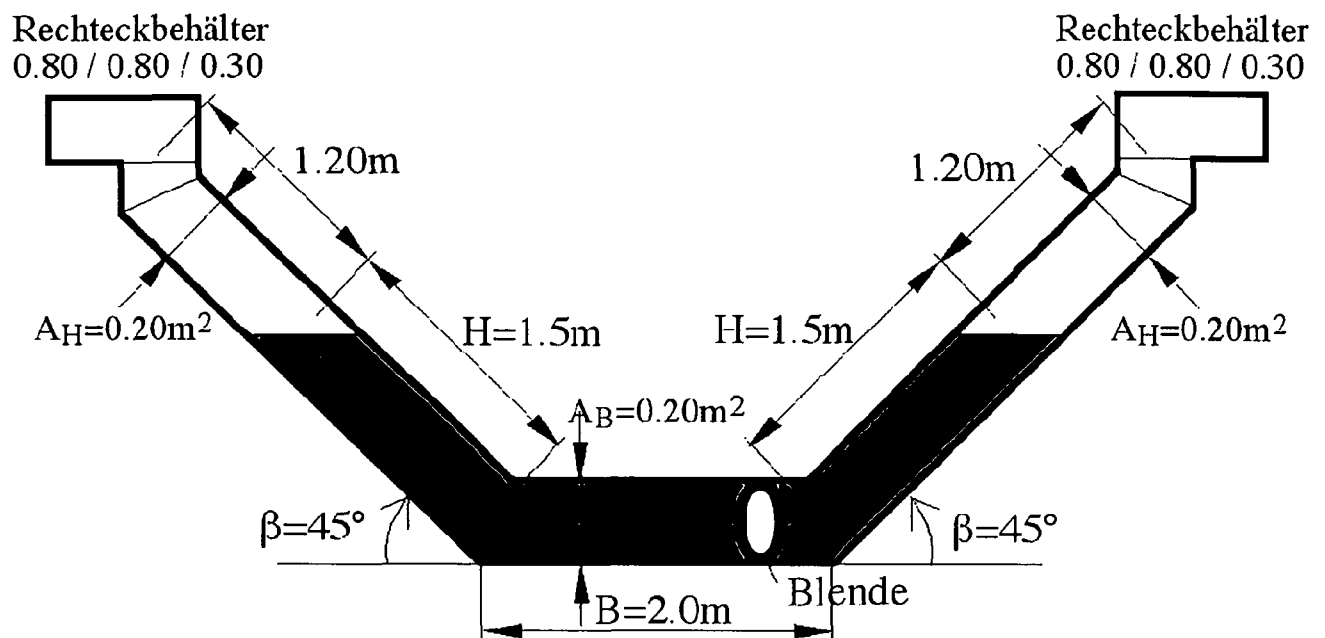


Abb. 6.22: Maßstäbliche Skizze des optimal abgestimmten Flüssigkeitstilgers mit Luftfeder, südliches Brückenfeld; $U_{max} / H_L = 0.14 < 0.30$

Das zeitliche Schwingungsverhalten des südlichen Brückenfeldes mit und ohne Flüssigkeitstilger in nichtlinearer Modellierung, $\delta_L = 0.30$ aus Gl. (3-60) mit $U_{max} = 300 mm$, horizontale Verschiebung $v(t, x = l/2)$, bei symmetrischer horizontaler Kräfteerregung, entsprechend Gl. (6-17), mit $f_{y1} = 0.80 Hz$, $f_{y2} = 2 f_{y1}$ und $f_{y3} = 3 f_{y1}$, ist in der Abb. 6.23 dargestellt.

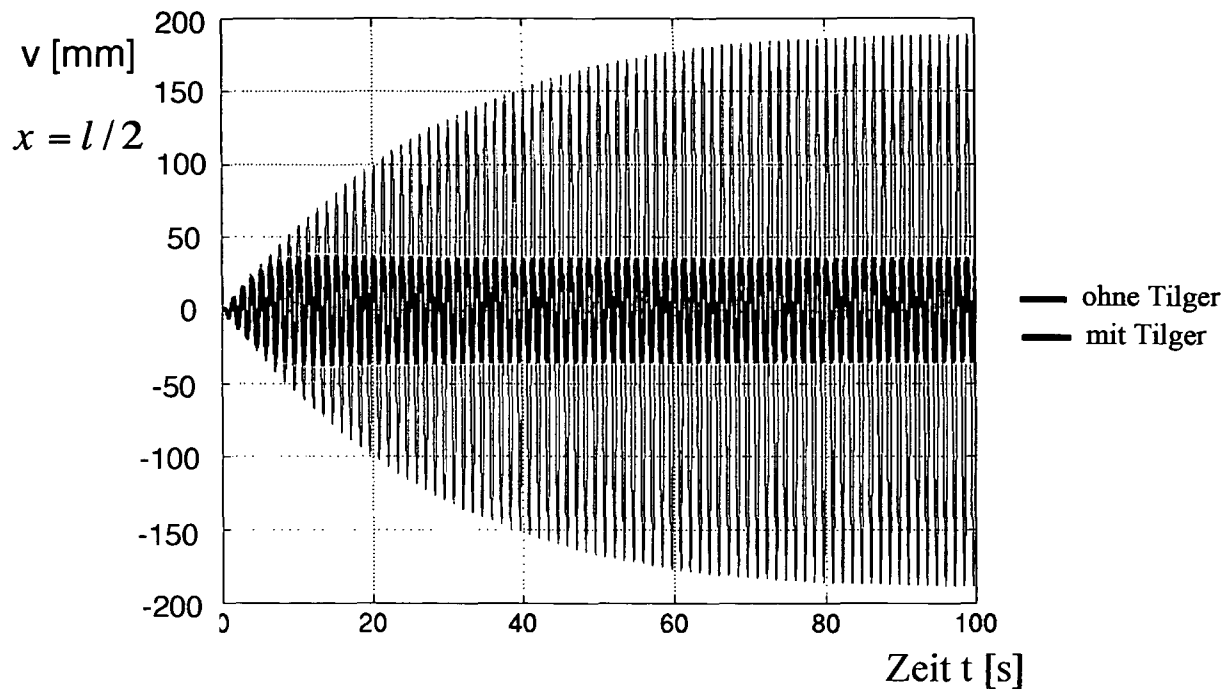


Abb. 6.23: Zeitliches Schwingungsverhalten des südlichen Brückenfeldes mit und ohne Flüssigkeitstilger; horizontale Verschiebung $v(t, x = l/2)$; symmetrische horizontale Kraftanregung, entsprechend Gl. (6-17); Erregerfrequenzen: $f_{y1} = 0.80 \text{ Hz}$, $f_{y2} = 2f_{y1}$ und $f_{y3} = 3f_{y1}$; nichtlineare Turbulenzdämpfung $\delta_L = 0.30$

Die Erregerfrequenz f_{y1} wird dabei identisch mit der Grundfrequenz f_{s1} gewählt. Der optimal abgestimmte Flüssigkeitstilger reduziert die stationäre Schwingungsantwort von ca. 190 mm auf rund 35 mm , d.h. um mehr als 80%.

Der an diskreten Stellen der Erregerfrequenzen f_{yi} numerisch ermittelte DVF der horizontalen Verschiebung $v(t, x = l/2)$ mit und ohne Flüssigkeitstilger in nichtlinearer Modellierung, ist in der Abb. 6.24 illustriert. Anhand der Abb. 6.24 wird eine Erhöhung der natürlichen Dämpfung des südlichen Brückenfeldes, von $\zeta_s = 0.6\%$ auf die resultierende Dämpfung $\zeta_{res} \approx 5.0\%$ mit Flüssigkeitstilger, festgestellt.

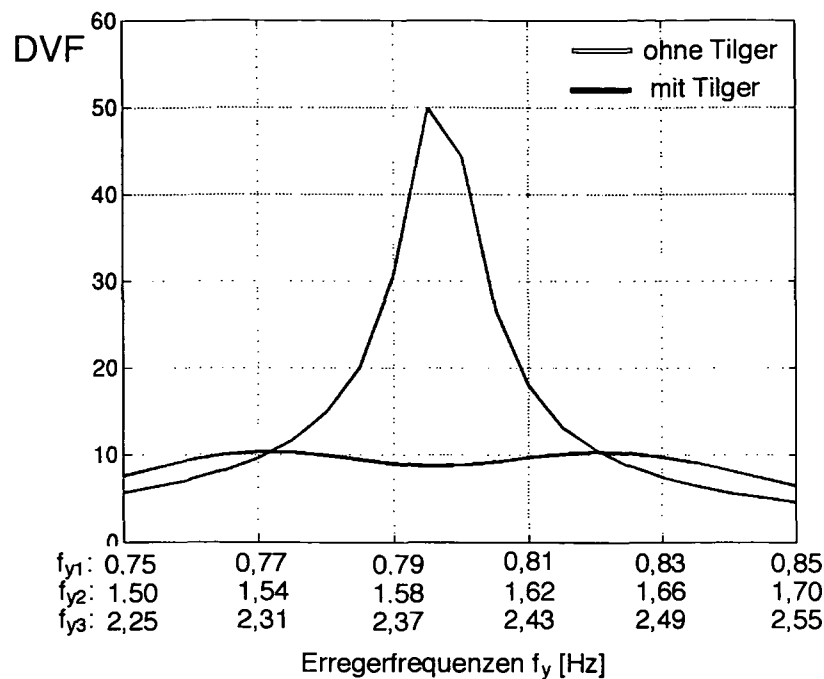


Abb. 6.24: Numerisches Ergebnis des dynamischen Vergrößerungsfaktors (DVF) des südlichen Brückenfeldes mit und ohne Flüssigkeitstilger; horizontale Verschiebung $v(t, x = l/2)$; symmetrische horizontale Kraftanregung, entsprechend Gl. (6-17); Erregerfrequenzen: f_{y1} , $f_{y2} = 2f_{y1}$ und $f_{y3} = 3f_{y1}$; nichtlineare Turbulenzdämpfung $\delta_L = 0.30$

6.2 Toda Park Bridge in Japan

6.2.1 Allgemeines

Die Toda Park Bridge ist eine Fußgängerschragseilbrücke, bestehend aus einem Neben- und einem Hauptfeld mit den Spannweiten $l_1 = 45.00\text{ m}$ und $l_2 = 134.00\text{ m}$, wie in der Abb. 6.25 dargestellt. An dem aus Stahlbeton gefertigten Pylon mit einer Höhe von 61.4 m sind insgesamt zwei Spannkabelebenen mit jeweils 11 Spanngliedern angeschlossen. Der abgehängte Brückenquerschnitt, ein aus Stahlprofilen gefertigter Kastenträger, ist einerseits am links- und am rechtsseitigen Ufer und andererseits am Pylon gelenkig gelagert. Die mittlere Masse pro Längeneinheit wird von Nakamura und Fujino [3] mit $m = 4180\text{ kg/m}$ angegeben.

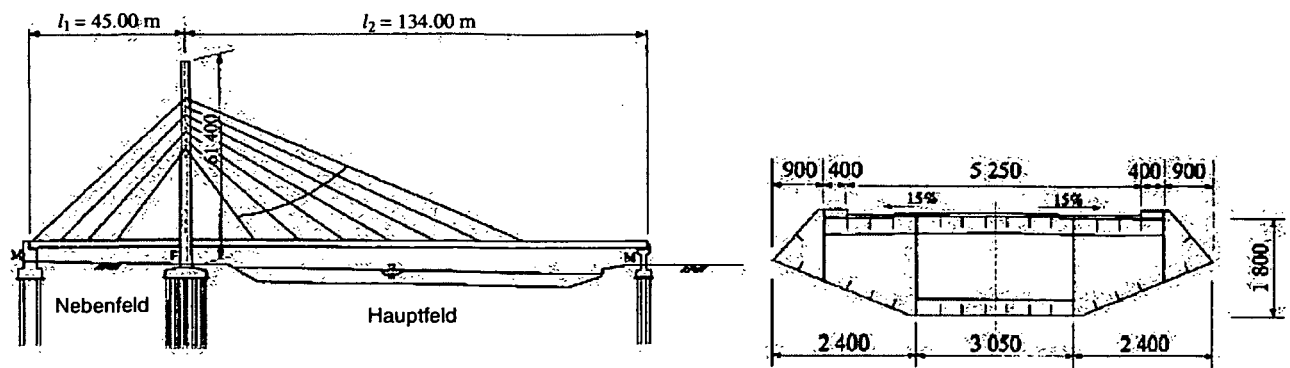


Abb. 6.25: Seitenansicht und Querschnitt der Toda Park Bridge in Japan, Quelle: Nakamura und Fujino³

Die Toda Park Bridge dient als einzige Verbindungsbrücke der Stadt Toda City zum Stadium für Motorbootrennen. An Renntagen strömen tausende Besucher gleichzeitig über die Brücke und induzieren demzufolge relativ große dynamische Kräfte. Dabei wurde, wie schon bei der Millennium Bridge in London, Abschnitt 6.1, eine Synchronisation der Fußgänger beobachtet, die im weiteren zu unzulässigen Querschwingungen der Brücke führte, [3]. Es soll nun ein Flüssigkeitstilger entworfen werden, der diese Schwingungen auf ein zulässiges Maß reduziert. Die gesamten Parameter der Brücke, die zur Durchführung der numerischen Studie benötigt werden, sind in einer Arbeit von Nakamura und Fujino [3] vorgegeben. Insbesondere wird in dieser Arbeit darauf hingewiesen, dass die Torsionssteifigkeit der Brücke äußerst hoch ist und daher eine Betrachtung der Drehschwingungen vernachlässigt werden kann. Die entnommenen Eigenfrequenzen und Dämpfungskoeffizienten sind in der Tabelle 6.5 gelistet.

Tabelle 6.5: Eigenfrequenzen und viskose Dämpfungskoeffizienten, Toda Park Bridge, Quelle: Nakamura und Fujino [3]

	Eigenfrequenz f_{Si} [Hz]	Dämpfung ζ_{Si} [%]
$v1 = f_{S1}$	0.73	0.8
$h2 = f_{S2}$	0.93	0.85
$v4 = f_{S4}$	2.04	0.90

Dabei bezeichnet z.B. v1 (v=vertikal) die erste Eigenfrequenz (=Grundfrequenz) mit zugehöriger vertikaler Schwingungsform und h2 (h=horizontal) die erste

Oberfrequenz mit horizontaler Schwingungsform. Die analytischen Ausdrücke der Schwingungsformen bestehen im Fall des gelenkig gelagerten Zweifeldträgers aus einer Kombination von gewöhnlichen Sinusfunktionen und hyperbolischen Funktion, wie in Blevins⁴, Seite 136, oder auch in Ziegler⁵, Seite 456, angegeben. Die erste horizontale Schwingungsform χ_1 ist z.B. wie folgt definiert, Blevins [4, Seite 136],

$$\chi_1(\bar{\xi}) = \sin \lambda_i \bar{\xi} + \eta_1 \sinh \lambda_i \bar{\xi} \quad \text{für} \quad 0 \leq \bar{\xi} \leq l_1 / L, \quad (6-21)$$

$$\chi_1(\bar{\xi}) = \eta_2 (\sin \lambda_i \bar{\xi} + \eta_3 \sinh \lambda_i \bar{\xi}) \quad \text{für} \quad l_1 / L \leq \bar{\xi} \leq L,$$

mit den eingeführten Hilfwerten η_1 , η_2 und η_3 ,

$$\eta_1 = -\frac{\sin \lambda_i \mu}{\sinh \lambda_i \mu}, \quad \eta_2 = \frac{\sin \lambda_i \mu}{\sin \lambda_i \eta}, \quad \eta_3 = -\frac{\sin \lambda_i \eta}{\sinh \lambda_i \eta}, \quad \mu = \frac{l_1}{L}, \quad \eta = 1 - \mu. \quad (6-22)$$

In Gl. (6-21) bezeichnet $L = l_1 + l_2 = 179\text{m}$ die Gesamtlänge der Brücke und $\bar{\xi} = x / L$ die entsprechende bezogene Laufkoordinate. Nach Auswerten der Gl. (6-21) erhält man die in Abb. 6.26 illustrierte horizontale Schwingungsform χ_1 und in analoger Weise auch die vertikalen Schwingungsformen ϕ_1 , ϕ_3 .

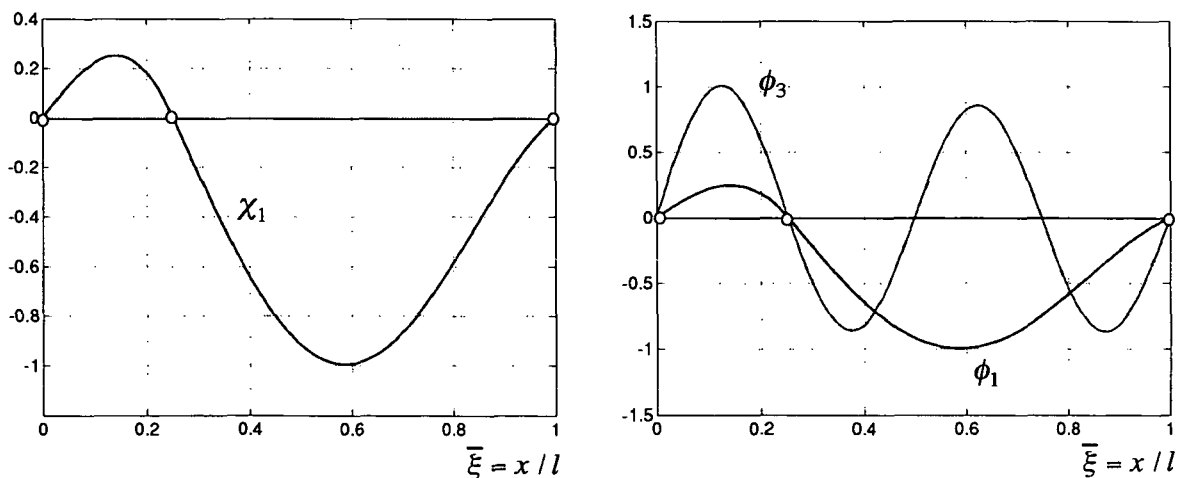


Abb. 6.26: Schwingungsformen χ_1 und ϕ_1 , ϕ_3 ; nach Blevins [4, Seite 136]

In der nun folgenden numerischen Simulation wird ein auf die Eigenfrequenz $f_{s2} = 0.93 \text{ Hz}$, mit zugehöriger dominierend horizontaler Schwingungsform χ_1 , optimal abgestimmter Flüssigkeitstilger im Hauptfeld installiert und dessen tilgende Wirkung festgestellt. Als günstige Installationsposition des Tilgers wird die Stelle großen Ausschlages, $\bar{\xi} = 0.60$ der Abb. 6.26 entnommen.

Die zufolge Fußgängeranregung kombinierten horizontalen und vertikalen dynamischen Erregerkräfte pro Längeneinheit $p_y(t)$ und $p_z(t)$, wie in Abschnitt 6.1.2 vorgelegt, werden auf das Hauptfeld der Toda Park Bridge, Spannweite $l_2 = 134.00 \text{ m}$, symmetrisch angesetzt. Eine Betrachtung der sogenannten „schlangenlinienförmige“ Anregung, wo das Nebefeld der Brücke in gegengleicher Richtung mit $p_y(t)$ erregt wird, kann hier entfallen. Ein Vergleich der Partizipationsfaktoren von $p_y(t)$, definiert in Gl. (6-5), des Neben- und Hauptfeldes der Toda Park Bridge,

$$\int_0^{l_1} \chi_1 d\bar{\xi} = 5.50 \quad \text{und} \quad \int_{l_1}^{l_2} \chi_1 d\bar{\xi} = 160.60, \quad (6-23)$$

zeigt nämlich, dass der Beitrag des Nebefeldes vernachlässigbar klein ist. Die Beschleunigungsanteile und Phasenwinkel werden wie in Abb. 6.4 illustriert übernommen. Die periodischen Erregerkräfte pro Längeneinheit ergeben sich dann analog zu Gl. (6-2),

$$\begin{aligned} p_y(t) &= 334 \left[0.05 g \sin(2\pi f_{y1} - 4\pi/5) + 0.01 g \sin(2\pi f_{y2} - 2\pi/5) + 0.05 g \sin(2\pi f_{y3} - \pi/5) \right], \\ p_z(t) &= 334 \left[0.40 g \sin 2\pi f_{z1} + 0.10 g \sin(2\pi f_{z2} - \pi/2) + 0.12 g \sin(2\pi f_{z3} - \pi/2) \right], \end{aligned} \quad (6-24)$$

wobei $m_p = 80 \text{ kg}$, $n_p = 560$ und $\beta = 1.00$ angenommen und in Gl. (5-22) eingesetzt wird.

6.2.2 Optimale Abstimmung des geschlossenen Flüssigkeitstilgers mit Luftfeder

Die optimale Abstimmung des Flüssigkeitstilgers erfolgt auf die erste Oberfrequenz $f_{S2} = 0.93 \text{ Hz}$, mit zugehöriger horizontaler Schwingungsform. Dazu wird in einem ersten Schritt das Masseverhältnis und die Geometrie des Tilgers festgelegt. Im Fall der Toda Park Bridge errechnet sich die modale Brückenmasse durch Vergleich der kinetischen Energie zu $M_2^* = 259500 \text{ kg}$. Bei Wahl von $\mu_1 \approx 0.6\%$ ergibt sich daraus eine Flüssigkeitsmasse von $m_f = 1500 \text{ kg}$. Die Geometrie des geschlossenen Flüssigkeitstilgers mit Luftfeder ist in Tabelle 6.6 gelistet.

Tabelle 6.6: An den Brückenquerschnitt angepasste Geometrie des geschlossenen Flüssigkeitstilgers mit Luftfeder, Toda Park Bridge

	Tilger
Horizontale Länge des Flüssigkeitsfadens B [m]	2.00
Schräge Länge des Flüssigkeitsfadens H [m]	2.00
Rohrquerschnitte $A_B = A_H$ [m ²]	0.25
Effektive Länge $L_{eff} = 2H + B$, aus Gl. (3-17) [m]	6.00
Neigungswinkel der Rohrschenkel β [rad]	$\pi / 4$
Geometriefaktor $\kappa = \bar{\kappa}$, aus Gl. (3-17) und (3-35)	0.80
Geometriefaktor $\bar{\kappa}_1$, aus Gl. (3-35)	0.47

6.2.2.1 Optimierung mit Hilfe der Analogie zu Den Hartog

Mit den vorgelegten Parametern des Flüssigkeitstilgers, Tabelle 6.6, ergibt sich das konjugierte Masseverhältnis mit Gl. (3-56) zu $\mu^* = 0.0039$. Einsetzen dieses Wertes in die konjugierten Entwurfparameter nach Den Hartog, Gl. (6-3), und anschließend Auswerten der Gl. (3-58) liefert die folgenden optimalen Entwurfparameter des Flüssigkeitstilgers,

$$f_A = \frac{\omega_A}{2\pi} = 0.92 \text{ Hz} , \quad \zeta_A = 0.038 . \quad (6-25)$$

6.2.2.2 Optimierung mit Hilfe des Gütekriteriums im Zustandsraum

Die Überprüfung und erforderlichenfalls Nachbesserung der in Gl. (6-25) vorgelegten Entwurfparameter, erfolgt mit Hilfe des in Abschnitt 6.1.3.2 ausgeführten Gütekriteriums im Zustandsraum. Der Zustandsvektor des Hauptsystems ist mit $\bar{z} = [Y_1 \ Y_2 \ Y_3 \ \dot{Y}_1 \ \dot{Y}_2 \ \dot{Y}_3]^T$ gegeben und die Gewichtsmatrix wird mit $S = [10 \ 10 \ 10 \ 1 \ 1 \ 1]$ gewählt. Diese spezielle Wahl der Gewichtsmatrix erweist sich im Zuge der nachfolgenden numerischen Simulation als günstig. Das geforderte Minimum der Zielfunktion $J = J(\omega_A, \zeta_A)$, gemäß Gl. (6-9) und Anwenden des Befehles $x = fminsearch(J, \bar{x}_0)$ in Matlab 6.5 liefert, nach Definition der Startwerte aus Gl. (6-25), $\bar{x}_0 = [2\pi \ 0.92 \ 0.038]^T$, die folgenden optimalen Entwurfparameter,

$$f_A = \frac{\omega_A}{2\pi} = 0.92 \text{ Hz} , \quad \zeta_A = 0.032 . \quad (6-26)$$

Vergleicht man die Ergebnisse der optimalen Entwurfparameter, Gl. (6-25) und Gl.(6-26), so ist lediglich ein geringer Unterschied im linearen Dämpfungskoeffizienten feststellbar. Eine Nachbesserung der Entwurfparameter wird trotzdem vorgenommen. Bei Verwendung der optimalen Entwurfparameter aus Gl. (6-26), ergibt sich der in Abb. 6.27 dargestellte Amplitudenfrequenzgang der gewichteten Zustandsvariablen $\sum_{i=1}^6 s_i |z_i(v)|$ der Toda Park Bridge mit und ohne linearisiertem Flüssigkeitstilger. Die erste Resonanzspitze, Eigenfrequenz $f_{s1} = 0.73 \text{ Hz}$ mit zugehöriger vertikaler Schwingungsform, wird dabei nicht beeinflusst. Hingegen wird die zu tilgende Eigenfrequenz $f_{s2} = 0.93 \text{ Hz}$, mit zugehöriger horizontaler Schwingungsform, stark reduziert.

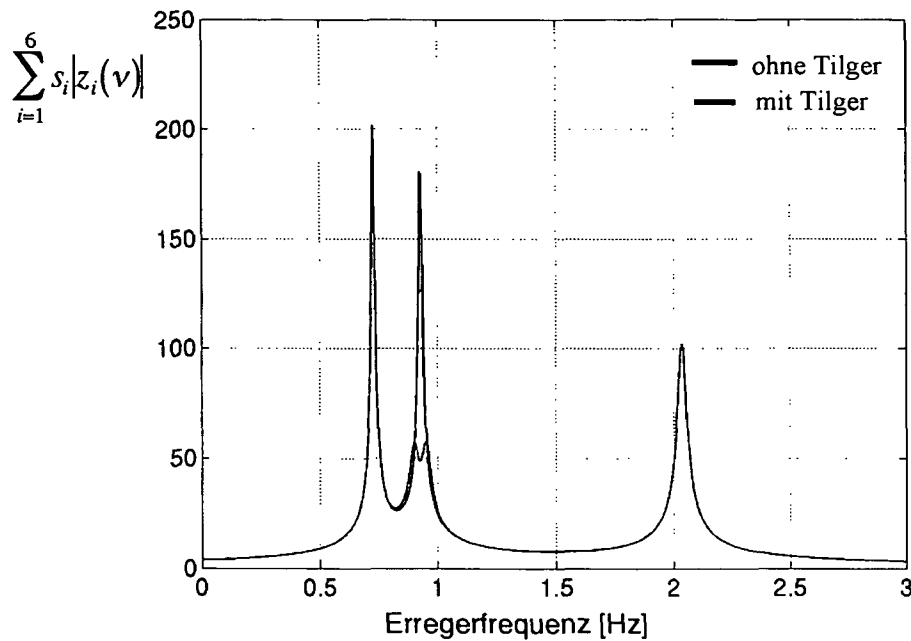


Abb. 6.27: Amplitudenfrequenzgang der gewichteten Zustandvariablen $\sum_{i=1}^6 s_i |z_i(\nu)|$ der Toda Park Bridge mit und ohne linearisiertem Flüssigkeitstilger; optimale Entwurfsparameter aus Gl. (6-26)

Zur praktischen Realisierung der optimalen Eigenfrequenz $f_A = 0.92 \text{ Hz}$ ist noch die Luftfederhöhe $H_{L,i}$ auszulegen. Diese errechnet sich aus Gl. (3-78) und den in Tabelle 6.6 gelisteten Parametern des Flüssigkeitstilgers zu

$$H_L = \frac{2n p_0}{\rho \omega_A^2 \Delta L_{eff}} = 1.56 \text{ m} , \quad \Delta L_{eff} = L_{eff} - \frac{2g \sin \beta}{\omega_A^2} = 4.59 \text{ m} , \quad (6-27)$$

wobei der Polytropenexponent $n = 1.2$ und Anfangsdruck mit $p_0 = 10^5 \text{ Pa}$ gewählt wird. Das erforderliche Luftvolumen im Flüssigkeitstilger beträgt dann $A_H H_L = 0.39 \text{ m}^3$. Eine maßstäbliche Skizze des so entworfenen optimal abgestimmten Flüssigkeitstilgers ist in der Abb. 6.28 illustriert.

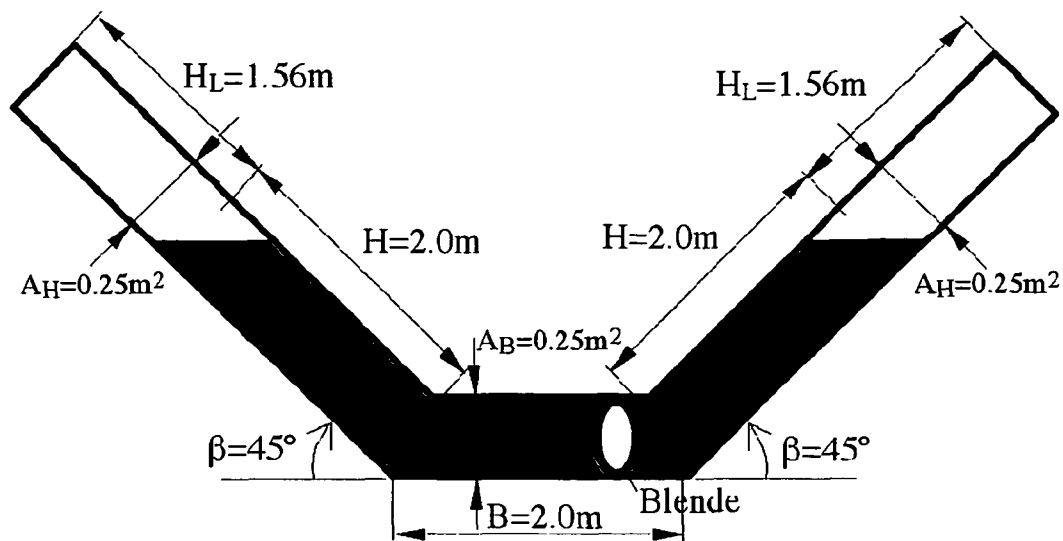


Abb. 6.28: Maßstäbliche Skizze des optimalen Flüssigkeitstilgers, Toda Park Bridge; geschlossene Rohrenden mit Luftfeder; $U_{\max} / H_L = 0.19 < 0.30$

6.2.3 Numerische Studie der Toda Park Bridge

Die numerischen Studien der Toda Park Bridge werden nun ohne bzw. mit optimal abgestimmten Flüssigkeitstilger durchgeführt. Ein Vergleich der Ergebnisse soll die dämpfende Wirkung des Flüssigkeitstilgers bestätigen. Dabei wird die Bewegungsgleichung des Flüssigkeitstilgers mit nichtlinearer Turbulenzdämpfung $\delta_L |\dot{u}| \dot{u}$, Gl. (4-23), betrachtet. Die optimale lineare Dämpfung ζ_A , Gl. (6-26), soll daher in den äquivalenten Turbulenzdämpfungsterm δ_L übergeführt werden. Die Gl. (3-20) liefert zwanglos $\delta_L = 3\pi\zeta_A / 4U_0 = 0.268$, wobei $U_0 = U_{\max} = 300\text{ mm}$ abgeschätzt wird. Dieser Wert folgt aus einer numerischen Simulation des Hauptsystems mit linearisiertem Flüssigkeitstilger. In den modalen Bewegungsgleichungen der Hauptstruktur und des Flüssigkeitstilgers, Gl. (4-123) und Gl. (4-125), werden außerdem alle Nichtlinearitäten und die Parametererregung beibehalten. Aufgrund der vorhandenen Parameterresonanzgefahr wird noch die hinreichende Stabilitätsbedingung zur sicheren Vermeidung von Parameterresonanz für den geschlossenen Flüssigkeitstilger mit Luftfeder angeschrieben, Gl. (3-49),

$$\zeta_{A,G} = \frac{2w_1}{L_{eff}} \sin \beta = 0.0018 < \zeta_A = 0.03 . \quad (6-28)$$

Die maximale Schwingungsamplitude $w_1 = 5 \text{ mm}$ wird dabei aus einer numerischen Simulation der Brücke mit Flüssigkeitstilger, an der kritischen Resonanzstelle $\lambda = 1/4$, Gl. (3-47), ermittelt. Aus Gl. (6-28) erkennt man, dass die optimale Dämpfung des Flüssigkeitstilgers über dem erforderlichen Wert liegt. Demnach werden keine schädlichen Auswirkungen der vertikalen Anregung der Brücke auf das optimale Dämpfungsverhalten des Flüssigkeitstilgers erwartet. Das zeitliche Schwingungsverhalten der Toda Park Bridge mit und ohne Flüssigkeitstilger in nichtlinearer Modellierung, horizontale Verschiebung $v(t, \bar{\xi} = 0.60)$, bei symmetrischer horizontaler und vertikaler Krafteinregung, gemäß Gl. (6-24), mit $f_{y1} = 0.93 \text{ Hz}$, $f_{y2} = 2f_{y1}$, $f_{y3} = 3f_{y1}$ und $f_{z1} = 1.86 \text{ Hz}$, $f_{z2} = 2f_{z1}$, $f_{z3} = 3f_{z1}$ ist in der Abb. 6.29 dargestellt.

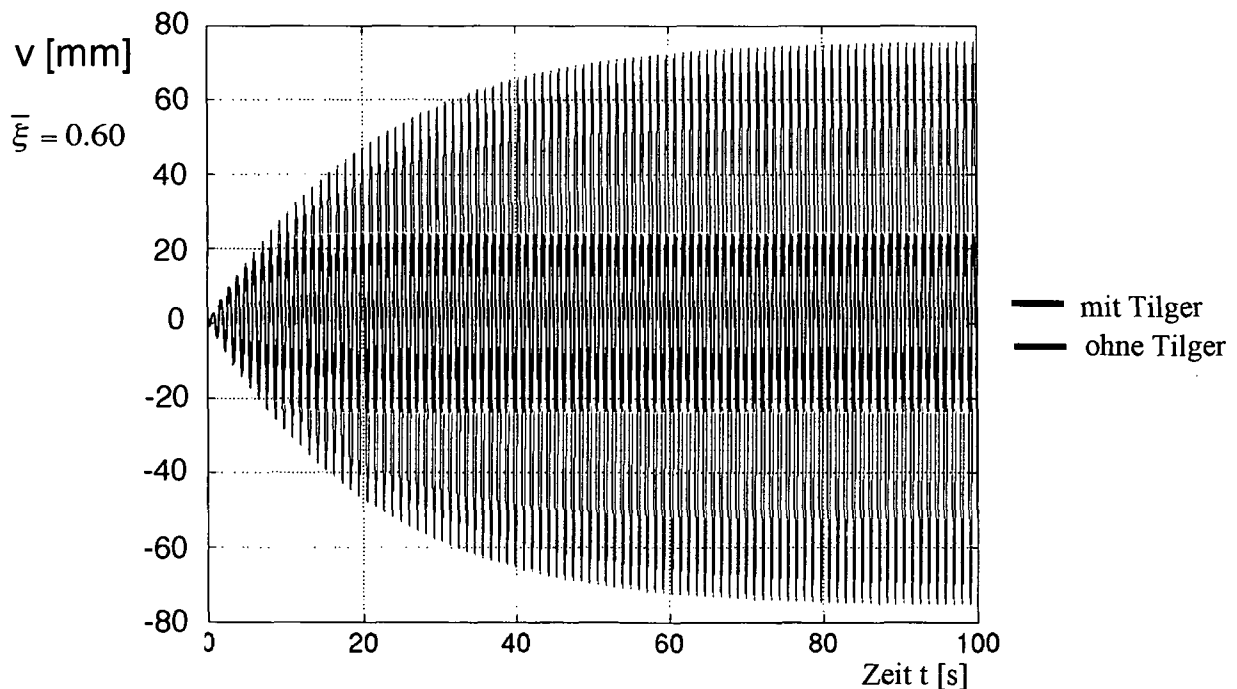


Abb. 6.29: Zeitliches Schwingungsverhalten der Toda Park Bridge mit und ohne Flüssigkeitstilger; horizontale Verschiebung $v(t, \bar{\xi} = 0.60)$; symmetrische horizontale und vertikale Krafteinregung gemäß Gl. (6-24); Erregerfrequenzen: $f_{y1} = 0.93 \text{ Hz}$, $f_{y2} = 2f_{y1}$, $f_{y3} = 3f_{y1}$ und $f_{z1} = 1.86 \text{ Hz}$, $f_{z2} = 2f_{z1}$, $f_{z3} = 3f_{z1}$; nichtlineares Modellverhalten; Turbulenzdämpfungsterm $\delta_L = 0.268$

Die Erregerfrequenz f_{y1} wird dabei identisch mit der ersten Oberfrequenz f_{s2} gewählt (Resonanzfall). Man erkennt, dass die stationäre horizontale Schwingungsantwort $v(t)$ durch den optimal abgestimmten Flüssigkeitstilger von ca. 75 mm auf 22 mm , d.h. um mehr als 70% reduziert wird. Um die positive Wirkung des Tilgers über den gesamten interessierenden Frequenzbereich der Erregung zu bestätigen, wird die maximale stationäre Schwingungsantwort $v(t, \bar{\xi} = 0.60)$ mit und ohne Flüssigkeitstilger in nichtlinearer Modellierung, an diskreten Frequenzstellen f_{si} numerisch ermittelt und in der Abb. 6.30 in Bezug auf die statische Auslenkung v_{st} als dynamischer Vergrößerungsfaktor (DMF) illustriert. Dabei wird $v_{st} = 1.3\text{ mm}$ an der Stelle $\bar{\xi} = 0.60$ mit Hilfe einer Feldmatrix für Biegung des zweifeldrigen Brückenträgers mit konstantem Querschnitt berechnet. Die entsprechende Form der Feldmatrix wird von Rubin⁶ angegeben.

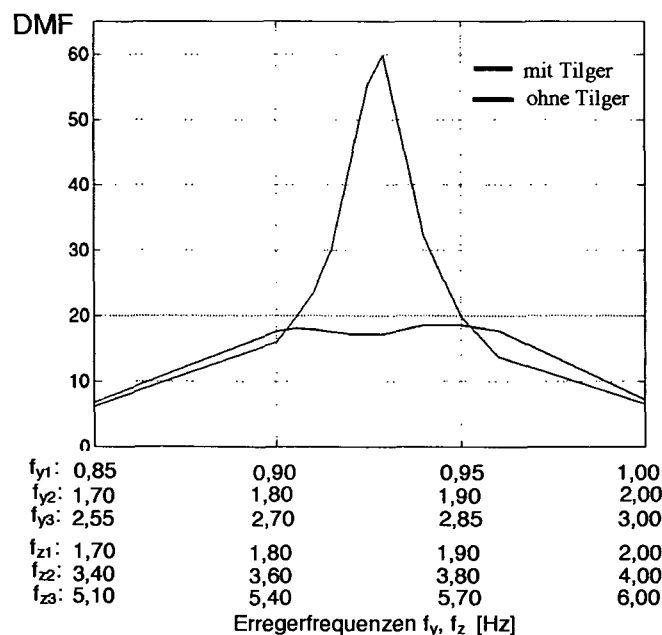


Abb. 6.30: Numerisches Ergebnis des dynamischen Vergrößerungsfaktors (DMF) der Toda Park Bridge mit und ohne Flüssigkeitstilger; horizontale Verschiebung $v(t, \bar{\xi} = 0.60)$; symmetrische horizontale und vertikale Kraftanregung; Erregerfrequenzen: f_{y1} , f_{y2} , f_{y3} und f_{z1} , f_{z2} , f_{z3} ; nichtlineares Modellverhalten; Turbulenzdämpfungsterm $\delta_L = 0.268$

Die Abb. 6.30 bestätigt die starke Reduktion der horizontalen Schwingungsantwort $v(t)$ und lässt außerdem einen optimalen Verlauf des DMF mit Flüssigkeitstilger erkennen. Wie zu erwarten war, übt die zusätzliche vertikale Anregung keinen

negativen Einfluss auf das optimale Dämpfungsverhalten des Flüssigkeitstilgers aus. Die unzulässige horizontale Schwingungsantwort $v(t)$ der Toda Park Bridge wird somit durch die Installation eines einzigen optimal abgestimmten, geschlossenen Flüssigkeitstilgers mit Luftfeder, erfolgreich und wirtschaftlich reduziert. Insbesondere wird anhand der Abb. 6.30 eine resultierende Dämpfung der Toda Park Bridge, mit Flüssigkeitstilger, von $\zeta_{res} \approx 2.6\%$ festgestellt.

6.3 Einfeldriger Brückenträger unter Berücksichtigung der Verdrehung $\vartheta(t)$

6.3.1 Allgemeines

In der nachfolgenden numerischen Studie wird ein einfeldriger Brückenträger mit einer Spannweite von $l=100\text{m}$ betrachtet, wobei hier auch Verdrehungen des Querschnittes $\vartheta(t)$ mitberücksichtigt werden. Der aus Stahlblechen gefertigte kontinuierliche Kastenquerschnitt $3650/1800\text{mm}$, die Wandstärken 20mm und 10mm sind in Abb. 6.31 eingetragen, wird zufolge Fußgängergruppen mit den statischen und dynamischen Flächenlasten $\bar{p}_{z,st}$ und $\bar{p}_z(t)$, $\bar{p}_y(t)$ einseitig belastet, wie in der Abb. 6.31 dargestellt.

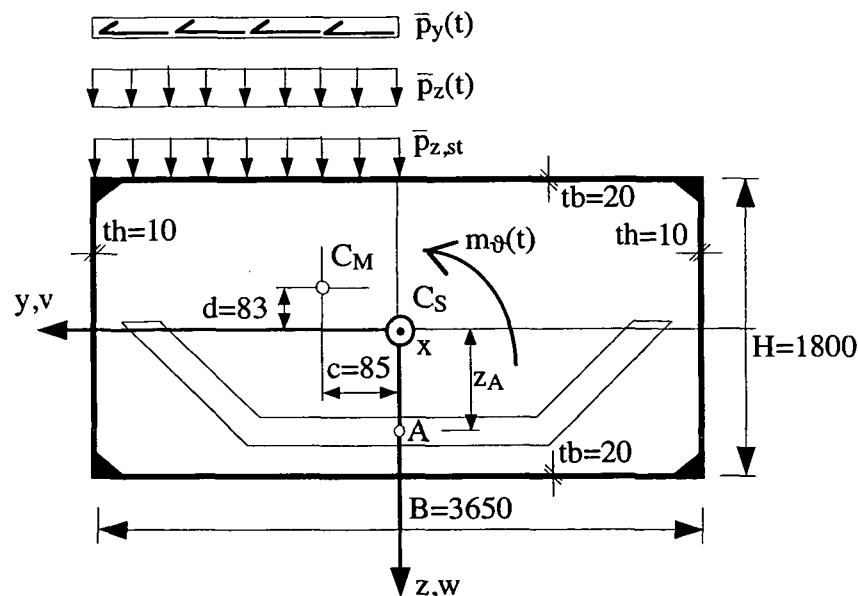


Abb. 6.31: Einfeldriger kontinuierlicher Kastenquerschnitt $3650/1800\text{mm}$; statische Flächenlast $\bar{p}_{z,st}$; dynamische Flächenlasten $\bar{p}_z(t)$ und $\bar{p}_y(t)$

Die im Allgemeinen untypische einseitige Belastung der Brücke soll die Drehschwingung $\vartheta(t)$ möglichst stark anregen. Zur Reduzierung der Schwingungsantwort mit ausgewählter Eigenfrequenz, wird der Brückenträger mit einem optimal abgestimmten Flüssigkeitstilger ausgestattet. Dieser befindet sich im Abstand $z_A = 0.5\text{ m}$, in symmetrischer Anordnung, wie in der Abb. 6.31 dargestellt. Die einseitige Belastung des Querschnittes führt auf eine exzentrische Lage des Massenmittelpunktes C_M gegen den Steifigkeitsmittelpunkt C_S . Dies lässt gekoppelte Biegedrillschwingungen erwarten. Die Koordinaten von C_M , $c = 85\text{ mm}$ und $d = 83\text{ mm}$, errechnen sich dabei unter der Annahme einer statischen Flächenlast von $\bar{p}_{z,st} = 2m_p g n_p / bl = 800\text{ N/m}^2$. Letztere entspricht bei einer mittleren Personenmasse $m_p = 80\text{ kg}$ einer Personenanzahl $n_p = 183$. Die restlichen Parameter des Brückenträgers sind in der Tabelle 6.7 gelistet.

Tabelle 6.7: Parameter des einfeldrigen kontinuierlichen Brückenträgers

Elastizitätsmodul $E [\text{N/m}^2]$	2.1×10^{11}	Querdehnungszahl $\nu []$	0.30
Schubmodul $G [\text{N/m}^2]$	0.808×10^{11}	Stahlfläche $A [\text{m}^2]$	0.182
Trägheitsmoment $J_y [\text{m}^4]$	0.128	Trägheitsmoment $J_z [\text{m}^4]$	0.282
polares Trägheitsm. $I_0 [\text{m}^4]$	0.4074	Wölbmoment $A_{\varphi\varphi} [\text{m}^6]$	7.78×10^{-6}
Torsionsträgheitsm. $J_T [\text{m}^4]$	0.2382	Dichte von Stahl $\rho [\text{kg/m}^3]$	7850
Anm.: Torsionsträgheitsmoment und Wölbmoment ist eine Definition für dünnwandige Querschnitte			

Der statische Tragfähigkeitsnachweis des in Abb. 6.31 illustrierten Brückenträgers ergibt unter Berücksichtigung des Eigengewichtes und der statischen Last pro Längeneinheit, $m g = 14.28\text{ kN/m}$ und $p_{z,st} = 1.46\text{ kN/m}$, die folgende Randspannung,

$$\sigma_{vorh} = 13.84\text{ kN/cm}^2 < \sigma_{zul} = 14.5\text{ kN/cm}^2. \quad (6-29)$$

Die Tragfähigkeit des gewählten Brückenträgers ist somit gewährleistet. Insbesondere wird darauf hingewiesen, dass die Wahl der Parameter der Brücke im Hinblick auf die sich ergebenden Eigenfrequenzen erfolgte. Mit Hilfe der in Tabelle

6.7 gelisteten Parameter und den Gln. (4-90) und (4-91) ergeben sich die gekoppelten Eigenkreisfrequenzen für $n=1, 2$ zu,

$$\begin{aligned} f_{11} &= \omega_{11} / 2\pi = 0.68 \text{ Hz}, & f_{12} &= \omega_{12} / 2\pi = 1.01 \text{ Hz}, & f_{13} &= \omega_{13} / 2\pi = 12.26 \text{ Hz}, \\ f_{21} &= \omega_{21} / 2\pi = 2.73 \text{ Hz}, & f_{22} &= \omega_{22} / 2\pi = 4.05 \text{ Hz}, & f_{23} &= \omega_{23} / 2\pi = 24.53 \text{ Hz} . \end{aligned} \quad (6-30)$$

Für Fußgängerbrücken sind üblicherweise nur Eigenfrequenzen $< 10 \text{ Hz}$ maßgebend, wie in Kapitel 5, Abschnitt 5.3 festgestellt wurde. Daher werden hier die ersten vier Eigenfrequenzen, nämlich: f_{11} , f_{12} , f_{21} und f_{22} mit den zugehörigen viskosen Dämpfungskoeffizienten $\zeta_{11}=0.6\%$, $\zeta_{12}=0.65\%$, $\zeta_{21}=0.70\%$ und $\zeta_{22}=0.75\%$ in Betracht gezogen. Die Eigenfunktionen sind durch Gl. (4-88) definiert, wobei die Konstanten C_{ni} , D_{ni} und E_{ni} aus den Gln. (4-92) und (4-74) sowie aus der Orthogonalitätsbedingung, Gl. (4-102), berechnet werden, $\lambda_n = n\pi / l$,

$$\begin{aligned} \phi_{11}(x) &= 0.1414 \sin \lambda_1 x, & \chi_{11}(x) &= 1.15 \times 10^{-6} \sin \lambda_1 x, & \psi_{11}(x) &= 1.65 \times 10^{-5} \sin \lambda_1 x, \\ \phi_{12}(x) &= -5.59 \times 10^{-6} \sin \lambda_1 x, & \chi_{12}(x) &= 0.1414 \sin \lambda_1 x, & \psi_{12}(x) &= 3.61 \times 10^{-5} \sin \lambda_1 x, \\ \phi_{21}(x) &= 0.1414 \sin \lambda_2 x, & \chi_{21}(x) &= 4.63 \times 10^{-6} \sin \lambda_2 x, & \psi_{21}(x) &= 6.68 \times 10^{-5} \sin \lambda_2 x, \\ \phi_{22}(x) &= -2.28 \times 10^{-5} \sin \lambda_2 x, & \chi_{22}(x) &= 0.1414 \sin \lambda_2 x, & \psi_{22}(x) &= 1.47 \times 10^{-4} \sin \lambda_2 x . \end{aligned} \quad (6-31)$$

Man erkennt, dass die der ersten Oberfrequenz $f_{12}=1.01 \text{ Hz}$ zugehörige Schwingungsform dominierend horizontal gerichtet ist. Die optimale Abstimmung des Flüssigkeitstilgers erfolgt daher auf diese, für Fußgängerbrücken maßgebende Eigenfrequenz. Als Installationsposition wird dann entsprechend die Stelle $x=l/2$ gewählt. Zur Nachbildung der dynamischen Kraftwirkung von Fußgängergruppen wird der in Abb. 6.5 dargestellte Anregungszustand 1 herangezogen. Bei einer Personenanzahl $n_p=183$, auf einer Seite und gleichmäßig verteilt über die gesamte Brückenlänge $l=100 \text{ m}$, ergeben sich mit $m_p=80 \text{ kg}$ und $\beta=1$, eingesetzt in den Vorfaktor der Gl. (5-22), die folgenden Erregerkräfte pro Längeneinheit,

$$\begin{aligned}
 p_y(t) &= 146 \left[0.05 g \sin(2\pi f_{y1} - 4\pi/5) + 0.01 g \sin(2\pi f_{y2} - 2\pi/5) + 0.05 g \sin(2\pi f_{y3} - \pi/5) \right], \\
 p_z(t) &= 146 \left[0.40 g \sin 2\pi f_{z1} + 0.10 g \sin(2\pi f_{z2} - \pi/2) + 0.12 g \sin(2\pi f_{z3} - \pi/2) \right],
 \end{aligned}
 \tag{6-32}$$

Das Erregermoment ergibt sich aus der Abb. 6.31 zu $m_\vartheta = p_z B/4 + p_y H/2$.

6.3.2 Optimale Abstimmung des geschlossenen Flüssigkeitstilgers mit Luftfeder

Die optimale Abstimmung des Flüssigkeitstilgers auf die erste Oberfrequenz $f_{12} = 1.01 \text{ Hz}$ erfolgt entsprechend den Ausführungen in Abschnitt 6.1.3. Mit der modalen Brückenmasse $M^* = m_T/2 = 71435 \text{ kg}$ ergibt sich bei Wahl von $\mu \approx 1.5\%$ die Flüssigkeitsmasse $m_f = 1000 \text{ kg}$. Die Geometrie des geschlossenen Flüssigkeitstilgers mit Luftfeder ist in Tabelle 6.8 gelistet.

Tabelle 6.8: An den Kastenquerschnitt angepasste Geometrie des geschlossenen Flüssigkeitstilgers mit Luftfeder, einfeldriger Brückenträger

	Tilger
Horizontale Länge des Flüssigkeitsfadens B [m]	1.00
Schräge Länge des Flüssigkeitsfadens H [m]	1.00
Rohrquerschnitte $A_B = A_H$ [m ²]	0.33
Effektive Länge $L_{\text{eff}} = 2H + B$, aus Gl. (3-17) [m]	3.00
Neigungswinkel der Rohrschenkel β [rad]	$\pi/4$
Geometriefaktor $\kappa = \bar{\kappa}$, aus den Gln. (3-17) und (3-35)	0.80
Geometriefaktor $\kappa_1 = \bar{\kappa}_1$, aus den Gln. (4-24) und (3-35)	0.47
Geometriefaktor $\kappa_2 = \bar{\kappa}_2$, aus den Gln. (4-24) und (4-41)	0.90
Geometriefaktor $\bar{\kappa}_3$, aus Gl. (4-41)	0.65

6.3.2.1 Optimierung mit Hilfe der Analogie zu Den Hartog

Unter Verwendung der in Tabelle 6.8 gelisteten Parameter des geschlossenen Flüssigkeitstilgers mit Luftfeder, ergibt sich das konjugierte Masseverhältnis $\mu^* = 0.009$ aus Gl. (3-56). Einsetzen von μ^* in die konjugierten Entwurfparameter nach Den Hartog, Tabelle 1.1 (Fall 1), und anschließend Auswerten der Gl. (3-58), liefert die folgenden optimalen Entwurfparameter des Flüssigkeitstilgers,

$$f_A = \frac{\omega_A}{2\pi} = 1.00 \text{ Hz} , \quad \zeta_A = 0.058 . \quad (6-33)$$

6.3.2.2 Optimierung mit Hilfe des Gütekriteriums im Zustandsraum

Eine eventuelle Nachbesserung der optimalen Entwurfparameter, Gl. (6-33), erhält man durch Anwenden des Gütekriteriums im Zustandsraum, wie in Abschnitt 6.1.3.2 für den kontinuierlichen Brückenträger ausgeführt. Die Transformation der linearen gekoppelten Differentialgleichungen 2. Ordnung, Gl. (4-123) und (4-125), in ein Differentialgleichungssystem 1. Ordnung, erfolgt hier jedoch unter Berücksichtigung der Verdrehung $\vartheta(t)$. Die in Gl. (6-6) definierte Massenmatrix \mathbf{M}_S muss daher, mit den aus der Verdrehung $\vartheta(t)$ des Brückenquerschnittes resultierenden, zusätzlichen linearen Gliedern der modalen Bewegungsgleichung der Brücke, Gl. (4-123), und des Flüssigkeitstilgers, Gl. (4-125), ergänzt werden. Eine entkoppelte Betrachtung des linearen Systems ist hier nicht mehr möglich. Die erweiterte Massenmatrix,

$$\mathbf{M}_S = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{11} & \mathbf{M}_{12} \\ \mathbf{M}_{21k} & \mathbf{M}_{22} \end{bmatrix}, \quad (6-34)$$

besteht aus den folgenden Untermatrizen,

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}_{11} &= \mathbf{I}_{Yn} + \sum_{k=1}^r \left[\phi(\xi_k) \mathbf{L}_k \boldsymbol{\mu}_k \mathbf{L}_k^T \phi(\xi_k) + \chi(\xi_k) \mathbf{L}_k \boldsymbol{\mu}_k \mathbf{L}_k^T \chi(\xi_k) + \psi(\xi_k) \mathbf{L}_k \boldsymbol{\mu}_k \mathbf{z}_{Ak}^2 \mathbf{L}_k^T \psi(\xi_k) - \right. \\
&\quad \left. - \chi(\xi_k) \mathbf{L}_k \boldsymbol{\mu}_k \mathbf{z}_{Ak} \mathbf{L}_k^T \psi(\xi_k) + \psi(\xi_k) \mathbf{L}_k \boldsymbol{\mu}_k \bar{\mathbf{K}}_{3k} \mathbf{H}_{Ak}^2 \mathbf{L}_k^T \psi(\xi_k) - \psi(\xi_k) \mathbf{L}_k \boldsymbol{\mu}_k \mathbf{z}_{Ak} \mathbf{L}_k^T \chi(\xi_k) \right] . \\
\mathbf{M}_{12} &= \sum_{k=1}^r \left[-\chi(\xi_k) \mathbf{L}_k \boldsymbol{\mu}_k \bar{\mathbf{K}}_k + \frac{1}{2} \psi(\xi_k) \mathbf{L}_k \boldsymbol{\mu}_k \bar{\mathbf{K}}_{1k} \mathbf{B}_k + (\xi_k) \mathbf{L}_k \boldsymbol{\mu}_k \bar{\mathbf{K}}_k \mathbf{z}_{Ak} \right] , \\
\mathbf{M}_{21k} &= -\mathbf{K}_k \mathbf{L}_k^T \chi(\xi_k) + \mathbf{K}_{1k} \frac{1}{2} \mathbf{B}_k \mathbf{L}_k^T \psi(\xi_k) + \mathbf{K}_k \mathbf{z}_{Ak} \mathbf{L}_k^T \psi(\xi_k) , \\
\mathbf{M}_{22} &= \mathbf{I}_f , \tag{6-35}
\end{aligned}$$

wobei die einzelnen Matrizen großteils bereits in Abschnitt 6.1.3.2 aufgetreten sind. Zusätzlich sind die folgenden Matrizen zu Berücksichtigen: $\psi(\xi_k)$, \mathbf{B}_k , \mathbf{H}_k , \mathbf{z}_{Ak} , \mathbf{K}_{1k} , $\bar{\mathbf{K}}_{1k}$, \mathbf{K}_{2k} , $\bar{\mathbf{K}}_{2k}$ und $\bar{\mathbf{K}}_{3k}$. Es handelt sich dabei jeweils um Diagonalmatrizen, wobei $\psi(\xi_k)$ die rotatorischen Eigenschwingungsformen der Brücke enthält. \mathbf{B}_k , \mathbf{H}_k und \mathbf{z}_{Ak} beziehen sich auf die n installierten Flüssigkeitstilger an r verschiedenen Stellen ξ_k des Brückenträgers und sind wie folgt definiert,

$$\mathbf{B}_k = \text{diag}[B_{1k}, \dots, B_{nk}] , \quad \mathbf{H}_k = \text{diag}[H_{1k}, \dots, H_{nk}] , \quad \mathbf{z}_{Ak} = \text{diag}[z_{A1k}, \dots, z_{Ank}] . \tag{6-36}$$

Für den, in der hier dargelegten numerischen Studie, einzelnen Tilger in Brückenmitte somit $\mathbf{B}_k = B$, $\mathbf{H}_k = H$ und $\mathbf{z}_{Ak} = z_A$, gelistet in Tabelle 6.7 und Tabelle 6.8. Die Matrizen der Geometriefaktoren \mathbf{K}_{1k} , $\bar{\mathbf{K}}_{1k}$, \mathbf{K}_{2k} , $\bar{\mathbf{K}}_{2k}$ und $\bar{\mathbf{K}}_{3k}$ beziehen sich ebenfalls auf die installierten Flüssigkeitstilger und sind in analoger Weise bereits in Gl. (6-8) angegeben. Nach Einführen des Zustandsvektors $\bar{\mathbf{z}} = [\bar{\mathbf{Y}}^T \quad \bar{\mathbf{u}}_k^T \quad \dot{\bar{\mathbf{Y}}}^T \quad \dot{\bar{\mathbf{u}}}_k^T]^T$ bzw. dessen zeitlicher Ableitung $\dot{\bar{\mathbf{z}}}$ ergibt sich das, bereits in Gl. (6-5) vorgelegte, Differentialgleichungssystem 1. Ordnung. Die Matrizen \mathbf{A} und \mathbf{B} bleiben dabei unverändert, entsprechend Gl. (3-69), wobei hier jedoch die erweiterte Massenmatrix \mathbf{M}_S aus Gl. (6-34) einzusetzen ist. Die Matrix \mathbf{R} ergibt sich mit den, aus der Verdrehung $\vartheta(t)$ des Brückenquerschnittes resultierenden, zusätzlichen linearen Gliedern der modalen Bewegungsgleichungen, zu

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{K}_{f12} & 0 & 0 \\ \mathbf{K}_{f21k} & \mathbf{K}_{fk} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{C}_{fk} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_{f12} = \sum_{k=1}^r g \psi(\xi_k) \mathbf{L}_k \mu_k \bar{\mathbf{K}}_k, \quad \mathbf{K}_{f21k} = g \bar{\mathbf{K}}_k \mathbf{L}_k \psi(\xi_k),$$

(6-37)

wobei die Matrizen \mathbf{K}_{fk} und \mathbf{C}_{fk} in Gl. (6-8) definiert sind.

In Bezug auf die hier zu untersuchende einfeldrige Brücke wird das Gütekriterium mit dem Zustandsvektor $\bar{\mathbf{z}} = [Y_1 \ Y_2 \ Y_3 \ Y_4 \ \dot{Y}_1 \ \dot{Y}_2 \ \dot{Y}_3 \ \dot{Y}_4]^T$ des Hauptsystems analog zu Gl. (3-75) formuliert. Dabei wird die Gewichtsmatrix mit $\mathbf{S} = [10 \ 10 \ 10 \ 10 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]$ angenommen, wobei sich diese spezielle Wahl (entspricht einer Gewichtung der Verschiebungsgrößen) im Zuge der numerischen Simulationen als günstig erwiesen hat. Die Minimumsuche der Zielfunktion $J = J(\omega_A, \zeta_A)$ mit Hilfe Matlab 6.5, $x = \text{fminsearch}(J, \bar{x}_0)$, liefert nach Definition der Startwerte aus Gl. (6-33), $\bar{x}_0 = [2\pi \ 1.00, 0.058]^T$ die folgenden optimalen Entwurfparameter des linearisierten Flüssigkeitstilgers,

$$f_A = \frac{\omega_A}{2\pi} = 0.995 \text{ Hz}, \quad \zeta_A = 0.057. \quad (6-38)$$

Es zeigt sich, dass die mit Hilfe der Analogie zu Den Hartog berechneten Entwurfparameter, Gl. (6-33), nur geringfügig von den optimalen Entwurfparametern die mit Hilfe des Gütekriteriums ermittelt wurden, Gl. (6-38), abweichen. Eine Nachbesserung zufolge des Einflusses von benachbarten Eigenfrequenzen wird trotzdem vorgenommen. Unter Verwendung der optimierten Parameter aus Gl. (6-38), ergibt sich der in Abb. 6.32 illustrierte Amplitudenfrequenzgang der gewichteten Zustandsvariablen $\sum_{i=1}^8 s_i |z_i(v)|$ der einfeldrigen Brücke mit und ohne linearisiertem Flüssigkeitstilger.

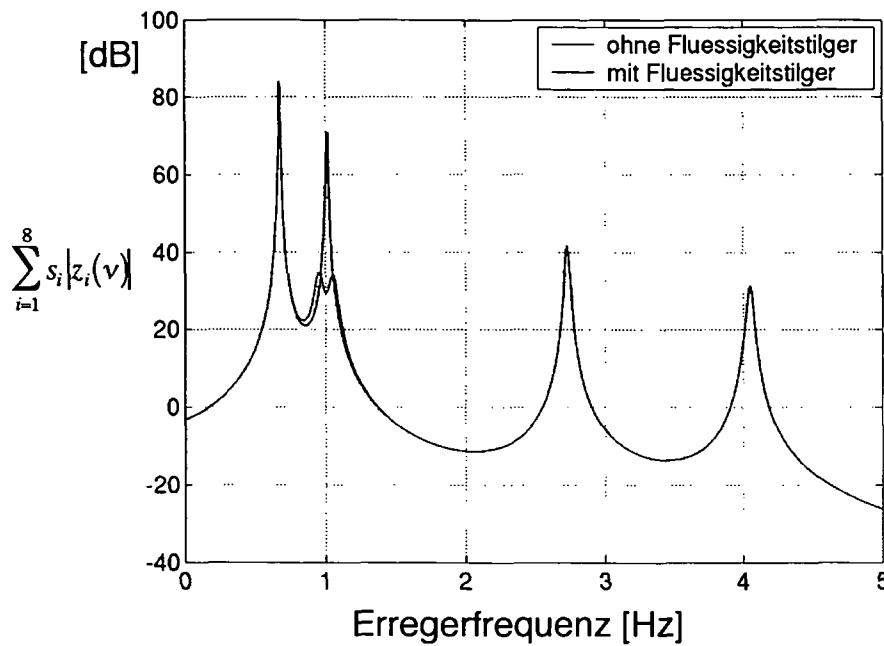


Abb. 6.32: Amplitudenfrequenzgang der gewichteten Zustandsvariablen $\sum_{i=1}^8 s_i |z_i(\nu)|$ der einfeldrigen Brücke mit und ohne linearisiertem Flüssigkeitstilger; optimale Entwurfsparameter aus Gl. (6-38)

Man erkennt eine deutliche Reduktion der Schwingungsspitze zufolge des auf die erste Oberfrequenz $f_{12} = 1.01 \text{ Hz}$ optimal abgestimmten Flüssigkeitstilgers. Für die praktische Realisierung der optimalen Eigenfrequenz $f_A = 0.995 \text{ Hz}$ ist eine zusätzliche Luftfeder durch Verschließen der Rohrenden notwendig. Die erforderliche Luftfederhöhe errechnet sich mit dem Polytropenexponenten $n = 1.2$ und dem Ausgangsdruck $p_0 = 10^5 \text{ Pa}$ aus Gl. (3-78) zu,

$$H_L = \frac{2n p_0}{\rho \omega_A^2 \Delta L_{eff}} = 2.33 \text{ m} , \quad \Delta L_{eff} = L_{eff} - \frac{2g \sin \beta}{\omega_A^2} = 2.64 \text{ m} , \quad (6-39)$$

Das erforderliche Luftvolumen im Flüssigkeitstilger beträgt somit $A_H H_L = 0.77 \text{ m}^3$, wie in der Abb. 6.33 maßstäblich illustriert.

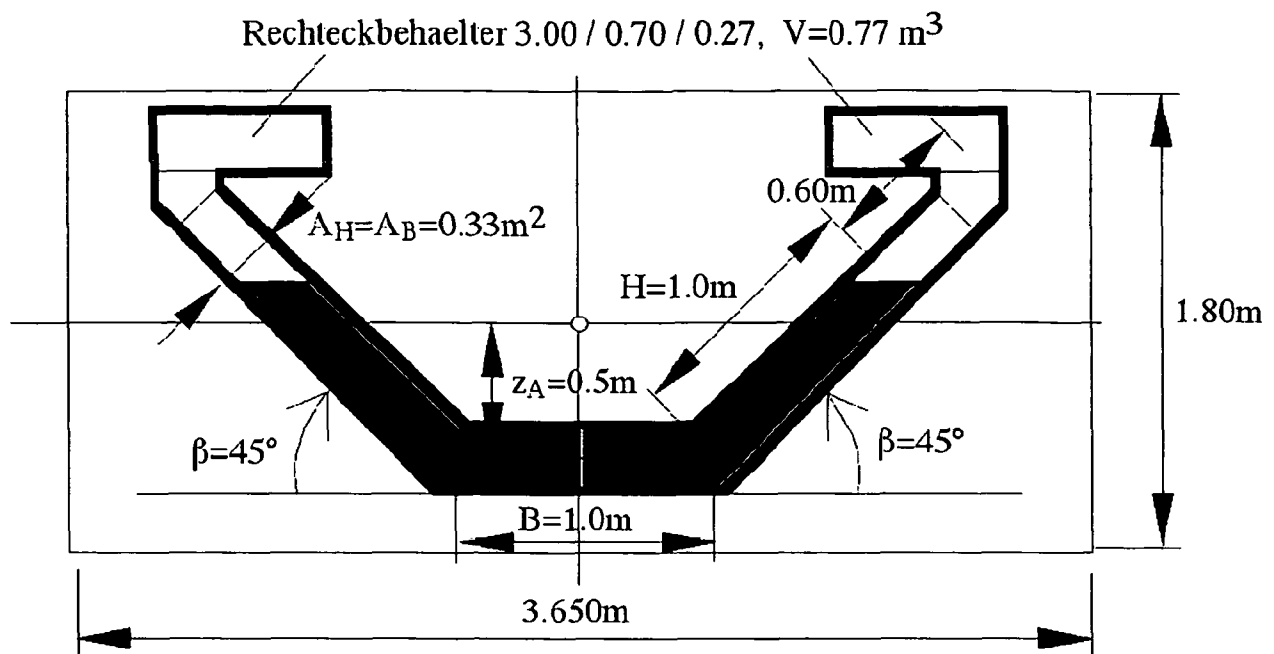


Abb. 6.33: Maßstäbliche Skizze des optimal abgestimmten Flüssigkeitstilgers mit Luftfeder; einfeldrige Brücke; $U_{\max} / H_L = 0.05 < 0.30$

Die gewählte Geometrie des Flüssigkeitstilgers, gelistet in Tabelle 6.8, erlaubt die Installation im begehbaren Innenraum des Kastenträgers. Da jedoch ein Kreisprofil bei der Querschnittsfläche von $A_H = A_B = 0.33\text{m}^2$ einen für die Unterbringung im Kasten ungünstig großen Durchmesser von 0.65m verlangt, wird bei dem in Abb. 6.33 dargestellten Flüssigkeitstilger ein Rechteckprofil mit den Abmessungen $1.50 / 0.22\text{m}$ ausgeführt. Das aus Gl. (6-39) errechnete Luftvolumen, $A_H H_L = 0.77\text{m}^3$, wird dann weiters durch Aufsetzen eines Rechteckbehälters mit den Abmessungen $3.00 / 0.70 / 0.27\text{m}$ erreicht.

6.3.3 Numerische Studie des einfeldrigen Brückenträgers

In der folgenden numerischen Studie werden in einem ersten Schritt die in den modalen Bewegungsgleichungen, Gl. (4-123) und (4-125), enthaltenen Nichtlinearitäten und auch die Parameteranregung beibehalten. Insbesondere wird der Flüssigkeitstilger mit nichtlinearer Turbulenzdämpfung δ_L aus Gl. (4-23) betrachtet. Der äquivalente Turbulenzdämpfungsterm ergibt sich aus Gl. (3-60) zu $\delta_L = 1.12$, wobei die maximale Schwingungsamplitude des Flüssigkeitsfadens mit $U_{\max} = 120 \text{ mm}$ abgeschätzt wurde. Dieser Wert ergibt sich aus einer numerischen Simulation des Hauptsystems mit linearisiertem Flüssigkeitstilger. Im weiteren Verlauf dieser Studie wird gezeigt, dass nicht immer alle Nichtlinearitäten die sich aus der Dynamik des Flüssigkeitstilgers ergeben berücksichtigt werden müssen. Es zeigt sich nämlich, dass die Betrachtung der nichtlinearen Turbulenzdämpfung und der Parameteranregung zufolge vertikaler Bewegung des Flüssigkeitstilgers ausreichen. Zur sicheren Vermeidung von Parameterresonanz wird noch das hinreichende Stabilitätskriterium, entsprechend Gl. (3-49), angeschrieben,

$$\zeta_{A,G} = \frac{2 w_1}{L_{\text{eff}}} \sin \beta = 0.006 < \zeta_A = 0.057, \quad (6-40)$$

wobei die maximale vertikale Schwingungsamplitude $w_1 = 13 \text{ mm}$ aus einer numerischen Simulation der Brücke mit linearisiertem Flüssigkeitstilger, an der kritischen Resonanzstelle $\lambda = 1/4$, Gl. (3-47), berechnet wird. Die vorhandene linearisierte Flüssigkeitsdämpfung liegt über dem geforderten Wert, d.h. Parameterresonanz ist im Bereich der Anregungsgrenzen von vorneherein auszuschließen.

Das zeitliche Schwingungsverhalten der Brücke mit und ohne Flüssigkeitstilger in nichtlinearer Modellierung, horizontale Verschiebung $v(t, x = l/2)$, bei symmetrischer horizontaler und vertikaler Krafterregung, gemäß Gl. (6-32), mit $f_{y1} = 1.01 \text{ Hz}$, $f_{y2} = 2f_{y1}$, $f_{y3} = 3f_{y1}$ und $f_{z1} = 2.02 \text{ Hz}$, $f_{z2} = 2f_{z1}$, $f_{z3} = 3f_{z1}$ ist in Abb. 6.34 illustriert. Die Erregerfrequenz f_{y1} wird dabei gleich der ersten Oberfrequenz f_{12} gewählt. Es zeigt sich eine Reduktion der stationäre Schwingungsantwort von ca. 150 mm auf 20 mm , d.h. um mehr als 80%.

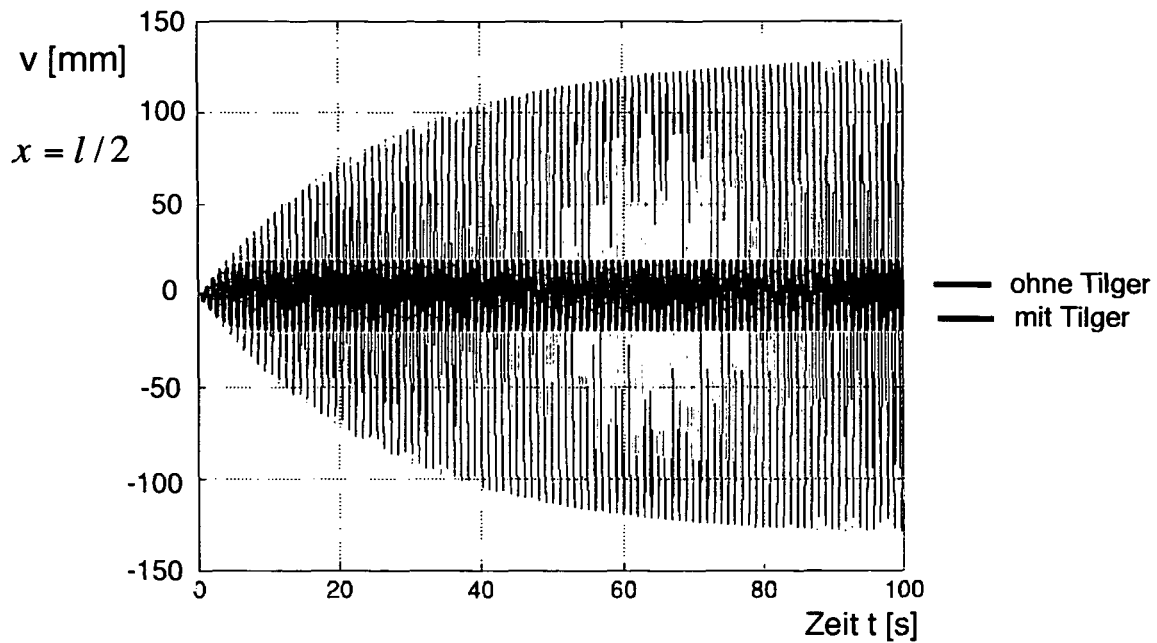


Abb. 6.34: Zeitliches Schwingungsverhalten der Brücke mit und ohne Flüssigkeitstilger; horizontale Verschiebung $v(t, x = l/2)$; symmetrische horizontale und vertikale Kraftanregung gemäß Gl. (6-32);

Erregerfrequenzen: $f_{y1} = 1.01 \text{ Hz}$, $f_{y2} = 2f_{y1}$, $f_{y3} = 3f_{y1}$ und $f_{z1} = 2.02 \text{ Hz}$, $f_{z2} = 2f_{z1}$, $f_{z3} = 3f_{z1}$; nichtlineares Modellverhalten; Turbulenzdämpfungsterm $\delta_L = 1.12$

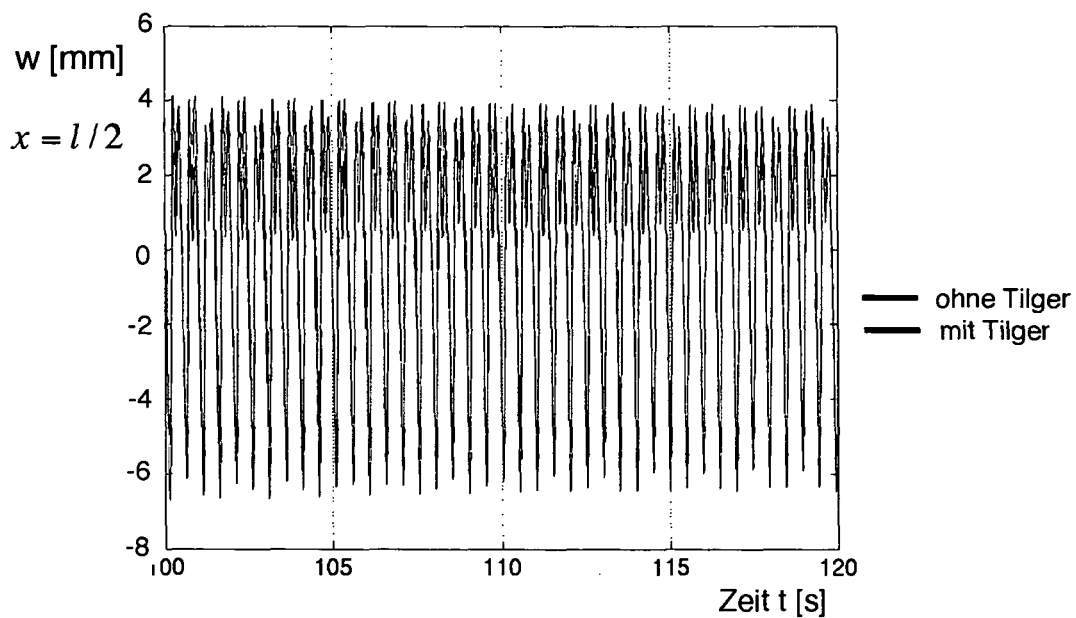


Abb. 6.35: Stationäres Schwingungsverhalten der Brücke mit und ohne Flüssigkeitstilger; vertikale Verschiebung $w(t, x = l/2)$; symmetrische horizontale und vertikale Kraftanregung gemäß Gl. (6-32); Erregerfrequenzen: $f_{y1} = 1.01 \text{ Hz}$, $f_{y2} = 2f_{y1}$, $f_{y3} = 3f_{y1}$ und $f_{z1} = 2.02 \text{ Hz}$, $f_{z2} = 2f_{z1}$, $f_{z3} = 3f_{z1}$; nichtlineares Modellverhalten; Turbulenzdämpfungsterm $\delta_L = 1.12$

Ergänzend ist in der Abb. 6.35 das stationäre Schwingungsverhalten der Brücke mit und ohne Flüssigkeitstilger in nichtlinearer Modellierung, vertikale Verschiebung $w(t, x = l/2)$, bei symmetrischer horizontaler und vertikaler Krafteerregung, gemäß Gl. (6-32), mit $f_{y1} = 1.01 \text{ Hz}$, $f_{y2} = 2f_{y1}$, $f_{y3} = 3f_{y1}$ und $f_{z1} = 2.02 \text{ Hz}$, $f_{z2} = 2f_{z1}$, $f_{z3} = 3f_{z1}$ dargestellt. Man erkennt, dass der optimal abgestimmte Flüssigkeitstilger keine Verschlechterung des vertikalen Schwingungsverhaltens der Brücke bewirkt, d.h. die maximalen Schwingungsamplituden mit und ohne Flüssigkeitstilger sind nahezu identisch.

Die Abb. 6.36 illustriert weiters das zeitliche Schwingungsverhalten der Brücke mit und ohne Flüssigkeitstilger in nichtlinearer Modellierung, Verdrehung $\vartheta(t, x = l/2)$, bei symmetrischer horizontaler und vertikaler Krafteerregung, gemäß Gl. (6-32), mit $f_{y1} = 1.01 \text{ Hz}$, $f_{y2} = 2f_{y1}$, $f_{y3} = 3f_{y1}$ und $f_{z1} = 2.02 \text{ Hz}$, $f_{z2} = 2f_{z1}$, $f_{z3} = 3f_{z1}$.

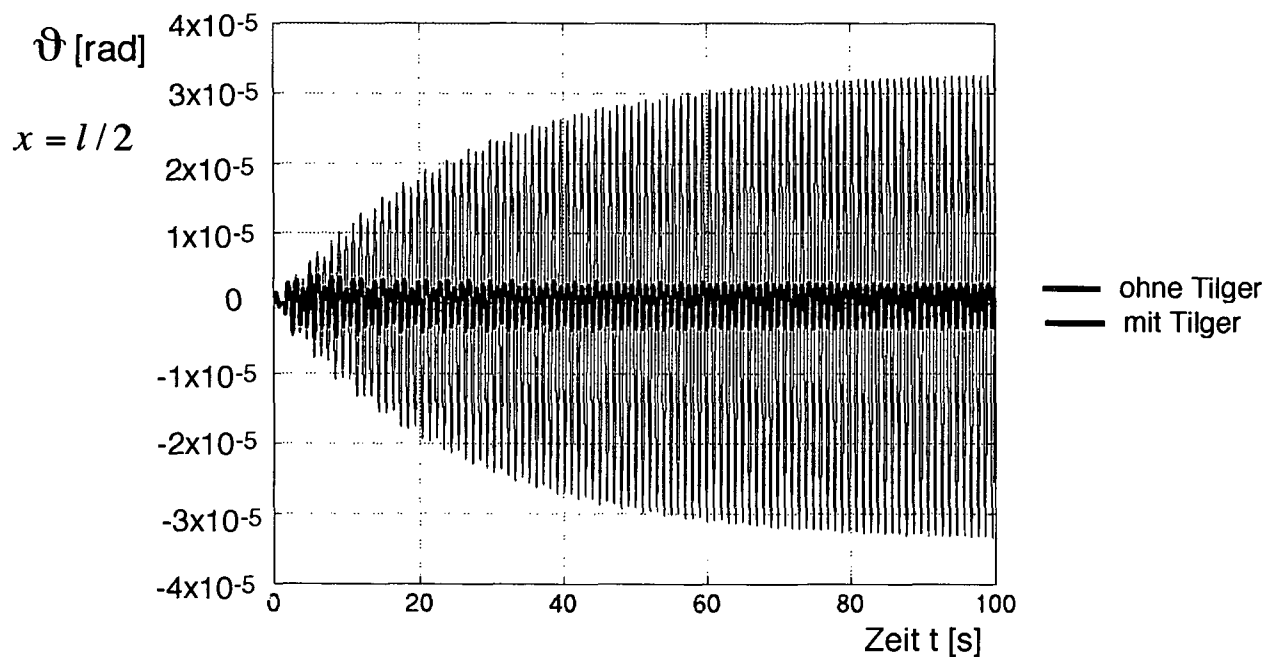


Abb. 6.36: Zeitliches Schwingungsverhalten der Brücke mit und ohne Flüssigkeitstilger; Verdrehung $\vartheta(t, x = l/2)$; symmetrische horizontale und vertikale Krafteerregung gemäß Gl. (6-32); Erregerfrequenzen: $f_{y1} = 1.01 \text{ Hz}$, $f_{y2} = 2f_{y1}$, $f_{y3} = 3f_{y1}$ und $f_{z1} = 2.02 \text{ Hz}$, $f_{z2} = 2f_{z1}$, $f_{z3} = 3f_{z1}$; nichtlineares Modellverhalten; Turbulenzdämpfungsterm $\delta_L = 1.12$

Anhand der Abb. 6.36 zeigt sich ein äußerst positiver Effekt des Flüssigkeitstilgers: Neben der starken Reduktion der horizontalen Schwingungsantwort $v(t)$ wird auch die Drehschwingung $\vartheta(t)$ der Brücke um ein beträchtliches Maß verringert.

Die in der Abb. 6.34 - Abb. 6.36 illustrierten numerischen Ergebnisse errechnen sich unter Beibehaltung aller Nichtlinearitäten und der Parameteranregung in den modalen Gleichungen der Brücke und des Flüssigkeitstilgers, Gln. (4-123) und (4-125). Unter der Voraussetzung der relativ kleinen Schwingungsamplituden $u(t)$ des Flüssigkeitstilgers, kann jedoch ein Großteil der Nichtlinearitäten vernachlässigt werden. Insbesondere muss aber die nichtlineare Turbulenzdämpfung δ_L und soll die Parameteranregung in der Simulationsrechnung beibehalten werden. Eine Vergleichsrechnung mit diesen wesentlichen nichtlinearen Einflüssen (vereinfachtes Modell), liefert für das zeitliche Schwingungsverhalten der Brücke mit und ohne Flüssigkeitstilger ein, zu den Abb. 6.34 - Abb. 6.36, identisches Ergebnis. Der Vorteil liegt in der dann wesentlich verkürzten Rechenzeit. Während das Lösen des vollständigen nichtlinearen Differentialgleichungssystems mit Hilfe der Software Matlab 6.5 / Simulink mehrere Minuten in Anspruch nimmt, wird das reduzierte System in wenigen Sekunden gelöst.

Die Wirkung des Flüssigkeitstilgers in der Umgebung der zu tilgenden Resonanzstelle, $f_{12} = 1.01 \text{ Hz}$, wird unter Betrachtung dieses reduzierten Systems genauer untersucht. Dazu wird an diskreten Stellen der Erregerfrequenzen $f_{y,i}$ und $f_{z,i}$ der DVF mit und ohne Flüssigkeitstilger in vereinfachter nichtlinearer Modellierung, der horizontalen Verschiebung $v(t, x = l/2)$, ermittelt, wie in der Abb. 6.37 illustriert.

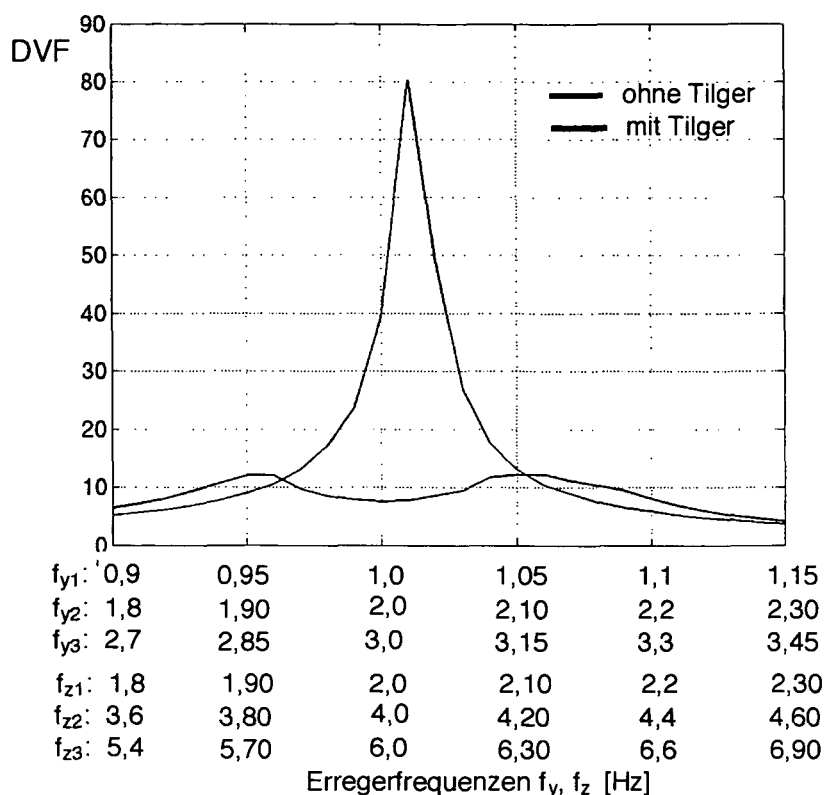


Abb. 6.37: Numerisches Ergebnis des dynamischen Vergrößerungsfaktors (DVF) der Brücke mit und ohne Flüssigkeitstilger; horizontale Verschiebung $v(t, x = l/2)$; symmetrische horizontale und vertikale Kraftanregung; Erregerfrequenzen: f_{y1} , f_{y2} , f_{y3} und f_{z1} , f_{z2} , f_{z3} ; nichtlineares vereinfachtes Modellverhalten; Turbulenzdämpfungsterm $\delta_L = 1.12$

Die Abb. 6.37 zeigt einen stark reduzierten Verlauf des DVF über den gesamten interessierenden Frequenzbereich. Insbesondere wird kein negativer Einfluss der vertikalen Anregung auf das Dämpfungsverhalten des Flüssigkeitstilgers beobachtet. Die unzulässige horizontale Schwingungsantwort, Verschiebung $v(t)$ und die Drehschwingung $\vartheta(t)$, der Brücke, werden somit durch die Installation des optimal abgestimmten Flüssigkeitstilgers erfolgreich und wirtschaftlich reduziert.

Abschließend werden im Zuge dieser numerischen Simulation noch die hinreichenden Grenzbedingungen zur Vermeidung eines Synchronisationseffektes der Fußgänger, Gln. (5-15) und (5-37), angeschrieben. Mit den vorgelegten Parametern der Brücke errechnen sich die mindest erforderlichen Dämpfungskoeffizienten ζ_s des Brückenträgers wie in Tabelle 6.9 gelistet.

Tabelle 6.9: Vergleich der Grenzbedingungen zur Vermeidung eines Synchronisationseffektes der Fußgänger für die einfeldrige Brücke nach Abb. 6.31

Grenzbedingung nach Newland Gl. (5-15)	Grenzbedingung (Parameterresonanz) Gl. (5-37)
Anzahl der auf der Brücke befindlichen Personen $n_p = 183$ Mittlere Masse einer Person $m_p = 80 \text{ kg}$ Eigenkreisfrequenz $\omega_{12} = 2\pi \cdot 1.01$ ($k=1$), mit horizontale Schwingungsform Modale Brückenmasse $M^* = m_T / 2 = 71435 \text{ kg}$ Brückenlänge $l = 100 \text{ m}$ Parameter $\alpha = 1.00$, $\beta = 1.00$, obere Grenzwerte, Gl. (5-7) Kritische Erregerkreisfrequenz $\omega_s = 2\omega_{12}$	
harm. Beschleunigungsanteil $a_{1,y} = 0.05 \text{ g}$ folgt aus Gl. (6-32)	harm. Beschleunigungsanteil $a_{2,x} = 0.20 \text{ g}$ folgt aus Kapitel 5, Abb. 5.9
<u>anteilige Personenmasse</u> $m_{p,y}^* = 732 \text{ kg}$ folgt aus Gl. (5-8)	<u>anteilige Personenmasse</u> $m_{p,x}^* = 2928 \text{ kg}$ folgt aus Gl. (5-8)
$\zeta_s > \frac{\alpha\beta}{2} \frac{m_{p,y}^*}{M^*} = 5 \times 10^{-3} = 0.5\%$	$\zeta_s > \frac{k^2\pi^2}{2} \frac{m_{p,x}^*}{m_T} \frac{g}{l\omega_s^2} = 6 \times 10^{-5} = 0.006\%$

Aus der Tabelle 6.9 erkennt man, dass die Grenzbedingung nach Newland für die einfeldrige Brücke nach Abb. 6.31 maßgebend ist. Die erzielte resultierende Dämpfung der Brücke mit optimiertem Flüssigkeitstilger ergibt sich aus Abb. 6.37 zu $\zeta_{res} \approx 4.6\% \gg \zeta_s = 0.5\%$. Dem zur Folge wird ein Synchronisationseffekt der Fußgänger ausgeschlossen.

LITERATUR

- ¹ Fitzpatrick, T., Dallard, P., Le Bourva, S., Low, A., Smith, R.R., Willford, M., 2001, 'Linking London: The Millennium Bridge', Published by The Royal Academy of Engineering, Westminster London.
- ² Dallard, P., Fitzpatrick, A.J., Flint, A., Le Bourva, S., Low, A., Ridsdill, R.M., Willford, M., et al., 2001, 'The London Millenium Footbridge', The Structural Engineer, Vol. 79, No. 22, p. 17-34.
- ³ Nakamura, S., Fujino, Y., 2002, 'Lateral Vibration on a Pedestrian Cable-Stayed Bridge', Structural Engineering International, Vol. 4, p. 295 – 300.
- ⁴ Blevins, R.D., 1979, 'Formulas For Natural Frequency And Mode Shape', Van Nostran Reinhold Company, New York.
- ⁵ Ziegler, F., 1995, 'Mechanics of Solids and Fluids', Second Edition, Springer Verlag New York.
- ⁶ Rubin, H., 2001, 'Studienblätter zur Vorlesung Baustatik 1', Nr. 1.1 bis 1.29, erhältlich am Institut für Baustatik (E211), TU-Wien, A-1040 Wien.

7. TILGUNG WINDERREGTER SCHWINGUNGEN VON BRÜCKEN

In diesem abschließenden Kapitel wird noch eine Methode zur optimalen Abstimmung des Flüssigkeitstilgers speziell für winderregte Schwingungen von Brückentragwerken vorgestellt. Die Optimierung erfolgt ähnlich zu dem bereits in Kapitel 3, Abschnitt 3.6.2.2 dargelegten Verfahren, jedoch wird für diesen dynamischen Lastfall das rasche Abklingen der freien Schwingungsantwort der Brücke angestrebt. Damit lässt sich insbesondere die zur Beurteilung der Schwingungsanfälligkeit von elastischen Strukturen gegebene Scruton-Zahl über ihren kritischen Wert anheben. Auf die Komplexität der Windanregung braucht dann nicht näher eingegangen zu werden. Es wird eine allgemeine ausgelenkte Lage der Brücke betrachtet und das Ausschwingverhalten mit und ohne Wirkung des Flüssigkeitstilgers untersucht. Das dargelegte Gütekriterium betrachtet eine quadratische Regelfläche, wobei die Abweichungen von der Nulllage während der gesamten Ausschwingdauer minimiert werden. Anhand von numerischen Beispielen wird dann die Qualität des Gütekriteriums überprüft und die Verbesserung des Ausschwingverhaltens mit Wirkung der Flüssigkeitstilger sichtbar gemacht.

7.1 Allgemeines

Die dynamische Anregung von weitgespannten Brückentragwerken zufolge Wind stellt eine große Gefahr für das Tragwerk dar. Insbesondere können bei schwach gedämpften Brücken Instabilitätsphänomene wie Galloping (ungekoppelte Biege- oder Torsionsschwingungen, erläutert z.B. in Petersen¹, Seite 641) oder Flattern (gekoppelte Biege- und Torsionsschwingungen, erläutert z.B. in Ziegler², Seite 431 oder Sockel³, Seite 368) zu großen Schwingungsamplituden bis hin zum Einsturz von Brückentragwerken führen. Das wohl bekannteste Beispiel dafür ist die am 07. November 1940 eingestürzte Tacoma Narrows Bridge in Washington, USA, illustriert in der Abb. 7.1.

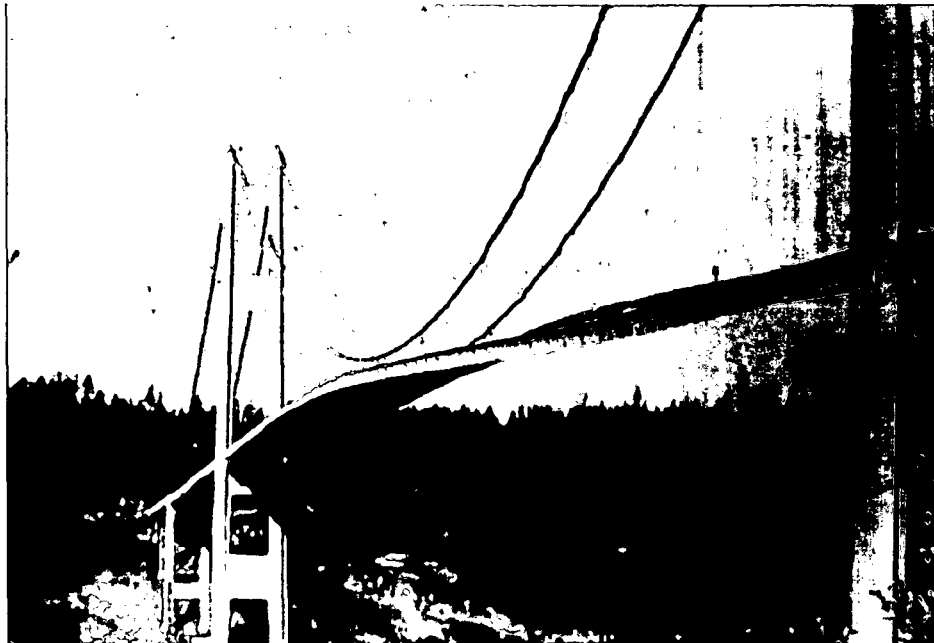


Abb. 7.1: Tacoma Narrows Bridge unmittelbar vor dem Einsturz am 07. November 1940, Washington, USA; Quelle: www.enm.bris.ac.uk/research/nonlinear/tacoma/tac06.gif

Als Ursache für den Einsturz wird in der Literatur häufig ein Anwachsen der gekoppelten Biege- und Drehschwingungen (Flutterinstabilität) zufolge von Kármán Wirbeln genannt, wie z.B. von Petersen⁴, Seite 73. In dem Buch von Starossek⁵ werden vorwiegend Flatterschwingungen an Brückentragwerken untersucht und ein Verfahren für die Ermittlung der kritischen Windgeschwindigkeit v_k vorgestellt. Insbesondere überprüft Starossek dieses Verfahren anhand der Tacoma Narrows

Bridge, jedoch ohne Erfolg. Die Ergebnisse führen auf eine kritische Windgeschwindigkeit von $v_k = 8.56 \text{ m/s}$, gegenüber dem gemessenen Wert von $v_k = 19 \text{ m/s}$. Als Begründung für dieses unbefriedigende Ergebnis nennt Starrosek eventuell fehlerhaft ermittelte Luftkraftbeiwerte. In einer neueren Arbeit von Larsen⁶ wird hingegen nicht mehr die Flutterinstabilität sondern die alleinige Instabilität der Drehschwingung als Ursache genannt. Es gelingt Larsen [6], sowohl numerisch als auch durch Windkanalversuche an einem maßstäblichen Modell der Tacoma Bridge, zu zeigen, dass bei Windanregung mit einer kritischen Windgeschwindigkeit von $v_k = 19 \text{ m/s}$ die vertikalen Biegeschwingungen der Brücke begrenzt bleiben und nur die Drehschwingungen mit fortschreitender Zeit t „unbegrenzt“ anwachsen, wie in der Abb. 7.2 dargestellt.

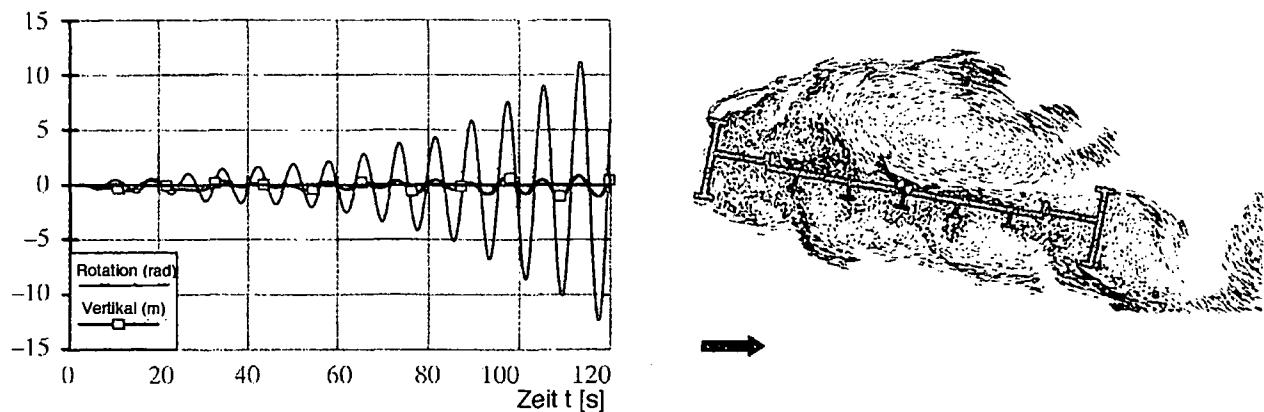


Abb. 7.2: Numerische Simulation des zeitlichen Schwingungsverhaltens des Modells der Tacoma Narrows Bridge zufolge Windanregung; Begrenzte vertikale Schwingungsantwort; aufklingende rotatorische Schwingungsantwort; Umströmung des Brückenquerschnittes; Quelle: Larsen [6]

Für eine detaillierte Beschreibung dieser Drehschwingungsinstabilität, insbesondere deren Entstehungsmechanismus, wird nochmals auf die Arbeit von Larsen [6] verwiesen.

In der vorliegenden Studie wird eine Brücke betrachtet die sich zufolge Windanregung in einem beliebig ausgelenkten Momentanzustand befindet. Die optimale Abstimmung mehrerer Flüssigkeitsstilger soll zu einem möglichst raschen Abklingen der freien Schwingungsantwort der Brücke führen. Damit lässt sich die Scruton-Zahl S_c , definiert in Gl. (5-17), über ihren kritischen Wert anheben. Liegt S_c nämlich unter ca. 25, so ist eine Struktur als schwingungsanfällig anzusehen, wie

von Petersen [4, Seite 75] angegeben wird. Um das rasche Abklingen sowohl der symmetrischen als auch der antimetrischen Schwingungsformen zu erreichen werden insgesamt drei Flüssigkeitstilger an diskreten Stellen des Brückenfeldes, nämlich $x_1 = l/2$, $x_2 = l/4$ und $x_3 = 3l/4$, installiert, wie in der Abb. 7.3 illustriert.

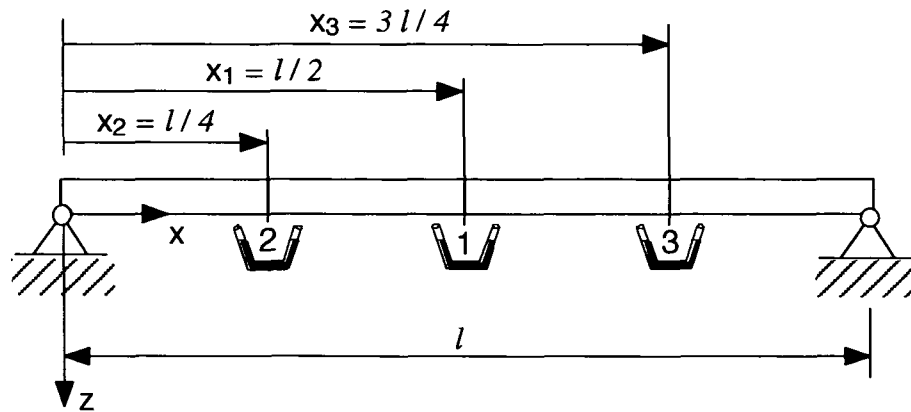


Abb. 7.3: Flüssigkeitstilger an diskreten Stellen des Brückenfeldes

Die optimale Abstimmung der Flüssigkeitstilger erfolgt dann mit Hilfe eines geeigneten Gütekriteriums auf die freie Schwingungsantwort der Brücke.

7.2 Optimale Abstimmung der Flüssigkeitstilger auf die freie Schwingungsantwort der Brücke

In Analogie zu Kapitel 3, Abschnitt 3.6.2.2, wo die optimale Abstimmung des Flüssigkeitstilgers zufolge erzwungener Schwingungen durch eine Minimierung der quadratischen Amplitudenfrequenzgangfläche erreicht wird, betrachtet das folgende Gütekriterium zur Minimierung der freien Schwingungsantwort der Brücke eine quadratische Regelfläche im Zeitbereich. Als vorteilhaft erweist sich wieder die Einführung des Zustandsvektors $\bar{z}(t)$, d.h. es werden die linearisierten Differentialgleichungen 1. Ordnung betrachtet. Die quadratische Regelfläche kennzeichnet das Ausschwingverhalten aus einem Anfangszustand \bar{z}_0 , wobei die großen Ausschläge infolge des in $\bar{z}(t)$ quadratischen Integranden stark bewertet werden, wie von Müller und Schiehlen⁷ [Seite 171] angegeben,

$$J_0 = \int_0^{\infty} \bar{z}^T(t) S \bar{z}(t) dt \rightarrow \text{Minimum} . \quad (7-1)$$

Anhand der Gl. (7-1) erkennt man, dass die zu minimierende Zielfunktion J_0 nur von den Anfangsbedingungen \bar{z}_0 und der diagonalen, positiv semidefiniten $N \times N$ Bewertungsmatrix (Gewichtsmatrix) S abhängt. J_0 gibt also ein Maß für die Abweichung $\bar{z}(t)$ von der Nulllage während der gesamten Ausschwingdauer $0 \leq t < \infty$ an. Die Berechnung des in Gl. (7-1) gegebenen uneigentlichen Integrales ist im allgemeinen recht aufwendig. Nun zeichnet sich die quadratische Regelfläche jedoch dadurch aus, dass sie sich analog zur quadratischen Amplitudenfrequenzgangfläche, Gl. (3-73), aus der algebraischen Ljapunov'schen Matrizengleichung, Gl. (3-74), ohne Integration berechnen lässt, Müller und Schiehlen [7, Seite 174],

$$J_0 = \bar{z}_0^T \mathbf{P} \bar{z}_0 \rightarrow \text{Minimum} . \quad (7-2)$$

Damit ist die Berechnung der quadratischen Regelfläche J_0 in einfacher Weise auf die Berechnung der Matrix \mathbf{P} der Ljapunov'schen Matrizengleichung zurückgeführt. Vergleicht man die Ausdrücke des quadratischen Amplitudenfrequenzganges J und der quadratischen Regelfläche J_0 , Gl. (3-73) und Gl. (7-2), so erkennt man, dass durch die spezielle Wahl der Anfangsbedingungen, nämlich $\bar{z}_0 = \bar{b} \sqrt{2\pi}$, identische Ausdrücke entstehen. \bar{b} definiert dabei den Erregervektor der im Zuge des Optimierungsverfahrens mit $\bar{b} = [1 \ 1 \ \dots \ 1]^T = \bar{\mathbf{1}}$ gewählt wird, wie in Kapitel 6, Abschnitt 6.2.3.2 ausgeführt. Dem zu Folge ergeben sich mit $\bar{z}_0 = \bar{b} \sqrt{2\pi}$ sowohl für die freien als auch für die erzwungenen Schwingungen dieselben optimalen Entwurfparameter der Flüssigkeitstilger. Im nachfolgenden Abschnitt 7.3 wird noch gezeigt, dass der Faktor $\sqrt{2\pi}$ bzw. auch jeder andere multiplikative Faktor keinen Einfluss auf die Gleichheit der Entwurfparameter hat. Von entscheidender Bedeutung ist aber die Form bzw. Belegung der Vektoren \bar{b} und damit von \bar{z}_0 . Die Berechnung der Matrix \mathbf{P} in Gl. (7-2) und die nachfolgende Minimumsuche der Zielfunktion $J_0 = J_0(\omega_{An}, \zeta_{An})$ erfolgt dann wieder standardmäßig numerisch mit Hilfe

des Computerprogramms Matlab 6.5. Nachfolgend werden zwei Modelle, nämlich ein einfeldriger Brückenträger mit hoher und geringer Torsionssteifigkeit untersucht. Das Kriterium wurde auch von Hochrainer⁸ auf winderregte Hochbaukonstruktionen angewendet.

7.3 Numerische Studie eines einfeldrigen Brückenträgers mit hoher Torsionssteifigkeit, Freie Schwingung

Für die folgende numerische Studie wird der bereits in Kapitel 6, Abschnitt 6.3, vorgestellte einfeldrige fiktive Brückenträger betrachtet. Die Brücke soll nun zufolge Windanregung in den Anfangszustand $\bar{z}_0 = [Y_1^0 \ Y_2^0 \ Y_3^0 \ Y_4^0 \ \dot{Y}_1^0 \ \dot{Y}_2^0 \ \dot{Y}_3^0 \ \dot{Y}_4^0]$ versetzt werden. Der Anfangszustandsvektor \bar{z}_0 ist dabei durch die modalen Koordinaten ausgedrückt. Die Abb. 7.4 zeigt den Brückenquerschnitt an der diskreten Stelle x , exemplarisch für die Anfangsauslenkungen w_0 , v_0 und die Anfangsrotation ϑ_0 .

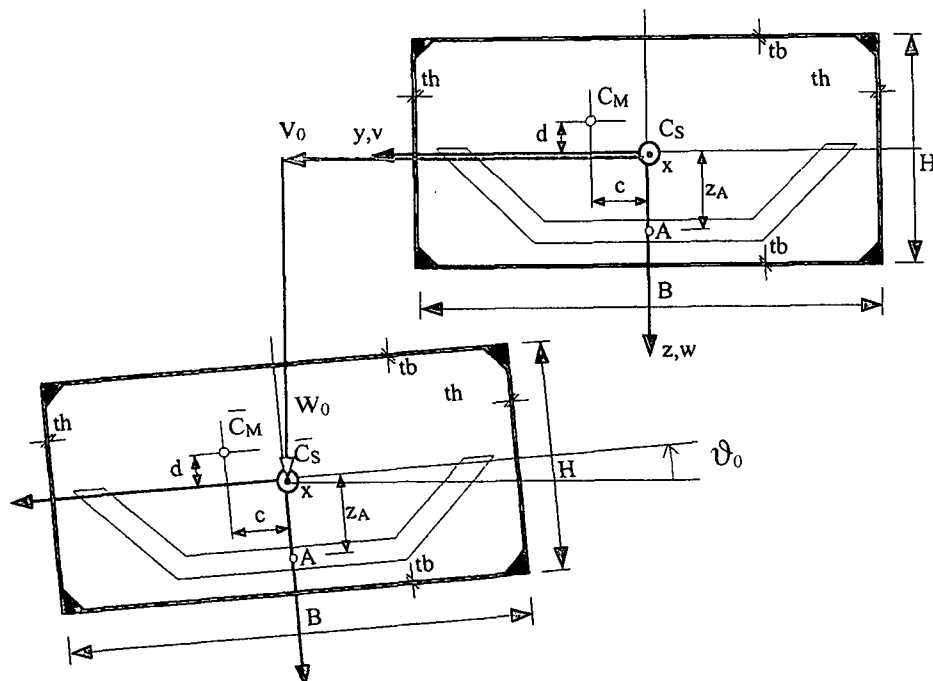


Abb. 7.4: Einfeldriger kontinuierlicher Brückenträger mit hoher Torsionssteifigkeit; Kastenquerschnitt; Anfangszustand der Brücke zufolge Windanregung; Exemplarische Darstellung für die Anfangsauslenkungen w_0 , v_0 und die Anfangsrotation ϑ_0

Die Anfangsbedingungen werden nun so gewählt, dass sowohl die symmetrischen als auch die antimetrischen Schwingungsformen angeregt werden, $\bar{z}_0 = (1/6) \bar{1}$. Der Faktor $1/6$ dient hier lediglich als Skalierung. In Bezug auf eine diskrete Stelle des Brückenträgers ergibt sich z.B. die Anfangsauslenkung v_0 und Anfangsgeschwindigkeit \dot{v}_0 aus Gl. (4-105) zu

$$\begin{aligned} v_0(x) &= Y_1 \chi_{11}(x) + Y_2 \chi_{12}(x) + Y_3 \chi_{21}(x) + Y_4 \chi_{22}(x) , \\ \dot{v}_0(x) &= \dot{Y}_1 \chi_{11}(x) + \dot{Y}_2 \chi_{12}(x) + \dot{Y}_3 \chi_{21}(x) + \dot{Y}_4 \chi_{22}(x) . \end{aligned} \quad (7-3)$$

Da entsprechend den Ausführungen in Abschnitt 7.2 für die optimale Abstimmung der Flüssigkeitstilger, in Bezug auf die freien Schwingungen der Brücke, in analoger Weise vorzugehen ist wie für die erzwungenen Schwingungen, können die Systemmatrizen ungeändert aus Kapitel 6, Abschnitt 6.3.2.2 übernommen werden. Bei der numerischen Simulation des dargelegten einfeldrigen Brückenträgers werden die ersten vier Eigenfrequenzen f_{11} , f_{12} , f_{21} und f_{22} , definiert in Gl. (6-30), mit den zugehörigen viskosen Dämpfungskoeffizienten $\zeta_{11} = 0.6\%$, $\zeta_{12} = 0.65\%$, $\zeta_{21} = 0.70\%$ und $\zeta_{22} = 0.75\%$ betrachtet. Dabei sind die den Eigenfrequenzen f_{12} und f_{22} zugehörigen Schwingungsformen dominierend horizontal gerichtet, wie aus den in Gl. (6-31) angegebenen Eigenfunktionen ersichtlich ist. Insbesondere ist darauf zu achten, dass die Eigenfrequenzen f_{12} und f_{22} eine zugehörige symmetrisch bzw. antimetrische Schwingungsform aufweisen. Die optimale Abstimmung der geschlossenen Flüssigkeitstilger mit Luftfeder erfolgt nun auf diese beiden Eigenfrequenzen, nämlich: Flüssigkeitstilger 1, installiert an der Stelle $x_1 = l/2$, optimal abgestimmt auf die Eigenfrequenz $f_{12} = 1.01 \text{ Hz}$; Flüssigkeitstilger 2 und 3, installiert an den Stellen $x_2 = l/4$ und $x_3 = 3l/4$, optimal abgestimmt auf die Eigenfrequenz $f_{22} = 4.05 \text{ Hz}$. Die Spannweite der Brücke beträgt $l = 100 \text{ m}$.

Das Masseverhältnis wird wie in Kapitel 6, Abschnitt 6.3.2, für alle drei Flüssigkeitstilger gleich mit $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 \approx 1.5\%$ festgelegt. Daraus errechnen sich die entsprechenden Flüssigkeitsmassen wieder zu $m_{f1} = m_{f2} = m_{f3} = 1000 \text{ kg}$. Die Geometrie wird ebenfalls für alle drei geschlossenen Flüssigkeitstilger mit Luftfeder gleich beibehalten, wie in Tabelle 6.8 gelistet. Die Entwurfparameter ergeben sich

dann aus der Minimumsuche der Zielfunktion $J_0 = J_0(\omega_{A1}, \omega_{A2}, \omega_{A3}, \zeta_{A1}, \zeta_{A2}, \zeta_{A3})$, Gl. (7-2), mit Hilfe Matlab 6.5, Befehl $x = fminsearch(J_0, \bar{x}_0)$. Nach Definition der passend gewählten Startwerte aus Gl. (6-33), $\bar{x}_0 = [2\pi \cdot 1.00, 2\pi f_{22}, 2\pi f_{22}, 0.058, 0.06, 0.06]^T$, erhält man die folgenden optimalen Entwurfparameter der Flüssigkeitstilger,

$$f_{A1} = \frac{\omega_{A1}}{2\pi} = 0.995 \text{ Hz}, \quad f_{A2} = \frac{\omega_{A2}}{2\pi} = 3.83 \text{ Hz}, \quad f_{A3} = \frac{\omega_{A3}}{2\pi} = 4.14 \text{ Hz}, \quad (7-4)$$

$$\zeta_{A1} = 0.057, \quad \zeta_{A2} = 0.0474, \quad \zeta_{A3} = 0.0477.$$

Sehr interessant ist die Feststellung, dass die optimalen Entwurfparameter der freien Schwingungen des Flüssigkeitstilgers 1 identisch mit jenen der erzwungenen Schwingungen, Gl. (6-38), sind. Diese Tatsache bestätigt die am Ende des Abschnittes 7.2 formulierte Aussage, nämlich dass ein multiplikativer Faktor bei Gleichheit von \bar{b} und \bar{z}_0 keinen Einfluss auf das Ergebnis der optimalen Entwurfparameter hat. Die optimalen Eigenfrequenzen der Flüssigkeitstilger 2 und 3, Gl. (7-4), sind in ihren Werten einerseits kleiner und andererseits größer als die Oberfrequenzen der zu tilgenden Schwingungsform (Oberfrequenz $f_{22} = 4.05 \text{ Hz}$). Dem zur Folge wird die Robustheit der Tilgerwirkung erhöht, wie in Kapitel 1, Abschnitt 1.3 erläutert.

Zur praktischen Realisierung der optimalen Eigenfrequenzen ist wieder eine zusätzliche Luftfeder durch Verschließen der beiden Rohrenden erforderlich. Als Folge der Gleichheit der Entwurfparameter für die freie und erzwungene Schwingung ist der Flüssigkeitstilger 1 in gleicher Weise wie der bereits in Kapitel 6, Abschnitt 6.4.2.2 dargelegte Tilger auszuführen. Für Tilger 2 und 3 wird die Luftfederhöhe H_L entsprechend ausgelegt. Mit dem Polytropenexponenten $n=1.2$ und den Ausgangsdrücken $p_{0,2} = p_{0,3} = 10^5 \text{ Pa}$ ergibt sich $H_{L,i}$ aus Gl. (3-78) zu,

$$H_{L,2} = \frac{2n p_{0,2}}{\rho \omega_{A,2}^2 \Delta L_{eff,2}} = 0.14 \text{ m} , \quad \Delta L_{eff,2} = L_{eff,2} - \frac{2g \sin \beta}{\omega_{A,2}^2} = 2.976 \text{ m} , \quad (7-5)$$

$$H_{L,3} = \frac{2n p_{0,3}}{\rho \omega_{A,3}^2 \Delta L_{eff,3}} = 0.12 \text{ m} , \quad \Delta L_{eff,3} = L_{eff,3} - \frac{2g \sin \beta}{\omega_{A,3}^2} = 2.979 \text{ m} .$$

Eine maßstäbliche Skizze der so entworfenen Flüssigkeitstilger ist in der Abb. 6.31 illustriert, wobei für die Flüssigkeitstilger 2 und 3 die Luftfederhöhe entsprechend der Gl. (7-5) anzupassen ist. Anhand der Gl. (7-5) erkennt man, dass die Luftfederhöhen der Flüssigkeitstilger 2 und 3 sehr gering sind. Insbesondere ergeben sich die Verhältnisse $U_{\max,i} / H_{L,i}$ zu

$$U_{\max,2} / H_{L,2} = 0.57 > 0.30 , \quad (7-6)$$

$$U_{\max,3} / H_{L,3} = 0.67 > 0.30 ,$$

wobei die maximalen Schwingungsamplituden mit $U_{\max,2} = U_{\max,3} = 80 \text{ mm}$ abgeschätzt werden. Diese Werte Folgen aus einer numerischen Simulation des Hauptsystems mit linearisierten Flüssigkeitstilgern. Der in Gl. (7-6) angegebene Grenzwert des Anwendungsbereiches, $U_{\max,i} / H_{L,i} < 0.30$, für geschlossene Flüssigkeitstilger mit Luftfeder folgt aus Abb. 3.7. Aufgrund der deutlichen Überschreitung dieses Grenzwertes wird in den folgenden numerischen Simulationen die nichtlineare Luftfeder aus Gl. (3-24) betrachtet. Da es sich hier um Ausschwingversuche handelt und dem zur Folge große Schwingungsamplituden des Flüssigkeitsfadens nur über einen kurzen Zeitraum auftreten wird der schädliche Einfluss der nichtlinearen Luftfeder (Verstimmung der optimalen Eigenfrequenzen der Flüssigkeitstilger 2 und 3) womöglich nur geringfügig vorhanden sein. Diese Annahme wird im Zuge der numerischen Simulationen bestätigt, wie in der Abb. 7.9 illustriert.

7.3.1 Ergebnisse der numerischen Simulation des einfeldrigen Brückenträgers mit hoher Torsionssteifigkeit

Die folgenden numerischen Ergebnisse werden unter Verwendung der in Gl. (7-4) angegebene optimalen Entwurfparameter mit Hilfe Matlab 6.5 errechnet. Die gesamten numerischen Simulationen werden unter Betrachtung des nichtlinearen Modellverhaltens durchgeführt. Die äquivalenten turbulenten Dämpfungsterme errechnen sich dabei aus Gl. (3-60) zu $\delta_{L1} = 1.12$, $\delta_{L2} = 1.40$ und $\delta_{L3} = 1.40$, wobei für die maximalen Schwingungsamplituden der Flüssigkeitstilger $U_{\max,1} = 110 \text{ mm}$, $U_{\max,2} = U_{\max,3} = 80 \text{ mm}$ abgeschätzt wurden. Das Ausschwingverhalten der Brücke mit und ohne Wirkung der Flüssigkeitstilger in nichtlinearer Modellierung, horizontale Verschiebung $v(t, x = l/2)$, ist in der Abb. 7.5 dargestellt. Es zeigt sich eine wesentliche Verkürzung des Ausschwingverhaltens der Brücke mit optimierten Flüssigkeitstilgern. Während die Brücke ohne Flüssigkeitstilger nahezu 100 s benötigt um die, zufolge Windanregung, induzierte Schwingungsenergie zu dissipieren, benötigt die Brücke mit Flüssigkeitstilgern weniger als 20 s .

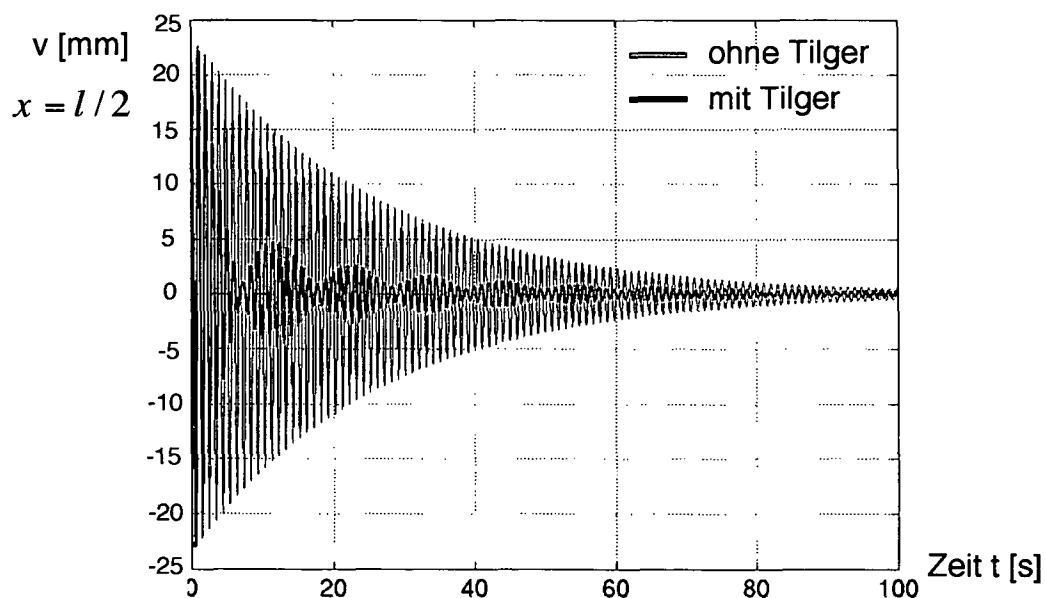


Abb. 7.5: Ausschwingverhalten der Brücke mit und ohne Flüssigkeitstilger; horizontale Verschiebung $v(t, x = l/2)$; nichtlineares Modellverhalten; turbulente Dämpfungsterme $\delta_{L1} = 1.12$, $\delta_{L2} = 1.40$ und $\delta_{L3} = 1.40$

Ergänzend ist in der Abb.7.6 noch das Ausschwingverhalten der Brücke mit und ohne Wirkung der Flüssigkeitstilger in nichtlinearer Modellierung, Verdrehung $\vartheta(t, x = l/2)$, illustriert.

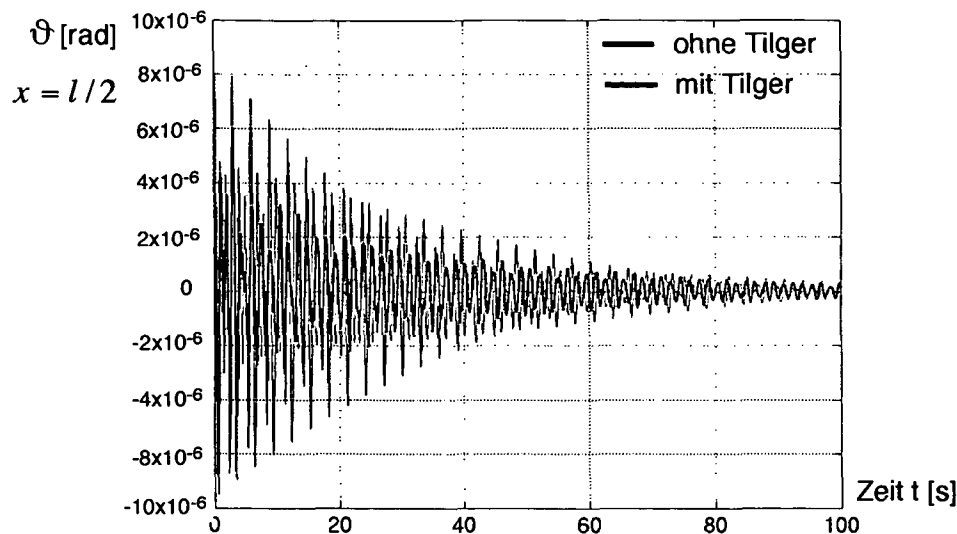


Abb.7.6: Ausschwingverhalten der Brücke mit und ohne Flüssigkeitstilger; Verdrehung $\vartheta(t, x = l/2)$; nichtlineares Modellverhalten; turbulente Dämpfungsterme $\delta_{L1} = 1.12$, $\delta_{L2} = 1.40$ und $\delta_{L3} = 1.40$

Aus der Abb.7.6 erkennt man, dass zufolge der Kopplung von Biege- und Drehschwingung auch die Verdrehung $\vartheta(t)$ der Brücke mit Flüssigkeitstilger ein wesentlich rascheres Abklingverhalten aufweist. Die optimierten Flüssigkeitstilger zeigen somit sowohl auf die horizontale Verschiebung $v(t)$ als auch auf die Verdrehung $\vartheta(t)$ einen äußerst positiven Effekt. Die Darstellung des Ausschwingverhaltens der vertikalen Verschiebung $w(t, x = l/2)$ entfällt hier. Die installierten Flüssigkeitstilger zeigen nämlich weder positive noch negative Auswirkungen.

Die bisher dargelegten numerischen Ergebnisse beziehen sich auf die diskrete Stelle $x = l/2$ des Brückenträgers. In weiterer Folge soll noch die Stelle $x = l/4$ betrachtet werden. Das entsprechende Ausschwingverhalten der Brücke mit und ohne Wirkung der Flüssigkeitstilger in nichtlinearer Modellierung, horizontale Verschiebung $v(t, x = l/4)$, ist in Abb. 7.7 illustriert. Die Abb. 7.7 zeigt wiederum ein wesentlich rascheres Abklingen der freien Schwingungsantwort der Brücke mit Flüssigkeitstilger.

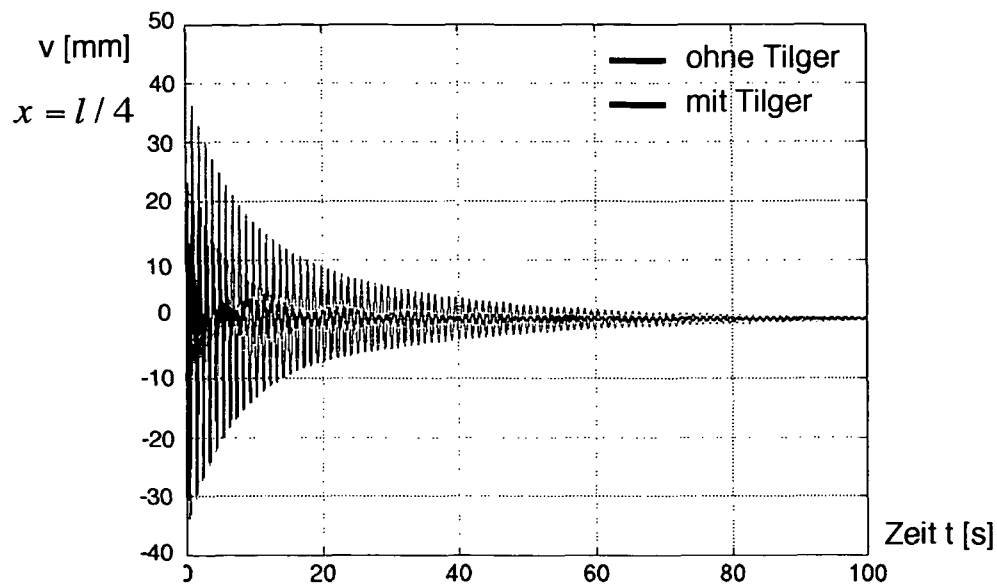


Abb. 7.7: Ausschwingverhalten der Brücke mit und ohne Flüssigkeitstilger; horizontale Verschiebung $v(t, x = l/4)$; nichtlineares Modellverhalten; turbulente Dämpfungsterme $\delta_{L1} = 1.12$, $\delta_{L2} = 1.40$ und $\delta_{L3} = 1.40$

In der Abb. 7.8 ist noch das Ausschwingverhalten der Brücke mit und ohne Wirkung der Flüssigkeitstilger in nichtlinearer Modellierung, Verdrehung $\vartheta(t, x = l/4)$, dargestellt.

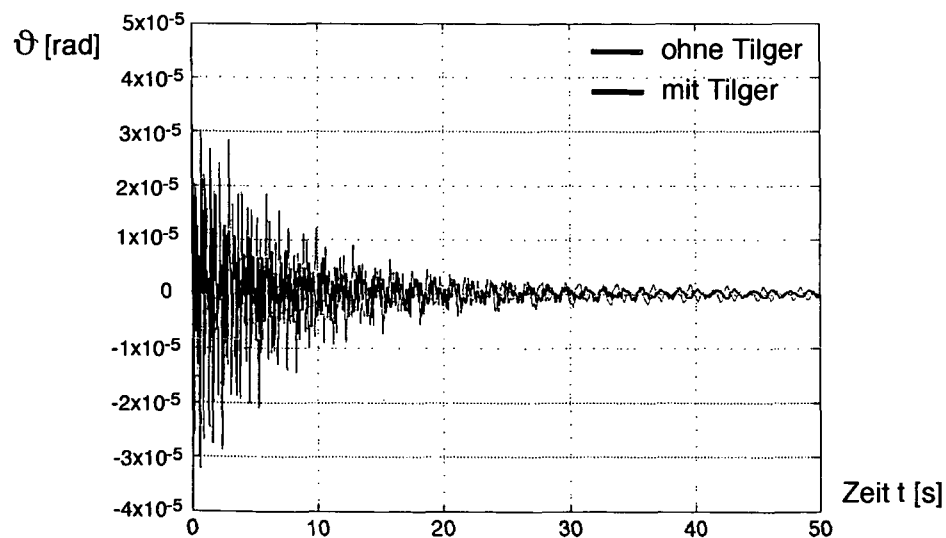


Abb. 7.8: Ausschwingverhalten der Brücke mit und ohne Flüssigkeitstilger; Verdrehung $\vartheta(t, x = l/4)$; nichtlineares Modellverhalten; turbulente Dämpfungsterme $\delta_{L1} = 0.67$, $\delta_{L2} = 1.40$ und $\delta_{L3} = 1.12$

Anhand der vorgelegten numerischen Ergebnisse erkennt man, dass die installierten, optimal abgestimmten Flüssigkeitstilger, zu einem wesentlich rascheren Abklingen der freien Schwingungsantwort sowohl der horizontalen Verschiebung $v(t)$ als auch der Verdrehungen $\vartheta(t)$ der Brücke führen. Das Ausschwingverhalten der zufolge Windanregung in einem Anfangszustand \bar{z}_0 befindlichen Brücke, wird somit durch Installation von drei Flüssigkeitstilgern erfolgreich und wirtschaftlich verbessert.

Abschließend ist in der Abb. 7.9 noch ein Vergleich des Ausschwingverhaltens der Brücke mit Flüssigkeitstilgern, horizontale Verschiebung $v(t, x = l/2)$, mit und ohne Berücksichtigung des nichtlinearen Effektes der Luftfeder illustriert. Es zeigt sich, dass der nichtlineare Effekt der Luftfeder nur geringe schädliche Auswirkungen auf das optimale Dämpfungsverhalten hat. Die Verstimmung der optimierten Entwurfparameter ist somit sehr gering.

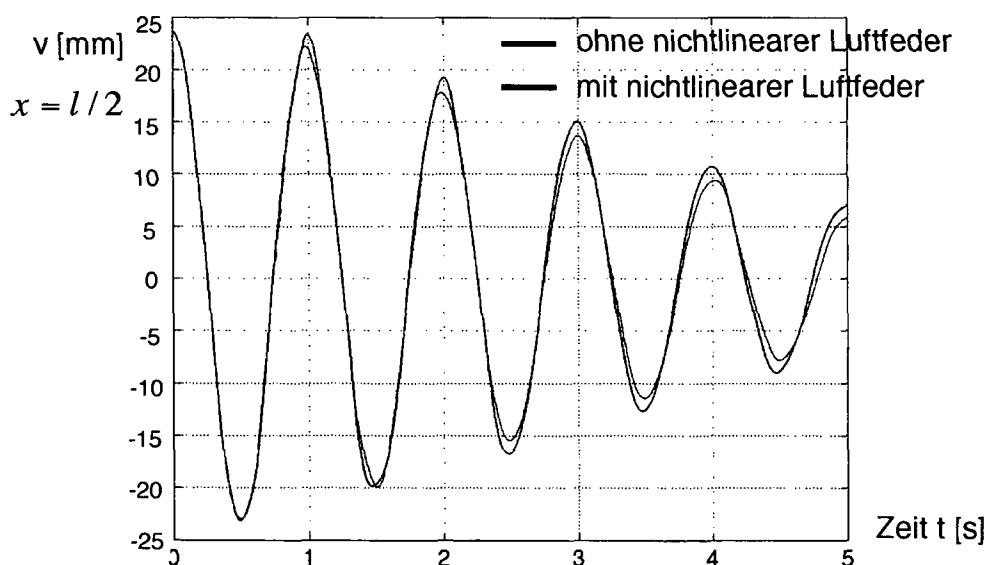


Abb. 7.9: Ausschwingverhalten der Brücke mit und ohne Flüssigkeitstilger; Verdrehung $\vartheta(t, x = l/4)$; nichtlineares Modellverhalten; turbulente Dämpfungsterme $\delta_{L1} = 0.67$, $\delta_{L2} = 1.40$ und $\delta_{L3} = 1.40$

7.4 Numerische Studie eines einfeldrigen Brückenträgers mit geringer Torsionssteifigkeit, Freie Schwingung

Der im Abschnitt 7.3 mit einer hohen Torsionssteifigkeit untersuchte und in Kapitel 6, Abschnitt 6.3, erstmals vorgestellte fiktive Brückenträger wird nun mit dem Ziel, die Torsionssteifigkeit herabzusetzen, modifiziert, wie in der Abb. 7.10 illustriert.

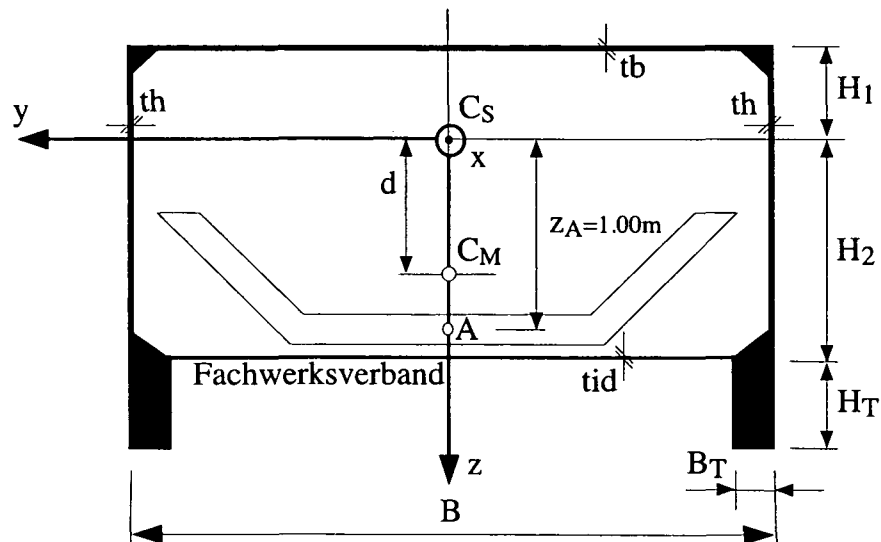


Abb. 7.10: Modifizierter kontinuierlicher Brückenträger mit geringer Torsionssteifigkeit; aufgelöster Kastenquerschnitt

Zu diesem Zweck wird das untere Blech des Kastenträgers zu einem Fachwerksverband aufgelöst. Dieser Verband stellt weiterhin eine Schubsteife Verbindung der einzelnen Bleche dar und kann somit einen Schubfluss übertragen, er übernimmt jedoch keine Normalspannungen, wie von Ramberger⁹ dargelegt. Aufgrund dieser Tatsache werden an der Unterseite des Brückenträgers, links und rechtsseitig, zwei Versteifungsträger mit den Abmessungen $B_T \times H_T$ angeschweißt um die Biegesteifigkeit möglichst „unverändert“ beizubehalten. Zur Reduzierung der freien Schwingungsantwort der Brücke werden wiederum drei Flüssigkeitstilger installiert, wie in Abb. 7.3 illustriert. Ein offenes Profil, dass über einen Fachwerksverband verbunden ist darf weiterhin als ein zusammenhängender Querschnitt behandelt werden, jedoch ohne dass der Verband als Profildicke eingeht. Bei geschlossenen Querschnitten ist es dann zweckmäßig, die vorhandene Schubsteifigkeit in eine ideelle Blechdicke t_{id} gleicher Schubsteifigkeit umzurechnen und nur dort zu berücksichtigen, wo die Verschiebung infolge Schubnachgiebigkeit

eingeht, wie z.B. im Torsionsträgheitsmoment I_T . Zur Ermittlung der ideellen Blechdicke t_{id} wird die Verschiebung eines Fachwerkfeldes zufolge einer Querkraft gleichgesetzt der Verschiebung des Blechfeldes mit den selben geometrischen Abmessungen und der Dicke t_{id} unter der selben Querkraft, wie von Ramberger [9] ausgeführt,

$$t_{id} = 2(1 + \nu) \frac{L_1 L_2}{\frac{D^3}{A_D} + \frac{L_2^3}{A_V}} \quad (7-7)$$

In Gl. (7-7) bezeichnen ν die Querdehnungszahl von Stahl, L_1 und L_2 definieren den Längs- und Querabstand der einzelnen Fachwerkstreben und D ist die Länge der Diagonalstrebe. A_D und A_V bezeichnen weiters die Querschnittsflächen der Diagonal- und Vertikalstreben, wie im Grundriss der Abb. 7.11 illustriert.

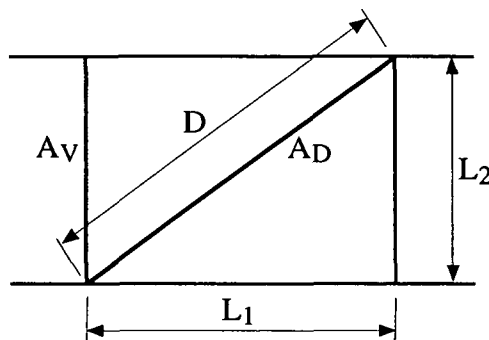


Abb. 7.11: Grundriss des einfachen Strebenfachwerk, Querschnittsflächen A_D und A_V

Die im Hinblick auf eine geringe Torsionssteifigkeit gewählten Parameter und daraus errechneten Querschnittswerte des betrachteten Brückenträgers, Abb. 7.10, sind in der Tabelle 7.1 gelistet.

Tabelle 7.1: Parameter des einfeldrigen Brückenträgers mit geringer Torsionssteifigkeit

Elastizitätsmodul E [N/m^2]	2.1×10^{11}	Querdehnungszahl ν []	0.30
Schubmodul G [N/m^2]	0.808×10^{11}	Stahlfläche A [m^2]	0.33
Breite B [m]	3.65	Höhe H_1 [m]	0.22
Höhe H_2 [m]	1.28	Blechdicke t_b [m]	4.0×10^{-2}

Blechdicke t_h [m]	2.0×10^{-2}	Abstand d [m]	0.72
Breite B_T [m]	0.20	Höhe H_T [m]	0.30
Strebenabstand L_1 [m]	0.70	Strebenabstand L_2 [m]	3.65
Strebenquerschnitt A_D [m ²]	1.5×10^{-3}	Strebenquerschnitt A_V [m ²]	1.5×10^{-3}
Strebenlänge D [m]	3.72	Ideelle Blechdecke t_{id} [m]	1.01×10^{-4}
Trägheitsmoment J_y [m ⁴]	0.210	Trägheitsmoment J_z [m ⁴]	0.620
polares Trägheitsm. I_0 [m ⁴]	0.650	Wölbmoment $A_{\varphi\varphi}$ [m ⁶]	0.16
Torsionsträgheitsm. J_T [m ⁴]	0.0033	Dichte von Stahl ρ [kg/m ³]	7850
Anm.: Torsionsträgheitsmoment und Wölbmoment ist eine Definition für dünnwandige Querschnitte			

In der Tabelle 7.1 ist das Torsionsträgheitsmoment des modifizierten Brückenträgers mit $J_T = 0.0033 \text{ m}^4$ gelistet. Vergleicht man diesen Wert mit jenem des ursprünglichen Kastenquerschnittes, $J_T = 0.2383 \text{ m}^4$ aus Tabelle 6.7, erkennt man die Reduktion um rund 98%. Die in der nachfolgenden numerischen Studie betrachteten Eigenkreisfrequenzen ergeben sich dann mit den Parametern aus Tabelle 7.1, mit den Gln. (4-92) und (4-93) zu,

$$\begin{aligned}
 f_{11} &= \omega_{11} / 2\pi = 0.64 \text{ Hz} , & f_{12} &= \omega_{12} / 2\pi = 0.90 \text{ Hz} , \\
 f_{13} &= \omega_{12} / 2\pi = 1.49 \text{ Hz} , & f_{21} &= \omega_{21} / 2\pi = 2.57 \text{ Hz} .
 \end{aligned}
 \tag{7-8}$$

Die zugehörigen viskosen Dämpfungskoeffizienten der Brücke werden mit $\zeta_{11} = 0.6\%$, $\zeta_{12} = 0.65\%$, $\zeta_{13} = 0.70\%$ und $\zeta_{21} = 0.75\%$ angenommen. Aus der Abb. 7.10 erkennt man, dass eine Kopplung der freien, vertikalen Biegeschwingung mit der Drehschwingung nicht vorhanden ist. Insbesondere werden hier die der Grundfrequenz f_{11} und der dritten Oberfrequenz f_{21} zugehörigen Schwingungsformen als rein vertikale Bewegung der Brücke identifiziert. Dem gegenüber existiert zwischen der freien horizontalen Biegeschwingung und der Drehschwingung sehr wohl eine Kopplung, d.h. es werden gekoppelte Biegedrillschwingungen erwartet. Diese resultiert aus dem doch relativ großen Abstand, $d = 0.72 \text{ m}$, von Schubmittelpunkt C_S und Massenmittelpunkt C_M . Die den Eigenfrequenzen f_{12} und f_{13} zugehörigen Schwingungsformen ergeben sich hier als

eine Kombination von horizontaler und rotatorischer Bewegung. Insbesondere wird darauf hingewiesen, dass die entkoppelte Torsionseigenfrequenz als Folge der Modifizierung des Brückenquerschnittes von dem ursprünglichen Wert $f_{\vartheta} = 12.26 \text{ Hz}$, Gl. (6-44), auf $f_{\vartheta} = 1.07 \text{ Hz}$ reduziert wurde (errechnet mit Hilfe Gl. (4-92)). Dies erlaubt eine detaillierte Untersuchung der Drehschwingung $\vartheta(t)$ in Bezug auf das Abklingverhalten der freien Schwingungsantworten mit und ohne Wirkung von Flüssigkeitstilgern.

Die drei Flüssigkeitstilger werden nun wie folgt abgestimmt: Flüssigkeitstilger 1, installiert an der Stelle $x_1 = l/2$, optimal abgestimmt auf die erste Oberfrequenz $f_{12} = 0.90 \text{ Hz}$; Flüssigkeitstilger 2 und 3, installiert an den Stellen $x_2 = l/4$ und $x_3 = 3l/4$, optimal abgestimmt auf die zweite Oberfrequenz $f_{13} = 1.49 \text{ Hz}$. Das Masseverhältnis wird für alle drei Tilger gleich, mit $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 \approx 0.8\%$ festgelegt, woraus sich die Flüssigkeitsmassen $m_{f1} = m_{f2} = m_{f3} = 1000 \text{ kg}$ ergeben. Die Geometrie wird weiterhin, wie in Tabelle 6.8 gelistet, beibehalten. Die Optimierung der geschlossenen Flüssigkeitstilger mit Luftfeder auf die freie Schwingungsantwort erfolgt nun entsprechend dem in Abschnitt 7.2 dargelegten Verfahren. Da vier Schwingungsformen betrachtet werden ist der Anfangszustandsvektor in Gl. (7-2) mit $\bar{z}_0 = [Y_1^0 \ Y_2^0 \ Y_3^0 \ Y_4^0 \ \dot{Y}_1^0 \ \dot{Y}_2^0 \ \dot{Y}_3^0 \ \dot{Y}_4^0]^T$ vorzugeben. Die Minimumsuche der Zielfunktion $J_0 = J_0(\omega_{A1}, \omega_{A2}, \omega_{A3}, \zeta_{A1}, \zeta_{A2}, \zeta_{A3})$ mit Hilfe Matlab 6.5, Befehl $x = \text{fminsearch}(J_0, \bar{x}_0)$ liefert nach Definition der passend gewählten, durch das Brückenfeld vorgegebenen, Startwerte $\bar{x}_0 = [2\pi f_{12}, 2\pi f_{13}, 2\pi f_{13}, 0.05, 0.05, 0.05]^T$, die folgenden optimalen Entwurfparameter der Flüssigkeitstilger,

$$f_{A1} = \frac{\omega_{A1}}{2\pi} = 0.90 \text{ Hz} , \quad f_{A2} = \frac{\omega_{A2}}{2\pi} = 1.49 \text{ Hz} , \quad f_{A3} = \frac{\omega_{A3}}{2\pi} = 1.44 \text{ Hz}, \quad (7-9)$$

$$\zeta_{A1} = 0.045 , \quad \zeta_{A2} = 0.031 , \quad \zeta_{A3} = 0.03 .$$

Zur praktischen Realisierung der errechneten optimalen Eigenfrequenzen, Gl. (7-9), werden die beiden geneigten Rohrenden wiederum verschlossen. Mit dem

Polytrophenexponenten $n = 1.2$ und dem Ausgangsdruck $p_0 = 10^5 \text{ Pa}$ ergeben sich die erforderlichen Luftfederhöhen aus Gl. (6-20) zu,

$$\begin{aligned}
 H_{L,1} &= \frac{2n p_0}{\rho \omega_{A,1}^2 \Delta L_{eff,1}} = 2.90 \text{ m}, & \Delta L_{eff,1} &= L_{eff,1} - \frac{2g \sin \beta}{\omega_{A,1}^2} = 2.56 \text{ m}, \\
 H_{L,2} &= \frac{2n p_0}{\rho \omega_{A,2}^2 \Delta L_{eff,2}} = 0.97 \text{ m}, & \Delta L_{eff,2} &= L_{eff,2} - \frac{2g \sin \beta}{\omega_{A,2}^2} = 2.84 \text{ m}, \\
 H_{L,3} &= \frac{2n p_0}{\rho \omega_{A,3}^2 \Delta L_{eff,3}} = 1.02 \text{ m}, & \Delta L_{eff,3} &= L_{eff,3} - \frac{2g \sin \beta}{\omega_{A,3}^2} = 2.83 \text{ m}.
 \end{aligned} \tag{7-10}$$

Die entsprechenden Luftvolumina der Flüssigkeitstilger 1 bis 3 sind dann wie folgt festgelegt: $A_H H_{L,1} = 0.96 \text{ m}^3$, $A_H H_{L,2} = 0.32 \text{ m}^3$ und $A_H H_{L,3} = 0.34 \text{ m}^3$. Die maßstäblichen Skizzen der so entworfenen Flüssigkeitstilger sind in den Abb. 7.12 - Abb. 7.14 illustriert.

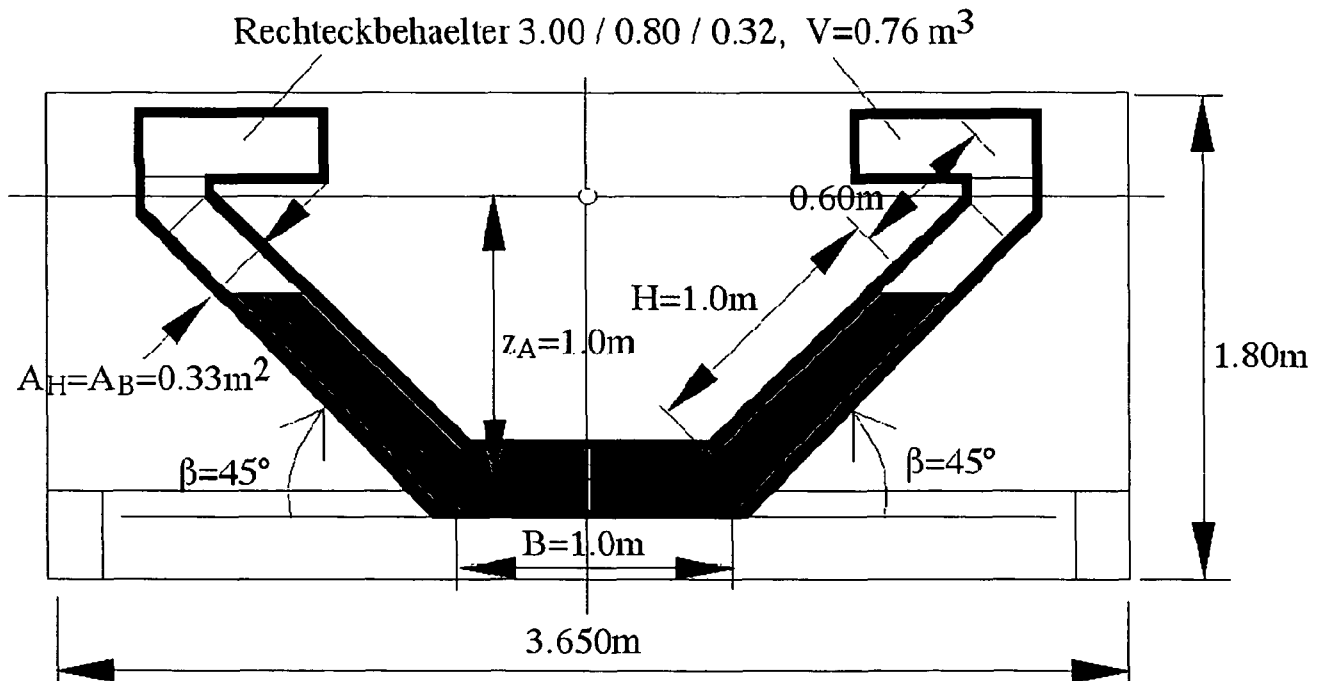


Abb. 7.12: Maßstäbliche Skizze des entworfenen optimal abgestimmten Flüssigkeitstilgers 1 mit Luftfeder, einfeldriger fiktiver Brückenträger; installiert an der Stelle $x_1 = l/2$

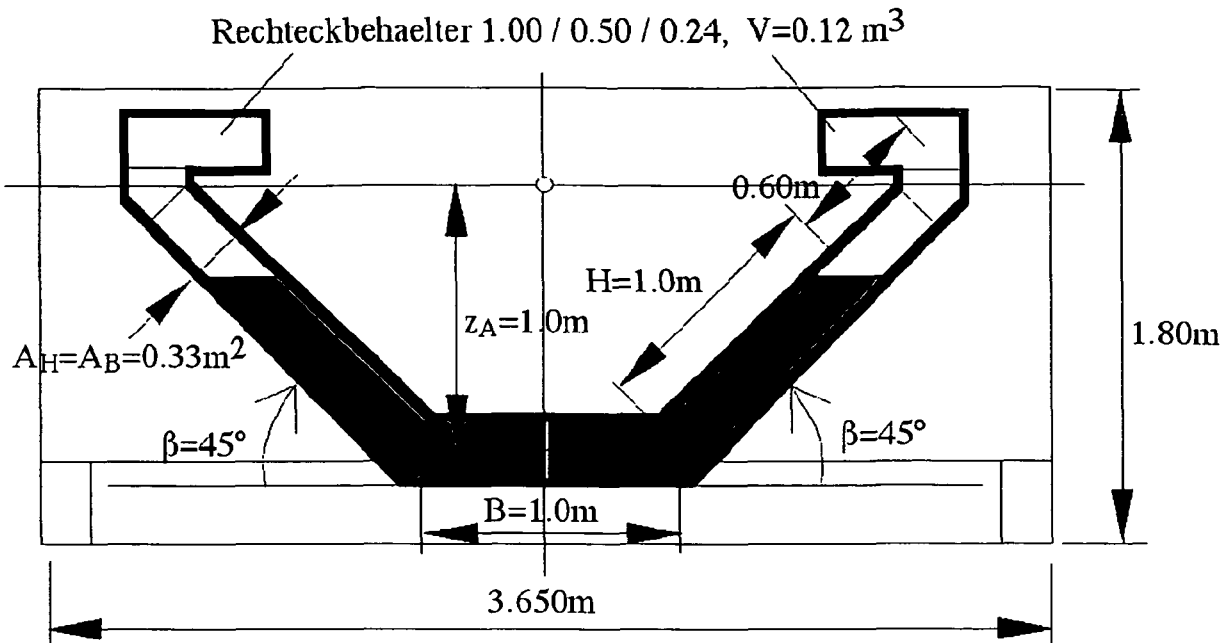


Abb. 7.13: Maßstäbliche Skizze des entworfenen optimal abgestimmten Flüssigkeitstilgers 2 mit Luftfeder, einfeldriger fiktiver Brückenträger; installiert an der Stelle $x_2 = l/4$

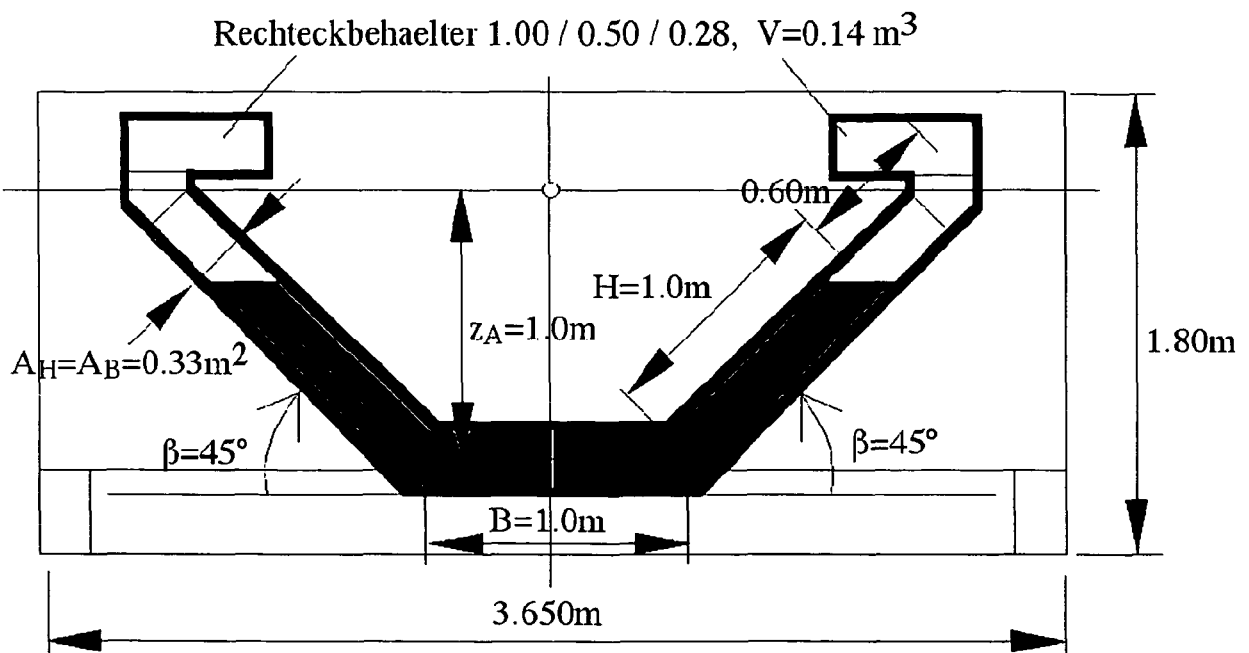


Abb. 7.14: Maßstäbliche Skizze des entworfenen optimal abgestimmten Flüssigkeitstilgers 3 mit Luftfeder, einfeldriger fiktiver Brückenträger; installiert an der Stelle $x_3 = 3l/4$

7.4.1 Ergebnisse der numerischen Simulation des einfeldrigen Brückenträgers mit geringer Torsionssteifigkeit

Das zeitliche Ausschwingverhalten der Brücke mit und ohne Wirkung der Flüssigkeitstilger in nichtlinearer Modellierung, horizontale Verschiebung $v(t, x = l/2)$, ist in der Abb. 7.15 illustriert. Die turbulenten Dämpfungsterme $\delta_{L1} = 0.42$, $\delta_{L2} = 0.81$ und $\delta_{L3} = 0.79$ ergeben sich dabei mit Gl. (3-60) und den maximalen Schwingungsamplituden $U_{1,\max} = 250\text{ mm}$ und $U_{2,\max} = U_{3,\max} = 90\text{ mm}$. Letztere ergeben sich wiederum aus einer numerischen Simulation der Brücke mit linearisierten Flüssigkeitstilgern.

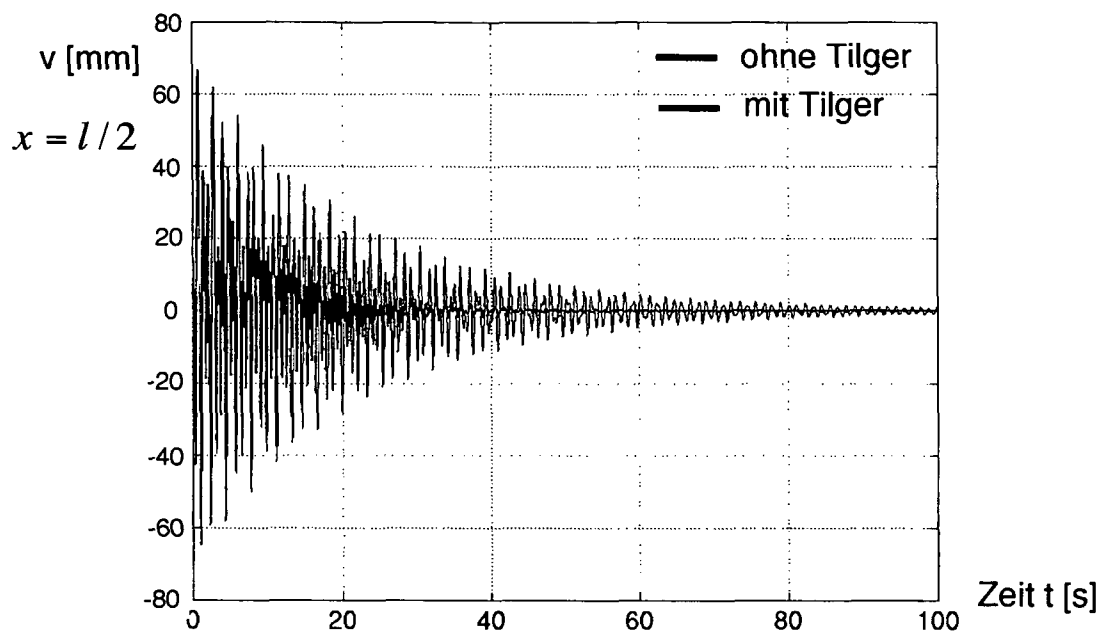


Abb. 7.15: Ausschwingverhalten der Brücke mit und ohne Flüssigkeitstilger; horizontale Verschiebung $v(t, x = l/2)$; nichtlineares Modellverhalten; turbulente Dämpfungsterme $\delta_{L1} = 0.42$, $\delta_{L2} = 0.81$ und $\delta_{L3} = 0.79$

Man erkennt eine deutliche Verkürzung des Ausschwingverhaltens zufolge der optimierten Flüssigkeitstilger. In der Abb. 7.16 ist weiters das zeitliche Ausschwingverhalten der Brücke mit und ohne Wirkung der Flüssigkeitstilger in nichtlinearer Modellierung, Verdrehung $\vartheta(t, x = l/2)$ illustriert.

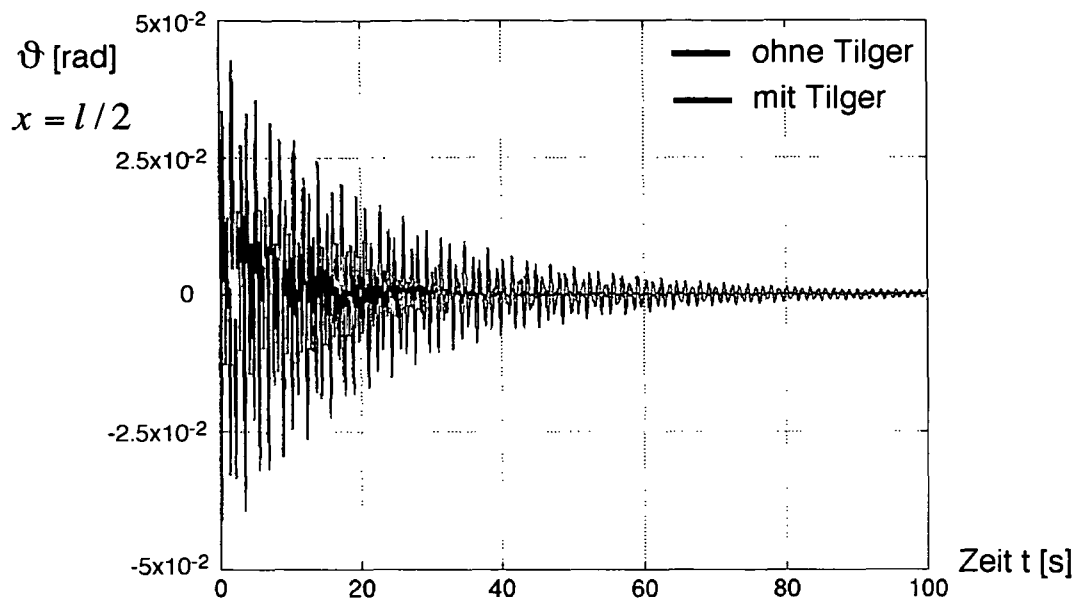


Abb. 7.16: Ausschwingverhalten der Brücke mit und ohne Flüssigkeitstilger; Verdrehung $\vartheta(t, x = l/2)$; nichtlineares Modellverhalten; turbulente Dämpfungsterme $\delta_{L1} = 0.42$, $\delta_{L2} = 0.81$ und $\delta_{L3} = 0.79$;

Die Abb. 7.16 zeigt ein wesentlich rascheres Abklingverhalten der Verdrehung $\vartheta(t)$ der Brücke zufolge der installierten Flüssigkeitstilger. Insbesondere die Drehschwingung führt bei Widerregung sehr oft zu einem instabilen Verhalten einer Brücke, wie es nach Larsen [6] für die Tacoma Narrows Bridge vermutet wird. Es gilt daher, eine zufolge Widerregung induzierte Anfangsverdrehung der Brücke möglichst rasch wieder abklingen zu lassen. Dies wird durch Installation der Flüssigkeitstilger erfolgreich bewerkstelligt. Durch die Installation der optimierten Flüssigkeitstilger wird aus Abb. 7.16, unter der groben Voraussetzung einer von der Biegeschwingung entkoppelten Torsionsschwingung, die Verdreifachung der Torsionssystemdämpfung, nämlich von $\zeta_s = 0.6\%$ auf rund $\zeta_{res} = 1.7\%$, abgelesen. Das logarithmische Dekrement, $\delta_k = \ln(\vartheta_n / \vartheta_{n+k})$, über k Schwingungszyklen ist dabei zu ermitteln, wie z.B. in Clough und Penzien¹⁰ [Seite 47] beschrieben.

In weiterer Folge wird das zeitliche Ausschwingverhalten der Brücke mit und ohne Wirkung der Flüssigkeitstilger in nichtlinearer Modellierung, horizontale Verschiebung $v(t, x = l/4)$, betrachtet, wie in Abb. 7.17 dargestellt.

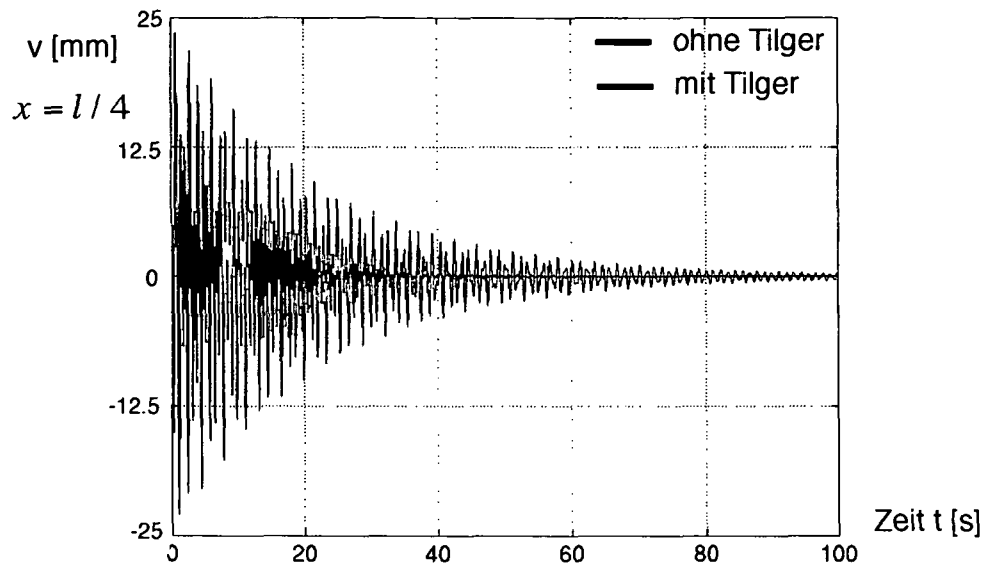


Abb. 7.17: Ausschwingverhalten der Brücke mit und ohne Flüssigkeitstilger; horizontale Verschiebung $v(t, x = l/4)$; nichtlineares Modellverhalten; turbulente Dämpfungsterme $\delta_{L1} = 0.42$, $\delta_{L2} = 0.81$ und $\delta_{L3} = 0.79$

Abschließend ist in der Abb. 7.18 das zeitliche Ausschwingverhalten der Brücke mit und ohne Wirkung der Flüssigkeitstilger in nichtlinearer Modellierung, Verdrehung $\vartheta(t, x = l/4)$, illustriert.

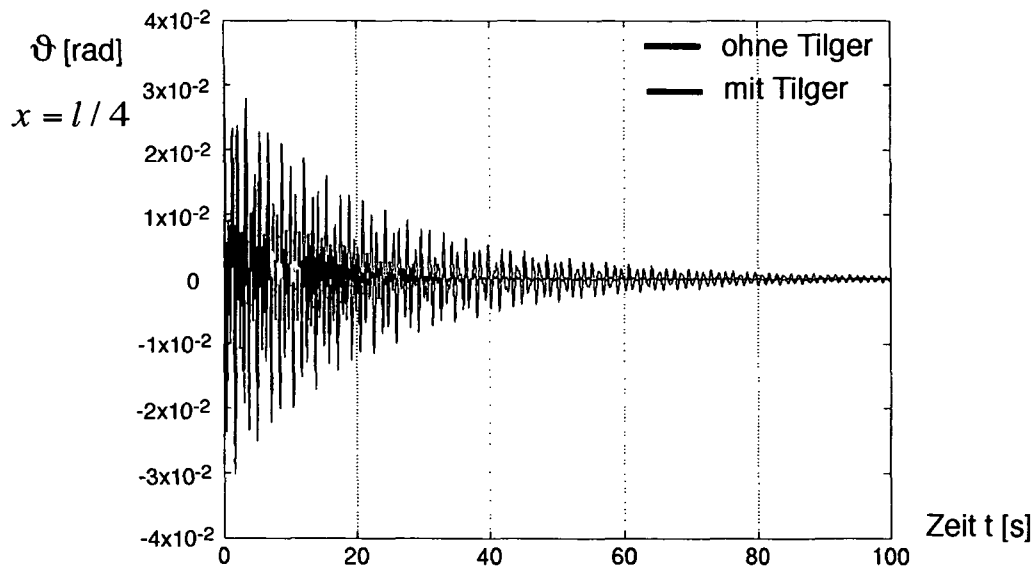


Abb. 7.18: Ausschwingverhalten der Brücke mit und ohne Flüssigkeitstilger; Verdrehung $\vartheta(t, x = l/4)$; nichtlineares Modellverhalten; turbulente Dämpfungsterme $\delta_{L1} = 0.42$, $\delta_{L2} = 0.81$ und $\delta_{L3} = 0.79$

Sowohl die Abb. 7.17 als auch die Abb. 7.18 zeigen ein wesentlich rascheres Abklingverhalten der horizontalen Verschiebung $v(t, x = l/4)$ und der Verdrehung $\vartheta(t, x = l/4)$ mit Wirkung der Flüssigkeitstilger. Es kann daraus gefolgert werden, dass auch im Falle einer niedrigen Torsionssteifigkeit, d.h. dort wo Drehschwingungsformen im niederfrequenten Bereich auftreten, das Ausschwingverhalten einer Brücke durch Installation von drei optimierten Flüssigkeitstilgern erfolgreich und wirtschaftlich verbessert wird. Insbesondere errechnet sich die zur Beurteilung der Schwingungsanfälligkeit von elastischen Strukturen gegebene Scruton-Zahl, Gl. (5-17), mit der resultierenden Dämpfung $\zeta_{res} = 1.7\%$ aus Abb. 7.16, zu $Sc = 137$, d.h. sie liegt weit über dem kritischen Wert ($Sc = 25$, wie in Petersen [4, Seite 75] angegeben).

LITERATUR

- ¹ Petersen, C., 1996, 'Dynamik der Baukonstruktionen', Friedr. Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft mbH, Braunschweig / Wiesbaden.
- ² Ziegler, F., 1998, 'Technische Mechanik der festen und flüssigen Körper', Dritte, verbesserte Auflage, Springer Wien New York.
- ³ Sockel, H., 1984, 'Aerodynamik der Bauwerke', Friedr. Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft mbH, Braunschweig.
- ⁴ Petersen, C., 2001, 'Schwingungsdämpfer im Ingenieurbau', 1. Auflage, München, Maurer Söhne GmbH & Co. KG.
- ⁵ Starossek, U., 1992, 'Brückendynamik, Winderregte Schwingungen von Seilbrücken', Friedr. Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft mbH, Braunschweig / Wiesbaden.
- ⁶ Larsen, A., 2000, 'Aerodynamics of the Tacoma Narrows Bridge – 60 Years Later', Structural Engineering International, Vol. 10, No. 4, p. 243 – 248.
- ⁷ Müller, P.C., Schiehlen, W.O., 1976, 'Lineare Schwingungen', Theoretische Behandlung von mehrfachen Schwingern, Akademische Verlagsgesellschaft, Wiesbaden.
- ⁸ Hochrainer, M.J., 2001, 'Control of vibrations of civil engineering structures with special emphasis on tall buildings', Dissertation, Vienna University of Technology, ausgeführt am Institut für Allgemeine Mechanik (E201), TU-Wien, A-1040 Wien.
- ⁹ Ramberger, G., 2002, 'Skriptum zur Vorlesung Stahlbau 2', erhältlich am Institut für Stahlbau (E213), TU-Wien, A-1040 Wien.
- ¹⁰ Clough, R.W., Penzien, J., 1975, 'Dynamic of Structures', McGraw-Hill Book Company.

Gesamtliteraturliste

Abramson, H.N., 1966, 'The dynamic behavior of liquids in moving containers', NASA SP-106. [Seite 28]

Adam, C., Heuer, R. und Druml, A., 1997, 'Biegedrillschwingung elastischer kontinuierlicher Träger mit offenem, einfach symmetrischen Querschnitt', in: Österreichische Ingenieur- und Architekten-Zeitschrift (ÖIAZ), 142. Jg., Heft 3/1997, S. 175-179. [Seite 159]

Alfriend, K.T., 1974, 'Partially Filled Viscous Ring Nutation Damper', Journal of Spacecraft, Vol.11, No.7, p. 456-462. [Seite 27, 28]

Bachmann, H., 1988, 'Schwingungsprobleme bei Fußgängerbauwerken', Bauingenieur 63, S. 67 – 75. [Seite 134]

Bachmann, H., 1995, 'Erdbebensicherung von Bauwerken', Birkhäuser Verlag, Basel-Boston-Berlin. [Seite 159]

Bachmann et al., 1995, 'Vibration Problems in Structures', Practical Guidelines, Birkhäuser Verlag, Basel. [Seite 234, 235, 240, 243]

Bachmann, H., Ammann, W., 1987, 'Schwingungsprobleme bei Bauwerken', Durch Menschen und Maschinen induzierte Schwingungen, Structural Engineering Documents, IABSE-AIPC-IVBH. [Seite 232, 234, 236, 238, 239, 241, 242, 243, 245]

Balendra, T. Wang, C.M., Cheong, H.F., 1995, 'Effectiveness of tuned liquid column dampers for vibration control of towers', Engineering Structures, Vol.17, p. 668-675. [Seite 31, 54]

Balendra, T., Wang, C.M., Rakesh, G., 1999, 'Vibration control of various types of buildings using TLCD', Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics, 83, p. 197-208. [Seite 32]

Balendra, T., Wang, C.M., Yan, N., 2001, 'Control of wind-excited towers by active tuned liquid column damper', Engineering Structures, 23, p. 1054-1067. [Seite 32]

Bauer, H.F., 1984, 'Oscillation of immiscible liquids in a rectangular container: A new damper for excited structures', Journal of Sound and Vibration 93, p. 117-133. [Seite 29]

Baumann, K., Bachmann, H., 1988, 'Durch Menschen verursachte dynamische Lasten und deren Auswirkungen auf Balkentragwerke', Institut für Baustatik und Konstruktion ETH Zürich, Bericht Nr. 7501-3, Birkhäuser Verlag Basel. [Seite 232]

Blachman, N., 1992, 'Mathematica: A Practical Approach', Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey. [Seite 87]

Blevins, R.D., 1979, 'Formulas For Natural Frequency And Mode Shape', Van Nostrand Reinhold Company, New York. [Seite 300]

Blevins, R.D., 1992, 'Applied Fluid Dynamics Handbook, reprint, Krieger Publ., New York. [Seite 62]

Bogoljubow, N.N., Mitropolsky, Y.A., 1961, 'Asymptotic Methods in the Theory of Non-Linear Oscillations', Hindustan Publishing Corpn. (India); Dehli-6, Gordon&Breach, Science Publisher, Inc., New York. [Seite 79]

* Die in der eckigen Klammer angeführte Seitennummer bezieht sich immer auf die jeweilige Seitenzahl der Dissertation

Bronstein, I.N., Semendjajew, K.A., Musiol, G., Mühlig, H., 1977, 'Taschenbuch der Mathematik', 1. Auflage, Verlag Harri Deutsch, Thun und Frankfurt am Main. [Seite 168, 186, 193]

Brunner, A., 1964, 'Amortisseur d'oscillation hydraulique pour cheminees. Societe' Hydrotechnique de France, Journees de l'Hydraulique VIII, Rapp. 5 / p. 1-7. [Seite 28, 29]

Carrier, G.F., Miles, J.W., 1960, 'On the Annular Damper for a Freely Precessing Gyroscope', Journal of Applied Mechanics, Vol.27, p. 237-240. [Seite 27]

Chang, C.C., Hsu, C.T., 1998, 'Control performance of liquid column vibration absorbers', Engineering Structures, Vol.20, No.7, p. 580-586. [Seite 33]

Chopra, A.K., 1995, 'Dynamics of Structures', Theory and Application to Earthquake Engineering, Prentice Hall International, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey. [Seite 83]

Chwalla, K., 1950, 'Über die gekoppelten Biegungs- und Torsionsschwingungen belasteter Stäbe mit offenem einfachsymmetrischen Querschnitt', Österreichische Bauzeitschrift, Nr.5 (1950), S.60-64, 79-83. [Seite 159]

Clough, R.W., Penzien, J., 1975, 'Dynamic of Structures', McGraw-Hill Book Company. [Seite 4, 7, 8, 11, 107, 343]

Dallard, P., Fitzpatrick, A.J., Flint, A., Le Bourva, S., Low, A., Ridsdill, R.M., Willford, M., et al., 2001, 'The London Millenium Footbridge', The Structural Engineer, Vol. 79, No. 22, p. 17-34. [Seite 246, 267, 268, 269, 271, 285, 288, 293]

Dallard, P., Fitzpatrick, T., Flint, A., Low, A., Smith, R.R., Willford, M., Roche, M., 2001, 'London Millenium Bridge: Pedestrian – Induced Lateral Vibration', Journal of Bridge Engineering, p. 412-417. [Seite 248]

Den Hartog, J.P., 1936, 'Mechanische Schwingungen', Verlag von Julius Springer, Berlin. [Seite 1, 14, 15, 17, 19, 26, 89, 113]

Druml, A., 1996, 'Biegedrillschwingungen elastischer kontinuierlicher Balkentragwerke – ein analytischen Näherungsverfahren', Diplomarbeit, Institut für Allgemeine Mechanik (E201), TU-Wien, A-1040 Wien. [Seite 164]

Eibl, J., Henseleit, O., Schlüter, F.,H., 1988, 'Baudynamik', Taschenbuch für Beton-, Stahlbeton- und Spannbetonbau sowie die verwandten Fächer, Teil II, 77. Jahrgang, Ernst & Sohn, Verlag für Architektur und technische Wissenschaften. [Seite 238]

Feng, M.Q., Kim, J.M., Shinozuka, M., Purasinghe, R., 'Viscoelastic Dampers at Expansion Joints for Seismic Protection of Bridges', Journal of Bridge Engineering, Vol.5, No.1, p. 67-74. [Seite 41]

Fink, J., 1992, 'Dynamische und aeroelastische Stabilitätsuntersuchung der Ausfachungsstäbe von Hochspannungsmasten', Dissertation, Institut für Stahlbau (E213), TU-Wien, A-1040 Wien. [Seite 159]

Fitzpatrick, T., Dallard, P., Le Bourva, S., Low, A., Smith, R.R., Willford, M., 2001, 'Linking London: The Millennium Bridge', Published by The Royal Academy of Engineering, Westminster London. [Seite 41, 266]

Frahm, H., 1911, 'Neuartige Schlingertanks zur Abdämpfung von Schiffsrollbewegungen, Theoretischer Teil', Jahrbuch schiffsbautechnische Gesellschaft 12, S. 351-365. [Seite 26]

Fried, E., Idelchik, I.E., 1989, 'Flow Resistance: a Design Guide for Engineers, Hemisphere, New York. [Seite 62]

Fujii, K., Tamura, Y., Sato, T., Wakahara, T., 1988, 'Wind-induced vibration of tower and practical applications of tuned sloshing damper', *Journal of Wind Engineering*, 37, p. 537 – 546. [Seite 29]

Fujino, Y., Pacheco, B.M., Chaiseri, P., Sun, L.M., 1988, 'Parametric studies on tuned liquid damper (TLD) using circular containers by free-oscillation experiment', *JSCE, Journal of Structural Engineering and Earthquake Engineering*, 5(1), p. 381-391. [Seite 29]

Gao, H., Kwok, K.C.S., Samali, B., 1997, 'Optimization of tuned liquid column dampers', *Engineering Structures*, Vol.19, No.6, p. 476-486. [Seite 32]

Hagedorn, P., 1987, 'Nichtlinearitäten in der Schwingungstechnik: Einige Probleme und Lösungswege', In: *Dynamische Probleme - Modellierung und Wirklichkeit* (Natke, H.G., Popp, K., Hrsg.), Hannover: Mitteilung des Curt-Risch-Instituts, S. 1-22. [Seite 28]

Hahnkamm, E., 1932, 'Untersuchung über das reibungs- und trägheitsgekoppelte Schwingungssystem Schiff und Schlingertank', *Ing.-Archiv* 3, S. 251-276. [Seite 27]

Heymann, J., Lingener, A., 1986, 'Messverfahren der experimentellen Mechanik', Springer Verlag, Berlin. [Seite 213]

Hirsch, G., 1981, 'Kontrolle der wind- und erdbebenenerregten Schwingungen weitgespannter Schrägseilbrücken', in: *VDI-Berichte Nr. 419*, S. 101-109. Düsseldorf: VDI-Verlag. [Seite 42]

Hitchcock, P.A., Kwok, K.C.S., Watkins, R.D., Samali, B., 1997, 'Characteristics of liquid column vibration absorbers (LCVA-I)', *Engineering Structures*, Vol.19, No.2, p. 126-134. [Seite 33]

Hitchcock, P.A., Kwok, K.C.S., Watkins, R.D., Samali, B., 1997, 'Characteristics of liquid column vibration absorbers (LCVA-II)', *Engineering Structures*, Vol.19, No.2, p. 135-144. [Seite 33]

Hochrainer, M.J., 2001, 'Control of vibrations of civil engineering structures with special emphasis on tall buildings', Dissertation, Vienna University of Technology, ausgeführt am Institut für Allgemeine Mechanik (E201), TU-Wien, A-1040 Wien. [Seite 22, 31, 35, 36, 54, 65, 66, 68, 69, 89, 90, 111, 112, 113, 114, 116, 124, 328]

Hoffmann, J., 1998, 'Taschenbuch der Messtechnik', Fachbuchverlag Leipzig im Carl Hanser Verlag, Leipzig, S. 192. [Seite 106]

Holl, H.J., Irschik, H., 1996, 'Ein Mehrzweck-Versuchsaufbau zum Studium von Schwingern mit zwei Freiheitsgraden, parametererregter Schwingungen und der Schwingungstilgung', *Österreichische Ingenieur- und Architekten-Zeitschrift (ÖIAZ)*, 141. Jg., Heft 4/1996, S. 153-156. [Seite 81]

Holmes, J.D., 1995, 'Listing of installations', Elsevier Science Ltd., Printed in Great Britain, p. 676-678. [Seite 30]

Hruska, A., 1999, 'Elastische Rahmentragwerke mit U-rohrförmigen Flüssigkeitsdämpfern – eine computergesteuerte Modelluntersuchung', Diplomarbeit, Institut für Allgemeine Mechanik (E201), TU-Wien, A-1040 Wien. [Seite 35]

Ibrahim, R.A., Pilipchuk, V.N., Ikeda, T., 2001, 'Recent Advances in Liquid Sloshing Dynamics', *Applied Mechanics Reviews*, 54(2), p. 133-199. [Seite 29]

Idelchik, I.E., 1960, 'Handbook of Hydraulic Resistance', Coefficient of Local Resistance and of Friction, Available from the U.S. Department of Commerce, Springfield. [Seite 62, 64]

Kareem, A., Sun, W.J., 1987, 'Stochastic response of structures with fluid-containing appendages', *Journal of Sound and Vibration*, 119(3), p. 389-408. [Seite 29]

Klöppel, K., Thiele, F., 1967, 'Modellversuche im Windkanal zur Bemessung von Brücken gegen die Gefahr winderregter Schwingungen', *Der Stahlbau*, Heft 12, Berlin, 36. Jahrgang, S. 353-365. [Seite 46]

Klotter, K., 1978, 'Technische Schwingungslehre', Erster Band: Einfache Schwinger, Dritte, völlig neubearbeitete und erweiterte Auflage, Teil A: Lineare Schwinger, Springer Verlag Berlin Heidelberg New York. [Seite 55, 77, 78, 79, 80, 81]

Klotter, K., 1980, 'Technische Schwingungslehre', Erster Band: Einfache Schwinger, Teil B: Nichtlineare Schwingungen, Dritte Auflage, Springer Verlag Berlin. [Seite 251]

Kofler, M., 2000, 'Eine experimentelle und numerische Modelluntersuchung von ebenen Rahmentragwerken mit U-rohrförmigen Flüssigkeitsdämpfer', Diplomarbeit, Institut für Allgemeine Mechanik (E201), TU-Wien, A-1040 Wien. [Seite 35]

Kotowski, G., 1943, 'Lösung der inhomogenen Mathieu'schen Differentialgleichung mit periodischen Störfunktionen beliebiger Frequenz (mit besonderer Berücksichtigung der Resonanzlösung)', *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik (ZAMM)*, Bd.23, Nr.4, S. 213-229. [Seite 81]

Kubo, K. et al., 1989, 'On pitching vibration control by using liquid sloshing', in *Proc. 44th JSCE annual meeting*, Vol. 1, p. 730-731, (in Japanese). [Seite 29, 47]

Larsen, A., 2000, 'Aerodynamics of the Tacoma Narrows Bridge – 60 Years Later', *Structural Engineering International*, Vol. 10, No. 4, p. 243 – 248. [Seite 325, 343]

Larsen, A., Svenson, E., Anderson, H., 1995, 'Design aspects of tuned mass dampers for the Great Belt East Bridge approach spans', *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics* 54/55, p. 413-426. [Seite 45]

Lin, Y.Y., Cheng, C.M., Lee, C.H., 2000, 'A tuned mass damper for suppressing the coupled flexural and torsional buffeting response of long-span bridges', *Engineering Structures*, 22, p. 1195-1204. [Seite 46]

Lou, J.Y.K., Lutes, L.D., Li, J.J., 1994, 'Active tuned liquid damper for structural control', 1st World Conference on Structural Control, 3-5 August 1994, Los Angeles, California, USA, p. TP1.70 – TP1.79. [Seite 29]

Luza, G., 1997, 'Personeninduzierte Schwingungen von biege- und torsionssteifen, gedämpften Brücken', Dissertation, Institut für Stahlbau (E213), TU-Wien, A-1040 Wien. [Seite 159, 173]

Maeder, R.E., 2000, 'Computer Science with Mathematica', Theory and Practice for Science, Mathematics and Engineering, Cambridge University Press. [Seite 87]

Magnus, K., 1961, 'Schwingungen', Eine Einführung in die theoretische Behandlung von Schwingungsproblemen, B.G. Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart. [Seite 77]

Matsumoto, Y., Nishioka, T., Shiojiri, H., Matsuzaki, K., 1980, 'Dynamic Design of Footbridges', in: *IABSE-Proceedings*, p. 17-18. [Seite 244]

McRobie, A., Morgenthal, G., 2002, 'Risk Management for Pedestrian-Induced Dynamics of Footbridges', in: *Proc. Int. Conference Footbridge 2002*, Paris. [Seite 253, 254]

Meirovitch, L., 1980, 'Computational methods in structural dynamics', Sijthoff&Noordhoff, Alphen aan den Rijn, The Netherlands Rockville, Maryland, USA. [Seite 56]

Merkin, D.R., 1997, 'Introduction to the Theory of Stability', Springer-Verlag New York, Inc.. [Seite 77, 79]

Modi, V.J., Welt, F., 1987, 'Vibration control using nutation dampers', in: Proc. Int. Conference on Flow Induced Vibrations, BHRA, England, p. 369-376. [Seite 29]

Müller, P.C., Schiehlen, W.O., 1976, 'Lineare Schwingungen', Theoretische Behandlung von mehrfachen Schwingern, Akademische Verlagsgesellschaft, Wiesbaden. [Seite 116, 326, 327]

Nakamura, S., Fujino, Y., 2002, 'Lateral Vibration on a Pedestrian Cable-Stayed Bridge', Journal of the International Association for Bridge and Structural Engineering (IABSE), Vol.12, No.4, p. 295-300. [Seite 48, 240, 298, 299]

Nayfeh, A.H., Mook, D.T., 1979, 'Nonlinear Oscillations', A Wiley-Interscience Publication, John Wiley&Sons, New York – Chichester – Brisbane – Toronto. [Seite 81]

Newland, D.E., 2003, 'Pedestrian Excitation Of Bridges – Recent Results', Tenth International Congress on Sound and Vibration, Stockholm, Sweden, 7-10 July 2003, CD-Rom Paper, p. 533-547. [Seite 245, 246, 247, 249, 250, 255, 262]

Newmark, N.M., Rosenblueth, E., 1971, 'Fundamentals of Earthquake Engineering', Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, USA. [Seite 74]

Ni, Y.Q., Ying, Z.G., Wang, J.Y., Ko, J.M., Spencer Jr., B.F., 2004, 'Stochastic optimal control of wind-excited tall buildings using semi-active MR-TLCDs', Probabilistic Engineering Mechanics, Vol. 19, p. 269-277. [Seite 35]

Nowacki, W., 1974, 'Baudynamik', Neubearbeitung der zweiten polnischen Auflage, Springer-Verlag, Wien New York. [Seite 159]

Pan, T.C., 1992, 'Vibration of Pedestrian Overpass', Journal of Performance of Constructed Facilities', Vol.6, No.1, p. 33-45. [Seite 41]

Petersen, C., 1996, 'Dynamik der Baukonstruktionen', Friedr. Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft mbH, Braunschweig / Wiesbaden. [Seite 324]

Petersen, C., 2001, 'Schwingungsdämpfer im Ingenieurbau', 1. Auflage, München, Maurer Söhne GmbH & Co. KG. [Seite 27, 42, 43, 44, 45, 47, 132, 245, 253, 324]

Ramberger, G., 2002, 'Skriptum zur Vorlesung Stahlbau 2', erhältlich am Institut für Stahlbau (E213), TU-Wien, A-1040 Wien. [Seite 159, 336, 337]

Ramberger, G., Schnaubelt, S., 1998, 'Stahlbau', 5., korrigierte Auflage, Mainz Verlag Schulbuch, Wien. [Seite 159]

Reiterer, M., Hochrainer, M.J., 2003, 'Investigation of Parametric Resonance in Tuned Liquid Column Dampers', PAMM, Vol.3, Issue 1, p. 122.123, <http://www.gamm-proceedings.com>. [Seite 55]

Reiterer, M., Hochrainer, M.J., 2003, 'Parametric Resonance In Tuned Liquid Column Dampers: An Experimental Investigation', IAZ, 2004, in print. [Seite 101]

Reiterer, M., Ziegler, F., 2004, 'Control Of Pedestrian-Induced Vibrations Of Footbridges Using Tuned Liquid Column Dampers', in: Proceedings of 5th Int. Congress on Bridges across the Danube 2004, Novi Sad, Serbia and Montenegro, June 24th-26th, 12 pages, article in press. [Seite 209]

Roik, K., Albrecht, G., Weyer, U., 1986, 'Schrägseilbrücken', Ernst&Sohn, Verlag für Architektur und technische Wissenschaften Berlin. [Seite 132]

Rubin, H., 2001, 'Studienblätter zur Vorlesung Baustatik 1', Nr. 1.1 bis 1.29, erhältlich am Institut für Baustatik (E211), TU-Wien, A-1040 Wien. [Seite 307]

Sadek, F., Bijan, M., Lew, H.S., 1998, 'Single- And Multiple-Tuned Liquid Column Dampers For Seismic Applications', *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 27, p. 439-463. [Seite 34]

Sakai, F., Takaeda, S., Tamaki, T., 1989, 'Tuned liquid column damper – new type device for suppression of building vibrations', in: *Proc. Int. Conf. on High-rise Buildings*, Nanjing, China, p. 926-931. [Seite 30, 54]

Schäpertöns, B., Schäfer, D., 2003, 'Begehbare Doppelhelix – Eine unendlich lange Fußgängerbrücke', *Dokumentation D 0198 der D-A-CH Tagung 2003, Aktuelle Probleme der Brückendynamik*, Herausgeber: Glauco Feltrin und Thomas Wenk, ETH Zürich, S. 27-34. [Seite 241, 243]

Schulze, H., 1980, 'Dynamische Einflüsse der Verkehrslast auf Fußgängerbrücken', *Signal und Schiene*, Heft 2, S. 91-93 und Heft 3, S. 143-144. [244, 245]

Shabana, A.A., 1997, 'Vibration of Discrete and Continuous Systems', Second Edition, Springer – Verlag New York, Inc. [Seite 7]

Shum, K.M., Xu, Y.L., 2002, 'Multiple-tuned liquid column dampers for torsional vibration control of structures: experimental investigation', *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 31, p. 977-991. [Seite 49]

Shum, K.M., Xu, Y.L., 2002, 'Multiple-tuned liquid column dampers for torsional vibration control of structures: theoretical investigation', *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 32, p. 309-328. [Seite 49]

Skinner, R.I., Tyler, R.G., Heine, A.J., Robinson, W.H., 1980, 'Hysteretic Dampers for the Protection of Structures from Earthquakes', *Earthquake Engineering*, 13, p. 22-36. [Seite 39]

Socket, H., 1984, 'Aerodynamik der Bauwerke', *Friedr. Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft mbH*, Braunschweig. [Seite 252, 324]

Soong, T.T., Dargush, G.F., 1997, 'Passive Energy Dissipation Systems in Structural Engineering', *John Wiley&Sons*. [Seite 19, 38, 39, 40, 42, 89]

Spencer, B.F.Jr., Dyke, S.J., Deoskar, H.S., 1997, 'Benchmark Problems in Structural Control, Part II: Active Tendon System, in: *Proc. of the 1997 ASCE Structures Congress*, Portland, Oregon, April 13-16, 1997, also available: <http://www.nd.edu/~quake>. [Seite 111]

Starossek, U., 1992, 'Brückendynamik, Winderregte Schwingungen von Seilbrücken', *Friedr. Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft mbH*, Braunschweig / Wiesbaden. [Seite 324]

Sun, L.M., Fujino, Y., Koga, K., 1995, 'A Model Of Tuned Liquid Dampers For Suppressing Pitching Motions Of Structures', *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 24, p. 625-636. [Seite 47]

Sun, L.M., Nakaoka, T., et al., 1990, 'Tuned liquid damper for suppressing vertical vibration', in: *Proc. 45th JSCE annual meeting*, Vol.1, p. 978-979 (in Japanese). [Seite 49]

Sun, L.M., Fujino, Y., Pacheco, B.M., Isobe, M., 1989, 'Nonlinear waves and dynamic pressures in rectangular TLD – simulation and experimental verification', *JSCE, Journal of Structural Engineering and Earthquake Engineering*, 6(2), p. 251-262. [Seite 29]

Tamura, Y., Fujii, K., Ohtsuki, T., Wakahara, T., Kohsaka, R., 1995, 'Effectiveness of tuned liquid dampers under wind excitation', *Engineering Structures*, Vol.17, No.9, p. 609-621. [Seite 30]

Walther, R., 1994, 'Schrägseilbrücken', *Beton-Verlag GmbH*, Düsseldorf. [Seite 132]

Warburton, G.B., Ayorinde, E.O., 1980, 'Optimum Absorber Parameters for Simple Systems', *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 8, p. 197 – 217. [Seite 19]

Watanabe S., 1969, 'Methods of vibration reduction', *Proc. Japan Naval Arch. Soc. Symp.*, p. 156-179. [Seite 28]

Weaver, W., Timoshenko, S.P. und Young, D.H., 1990, 'Vibration problems in engineering', 5th Edition, New York: J. Wiley & Sons. [Seite 159, 170]

Wittenburg, J., 1996, 'Schwingungslehre', *Lineare Schwingungen, Theorie und Anwendung*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York. [Seite 77]

Wolfram, S., 1999, 'The Mathematica Book', Fourth Edition, Wolfram Media, Cambridge University Press. [Seite 87]

Won, A.Y.J., Pires, J.A., Haroun, M.A., 1997, 'Performance Assessment Of Tuned Liquid Column Dampers Under Random Seismic Loading', *Int. J. Non-Linear Mechanics*, Vol.32, No.4, p. 745-758. [Seite 33]

Xue, S.D., Ko, J.M., Xu, Y.L., 2000, 'Tuned liquid column damper for suppressing pitching motion of structures', *Engineering Structures*, 23, p. 1538-1551. [Seite 49, 135, 136]

Yalla, S.K., 2001, 'Liquid dampers for mitigation of structural response: Theoretical development and experimental validation', Dissertation, University of Notre Dame, Department of Civil Engineering and Geological Sciences, Indiana. [Seite 29]

Yalla, S.K., Kareem, A., 1999, 'Modeling of TLDs as Sloshing-Slamming Dampers', *Wind Engineering into the 21st century: Proc. 10th World Conference on Wind Engineering*, Copenhagen, Balkema Press, p. 1569-1575. [Seite 29]

Yalla, S.K., Kareem, A., Kantor, J.C., 2001, 'Semi-active tuned liquid column dampers for vibration control of structures', *Engineering Structures*, 23, p. 1469-1479. [Seite 34]

Yalla, S.K., Kareem, M., 2000, 'On the Beat Phenomenon in Coupled Systems', in: 8th ASCE Specialty Conference on Probabilistic Mechanics and Structural Reliability, p. 1-5. [Seite 95]

Ziegler, F., 1998, 'Technische Mechanik der festen und flüssigen Körper', Dritte, verbesserte Auflage, Springer Wien New York. [Seite 20, 46, 58, 62, 68, 78, 84, 95, 113, 139, 145, 182, 238, 252, 258, 259, 324]

Ziegler, F., 1995, 'Mechanics of Solids and Fluids', Second Edition, Springer-Verlag New York. [Seite 168, 184, 300]

Ziegler, F., 1979, 'Skriptum zur Vorlesung Baudynamik (Bebenerregung)', erhältlich am Institut für Allgemeine Mechanik (E201), TU-Wien, A-1040 Wien. [Seite 11, 13]

Lebenslauf

Geboren:	14. Juli 1974 in Vorau (Steiermark)
Eltern:	Karl Reiterer, Inge Reiterer (geb. Halwachs)
Geschwister:	Rene (geb. 1972)
Juni 1993	Abschlussprüfung an der HTBLA – Pinkafeld, <i>mit Auszeichnung bestanden.</i>
Juli 1993 – Feb. 1994	Ableistung des Präsenzdienstes als Grundwehrdiener beim österreichischen Bundesheer.
März 1994 – Sept. 1997	Bautechnischer Angestellter, Firma Dipl.-Ing. Brandstetter & Co, A-1230 Wien, Tochtergesellschaft des Baukonzerns STRABAG, eingesetzt in der Bauleitung von Hoch- und Industriebaustellen.
Sept. 1994 – Juni 1997	Besuch des 3-jährigen Aufbaulehrganges für Absolventen einer Fachschule in der Form einer <i>Abendschule</i> , HTBLA Camillo-Sitte, A-1030 Wien.
13. Juni 1997	Reifeprüfung an der HTBLA Camillo-Sitte, Hochbauabteilung, <i>mit Auszeichnung bestanden.</i>
Okt. 1997 – Nov. 2001	Diplomstudium an der Technischen Universität in Wien, Fachrichtung Bauingenieurwesen – Konstruktiver Ingenieurbau
30. November 2001	Zweite Diplomprüfung an der Technischen Universität Wien, Fakultät für Bauingenieurwesen, Diplomarbeit: „Dynamische Analyse schubelastischer Platten unter singulären Lastfunktionen“ (Betreuer: ao.Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Rudolf Heuer, Institut für Allgemeine Mechanik, E 201)
Jän. 2002 –März 2002	Freier Mitarbeiter im Ingenieurbüro Fa. Dipl.-Ing. Schedl, 1200 Wien, statische und dynamische Berechnung von Ingenieurkonstruktionen
seit 01. April 2002	Wissenschaftlicher Mitarbeiter in Ausbildung (WMA) an der Technische Universität Wien, Institut für Allgemeine Mechanik, E201, Vorstand: o.Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Dr.h.c. Franz Ziegler, Doktoratsstudium